Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(5), 2087-2095
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.135196

带导数耦合Schrödinger方程组的适定性

李巧欣，顾　月*

华北电力大学数理学院，北京

收稿日期：2024年4月23日；录用日期：2024年5月17日；发布日期：2024年5月28日

摘　要

带导数非线性Schrödinger方程描述了极化Alfvén波在恒定磁场下磁化等离子体的传播。本文研究带导数耦合Schrödinger方程组的Cauchy问题。利用傅里叶限制范数方法，得到了初始值在$H^s(R)\times H^s(R)\left(s>\frac{1}{2}\right)$中的局部适定性。

关键词

带导数耦合Schrödinger方程组，傅里叶限制范数方法，局部适定性

Well-Posedness for the Coupled Schrödinger Equations with Derivative

Qiaoxin Li, Yue Gu*

School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing

Received: Apr. 23rd, 2024; accepted: May 17th, 2024; published: May 28th, 2024

Abstract

The derivative nonlinear Schrödinger equation describes the propagation of circular polarized Alfvén waves in a magnetized plasma under a constant magnetic field. In this paper, we study the Cauchy problem of the coupled Schrödinger equations with derivative. Using the Fourier restriction norm method, we obtain the local well-posedness for initial data in $H^s(R)\times H^s(R)\left(s>\frac{1}{2}\right)$.

Keywords

The Coupled Schrödinger Equations with Derivative, Fourier Restriction Norm Method, Local Well-Posedness

*通讯作者。

文章引用: 李巧欣, 顾月. 带导数耦合 Schrödinger 方程组的适定性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(5): 2087-2095.
DOI: 10.12677/aam.2024.135196

1. 引言

研究带导数耦合 Schrödinger 方程组的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t - i\alpha u_{xx} = v^2\bar{u}_x, \\ v_t - i\beta v_{xx} = u^2\bar{v}_x, \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $i=\sqrt{-1}$，α，β 为任意实数且 $\alpha \neq 0$，$\beta \neq 0$，u，v是 $(t,x)\in R\times R$ 上的未知复值函数。方程 (1.1) 是描述双折射光纤在皮秒和飞秒区域的脉冲传播模型的特例[1] [2] [3] [4] [5]。

系统(1.1)的单一方程是在[6] [7]中提出的，用于研究存在霍尔效应的一维可压缩磁流体动力学方程和圆极化非线性Alfvén波在磁化等离子体中的传播[8]。带导数非线性Schrödinger方程在多个物理学领域中都有广泛的应用，它不仅在描述海森堡自旋链的变形动态中扮演重要角色，也用于分析光纤中超短脉冲的传播等问题[9]。

文献[10]证明了下式整体弱解的存在性：

$$u_t + iu_{xx} = i\alpha |u|^{2\sigma} u + \beta\left(|u|^2 u\right)_x$$

其中 α，β，σ 为实常数且 $\beta \neq 0$，$\sigma \in [1,2]$。

Guo和Tan [11]研究了如下方程：

$$u_t = i\alpha u_{xx} + \beta u^2\bar{u}_x + \gamma |u|^2 u_x + ig\left(|u|^2\right)u \tag{1.2}$$

利用Galërkin方法和先验估计得到了常数 α，β，γ，函数 $g(\cdot)$ 和初始数据 $u(x,0)$ 在某些条件下光滑解的唯一存在性。此外，讨论了当 $|x|\to\infty$ 时，光滑解的衰减行为。Tan和Zhang [12]讨论了方程(1.2)弱解的唯一存在性。

很多学者研究了带导数非线性Schrödinger方程的局部和全局适定性。Takaoka [13]证明了 $s \geq \frac{1}{2}$ 时的局部适定性。Biagioni和Linares [14]在 $s < \frac{1}{2}$ 时得到不适定性。对于全局适定性，Colliander证明了在 $s > \frac{1}{2}$ 时是有效的。2013 年，假设初始值 $u_0 \in H^1(R)$，且 $\|u_0\|_{L^2} < 2\sqrt{\pi}$，Wu [15]证明了在能量空间是全局适定的。进一步的结果参见文献[16] [17] [18] [19] [20]。

带导数非线性Schrödinger方程许多学者在研究。文献[5]中，Zhang研究了N-耦合混合导数非线性Schrödinger方程。利用Hirot的双线性方法，得到了亮孤子的解析解。基于能量交换特性，提出了一些可能的应用。文献[3]中，Hisakado M.，Iizuka T.和Wadati M.考虑了 2-耦合混合导数非线性Schrödinger方程，并得到了一个解，严格地说是一个孤波解。

据我们所知，带导数的Schrödinger系统还没有得到充分的研究。在本文中，将证明初始值在 $H^s \times H^s\left(s > \frac{1}{2}\right)$ 中，Cauchy问题(1.1)是局部适定的。主要思想是使用傅里叶限制范数方法[21] [22] [23]，压缩映射原理，以及两个极大值函数估计。

在给出我们的结果之前，先介绍一些基本知识和本文将要用到的符号。

定义： $s,b\in R$，空间 $X_{s,b}$ 被定义为R^2上Schwartz函数空间关于范数

$$\|u\|_{X_{s,b}}=\|S(-t)u\|_{H_x^sH_t^b}=\left\|\langle\xi\rangle^s\langle\tau-\phi(\xi)\rangle^b\mathcal{F}u\right\|_{L_\xi^2L_\tau^2}$$

的完备化。

如果 $\phi(\xi)=\alpha\xi^2$，那么定义 $X_{s,b}=X_{s,b}^{\alpha}$，如果 $\phi(\xi)=\beta\xi^2$，那么定义 $X_{s,b}=X_{s,b}^{\beta}$。

因此当 $s_1\le s_2$，$b_1\le b_2$ 时，嵌入关系 $\|u\|_{X_{s_1,b_1}}\le\|u\|_{X_{s_2,b_2}}$ 成立。用 $\hat{u}(\tau,\xi)=\mathcal{F}u$ 表示u在变量t和x中的傅里叶变换，用 $\mathcal{F}_{(\cdot)}u$ 分别表示u在变量 $(\cdot)$ 中的傅里叶变换。

定义卷积积分 $\int_{\clubsuit}\mathrm{d}\delta$

$$\int_{\xi=\xi_1+\xi_2+\xi_3;\tau=\tau_1+\tau_2+\tau_3}\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\tau_3\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3。\tag{1.3}$$

令 $\psi\in C_0^\infty(R)$ 在区间 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上 $\psi=1$，且 $\operatorname{supp}\psi\subset[-1,1]$。存在 $\delta\in R\setminus\{0\}$ 定义 $\psi_\delta(\cdot)=\psi\left(\delta^{-1}(\cdot)\right)$。

定义 $A\sim B$：存在常数 $C_1>0$，$A\le C_1B$ 且 $B\le C_1A$；定义 $A\ll B$：对于某个足够大的常数 $C_2>0$，$A\le\frac{1}{C_2}B$。

本文利用积分等价公式研究问题(1.1)

$$u(t)=S_\alpha(t)u_0-i\int_0^tS_\alpha(t-t')v^2\overline{u}_x(t')\mathrm{d}t'$$

$$v(t)=S_\beta(t)v_0-i\int_0^tS_\beta(t-t')u^2\overline{v}_x(t')\mathrm{d}t'$$

其中

$$S_\alpha(t)=\mathcal{F}_x^{-1}\mathrm{e}^{it\alpha\phi(\xi)}\mathcal{F}_x,\quad\phi(\xi)=\xi^2,$$

$$S_\beta(t)=\mathcal{F}_x^{-1}\mathrm{e}^{it\beta\phi(\xi)}\mathcal{F}_x,\quad\phi(\xi)=\xi^2,$$

分别是与线性方程和相函数相关的酉算子。

主要结果是：

定理 1.1 对 $(u_0,v_0)\in H^s\times H^s\left(s>\frac{1}{2}\right)$，存在一个实数$b$无限接近于 1/2，且满足 $b>1/2$，则存在常数 $T>0$，柯西问题(1.1)存在唯一的局部解 $(u(x,t),v(x,t))\in\left(C([0,T];H^s)\cap X_{s,b}\right)^2$。此外，给定 $t\in(0,T)$，映射 $(u_0,v_0)\to(u,v)$ 从 $H^s(R)\times H^s(R)$ 到 $C([0,T];H^s)\times C([0,T];H^s)$ 是Lipschitz连续的。并且，初始值在 $H^1(R)\times H^1(R)$ 中是全局适定的。

本文组织如下。在第 2 节中，给出了一些注释，并陈述了一些将在本文中使用的初步估计。基于第 2 节的初步估计，在第 3 节中得到了关键的非线性估计。最后，在第 4 节给出了定理 1.1 的证明。

2. 初步估计

在本节中，证明一些估计。首先，给出以下符号：

$$\mathcal{F}F_{\alpha,\rho}(\xi,\tau)=\frac{f(\xi,\tau)}{\left(1+\left|\tau+\alpha\xi^2\right|\right)^\rho},$$

$$\mathcal{F}F_{\beta,\rho}(\xi,\tau)=\frac{f(\xi,\tau)}{\left(1+\left|\tau+\beta\xi^2\right|\right)^{\rho}},$$

$$\|f\|_{L_x^pL_t^q}=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},\quad \|f\|_{L_t^qL_x^p}=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{q}{p}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}},$$

对分数 s 有 $D_x^s=\mathcal{F}_x^{-1}|\xi|^s\mathcal{F}_x$，对整数 m 有 $D_x^m=\mathcal{F}_x^{-1}(i\xi)^m\mathcal{F}_x$。

引理 2.1 ([24])群 $\{S_\alpha(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ 满足

$$\left\|D_x^{\frac{1}{2}}S_\alpha(t)u_0\right\|_{L_x^\infty L_t^2}\le C\|u_0\|_{L^2},\tag{2.1}$$

$$\left\|D_x^{-\frac{1}{4}}S_\alpha(t)u_0\right\|_{L_x^4 L_t^\infty}\le C\|u_0\|_{L^2},\tag{2.2}$$

$$\left\|S_\alpha(t)u_0\right\|_{L_x^6 L_t^6}\le C\|u_0\|_{L^2},\tag{2.3}$$

$$\left\|D_x^{s}S_\alpha(t)u_0\right\|_{L_x^2 L_{t\in(0,1)}^\infty}\le C\|u_0\|_{L^2},\ s>1/2\tag{2.4}$$

其中(2.1)、(2.2)、(2.3)和(2.4)也适用于群 $S_\beta(t)$。

引理 2.2 若 $\rho>\frac{1}{2}$，则

$$\left\|D_x^{\frac{1}{2}}F_{\alpha,\rho}\right\|_{L_x^\infty L_t^2}\le C\|f\|_{L_\xi^2L_\tau^2},\tag{2.5}$$

$$\left\|D_x^{-\frac{1}{4}}F_{\alpha,\rho}\right\|_{L_x^4 L_t^\infty}\le C\|f\|_{L_\xi^2L_\tau^2},\tag{2.6}$$

$$\left\|F_{\alpha,\rho}\right\|_{L_x^6 L_t^6}\le C\|f\|_{L_\xi^2L_\tau^2},\tag{2.7}$$

$$\left\|D_x^{-s}F_{\alpha,\rho}\right\|_{L_x^2 L_{t\in(0,1)}^\infty}\le C\|f\|_{L_\xi^2L_\tau^2},\ s>1/2\tag{2.8}$$

其中(2.5)、(2.6)、(2.7)和 (2.8)也适用于群 $F_{\beta,\rho}$。

证明 只证明式(2.5)。式(2.6)、(2.7)、(2.8)的证明与式(2.5)的证明相似。变化变量 $\tau=\lambda-\phi(\xi)$，有

$$\begin{aligned}F_{\alpha,\rho}(x,t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{i(x\xi+t\tau)}\frac{f(\xi,\tau)}{\left(1+|\tau+\phi(\xi)|\right)^{\rho}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{it\tau}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{i(x\xi+t\phi(\xi))}f(\xi,\lambda+\phi(\xi))\mathrm{d}\xi\right)\frac{\mathrm{d}\lambda}{(1+|\lambda|)^{\rho}}\end{aligned}$$

利用式(2.1)和 Minkowski 积分不等式，取 $\rho>\frac{1}{2}$，可以得到

$$\left\|D_x^{\frac{1}{2}}F_{\alpha,\rho}\right\|_{L_x^\infty L_t^2}\le C\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|f(\xi,\lambda+\phi(\xi))\right\|_{L_\xi^2}\frac{\mathrm{d}\lambda}{(1+|\lambda|)^{\rho}}\le C\|f\|_{L_\xi^2L_\tau^2}。\tag{2.9}$$

引理 2.3 若 $\rho>\frac{1}{4}$ 则

$$\left\|D_x^{\frac{1}{4}}F_{\alpha,\rho}\right\|_{L_x^4 L_t^2}\le C\|f\|_{L_\xi^2L_\tau^2},\tag{2.10}$$

其中(2.10)也适用于群 $F_{\beta,\rho}$。

证明 首先，有

$$\left\|F_{\alpha,0}\right\|_{L_x^2 L_t^2} \le C\left\|f\right\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}。\tag{2.11}$$

通过在(2.11)和(2.5)之间插值，当 $\rho > \frac{1}{4}$ 时，有

$$\left\|D_x^{\frac{1}{4}} F_{\alpha,\rho}\right\|_{L_x^4 L_t^2} \le C\left\|f\right\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}。\tag{2.12}$$

引理 2.4 若 f，f_1，f_2 和 f_3 属于 R^2 上的 Schwartz 空间，则

$$\int_{*} \overline{\hat{f}}(\xi,\tau)\,\hat{f}_1(\xi_1,\tau_1)\,\hat{f}_2(\xi_2,\tau_2)\,\hat{f}_3(\xi_3,\tau_3)\,\mathrm{d}\delta = \int \overline{f}\, f_1 f_2 f_3(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t。\tag{2.13}$$

证明 为简单起见，只讨论一个变量的情况。事实上，可以得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi=\xi_1+\xi_2+\xi_3} \overline{\hat{f}}(\xi)\,\hat{f}_1(\xi_1)\,\hat{f}_2(\xi_2)\,\hat{f}_3(\xi_3)\,\mathrm{d}\delta \\
&= \int_{\xi=\xi_1+\xi_2+\xi_3} \hat{\overline{f}}(-\xi)\,\hat{f}_1(\xi_1)\,\hat{f}_2(\xi_2)\,\hat{f}_3(\xi_3)\,\mathrm{d}\delta \\
&= \int_{\xi_1}\int_{\xi_2'}\int_{\xi_3'} \hat{\overline{f}}(-\xi_3')\,\hat{f}_1(\xi_1)\,\hat{f}_2(\xi_2'-\xi_1)\,\hat{f}_3(\xi_3'-\xi_2')\,\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2'\mathrm{d}\xi_3' \\
&= \hat{\overline{f}} * \hat{f}_1 * \hat{f}_2 * \hat{f}_3(0) = \mathcal{F}\left(\overline{f} f_1 f_2 f_3\right)(0) = \int \overline{f} f_1 f_2 f_3(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

引理 2.5 (Kenig-Ponce-Vega [22] [23])令 $s \in R$，$\frac{1}{2} < b < 1$，$0 < \delta < 1$，则

$$\left\|\psi_\delta(t) S(t) u_0\right\|_{X_{s,b}} \le C\delta^{\frac{1}{2}-b}\left\|u_0\right\|_{H^s},\tag{2.14}$$

$$\left\|\psi_\delta(t)\int_0^t S(t-t') f(t')\,\mathrm{d}t'\right\|_{X_{s,b}} \le C\delta^{\frac{1}{2}-b}\left\|f\right\|_{X_{s,b-1}},\tag{2.15}$$

$$\left\|\psi_\delta(t)\int_0^t S(t-t') f(t')\,\mathrm{d}t'\right\|_{H^s} \le C\delta^{\frac{1}{2}-b}\left\|f\right\|_{X_{s,b-1}}。\tag{2.16}$$

$$\left\|\psi_\delta(t) F\right\|_{X_{s,b}} \le C\delta^{\frac{1}{2}-b}\left\|F\right\|_{X_{s,b}},\tag{2.17}$$

$$\left\|\psi_\delta(t) F\right\|_{X_{s,b-1}} \le C\delta^{b'-b}\left\|F\right\|_{X_{s,b'-1}}。\tag{2.18}$$

3. 非线性估计

在本节中，根据第 2 节的初步估计推导出关键的非线性估计。定义

$$\sigma_\alpha = \tau + \alpha\xi^2,\quad \sigma_{\alpha,1} = \tau_1 - \alpha\xi_1^2,\quad \overline{\sigma}_{\alpha,2} = \tau_2 + \alpha\xi_2^2,\quad \sigma_{\alpha,3} = \tau_3 - \alpha\xi_3^2,\quad \overline{\sigma}_{\alpha,4} = \tau_4 + \alpha\xi_4^2 \tag{3.1}$$

其中 $-\xi_4 = \xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$，$-\tau_4 = \tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$。类似的定义 σ_β，$\overline{\sigma}_{\beta,2}$，$\sigma_{\beta,3}$，$\overline{\sigma}_{\beta,4}$。则有

$$\overline{\sigma}_{\beta,4} + \overline{\sigma}_{\beta,2} + \sigma_{\alpha,3} + \sigma_{\alpha,1} = \beta\left(\xi_4^2 + \xi_2^2 - \frac{\alpha}{\beta}\left(\xi_1^2 + \xi_3^2\right)\right)。$$

定理 3.1 若 $s > \frac{1}{2}$，$\frac{1}{2} < b$ 和 $\frac{1}{2} < b'$，则

$$\left\|u_1 u_3 \partial_x \overline{u}_2\right\|_{X^\beta_{s,b-1}} \le C\left\|u_1\right\|_{X^\alpha_{s,b}}\left\|u_2\right\|_{X^\beta_{s,b}}\left\|u_3\right\|_{X^\alpha_{s,b}}。$$

证明 通过对偶和 Plancherel 恒等式，充分证明

$$\begin{aligned}\Gamma &= \int_{\clubsuit} \langle\xi\rangle^s |\xi_2| \frac{\overline{f}(\tau,\xi)}{\langle\sigma_\beta\rangle^{1-b}} \mathcal{F}u_1(\tau_1,\xi_1)\mathcal{F}u_3(\tau_3,\xi_3)\mathcal{F}\overline{u}_2(\tau_2,\xi_2)\mathrm{d}\delta \\ &= \int_{\clubsuit} \frac{\dfrac{\langle\xi\rangle^s|\xi_2|}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s\langle\xi_3\rangle^s}}{\langle\sigma_\beta\rangle^{1-b}\langle\sigma_{\alpha,1}\rangle^{b'}\langle\sigma_{\alpha,3}\rangle^{b'}\langle\overline{\sigma}_{\beta,2}\rangle^{b'}} \overline{f}(\tau,\xi) f_1(\tau_1,\xi_1) f_2(\tau_2,\xi_2) f_3(\tau_3,\xi_3)\mathrm{d}\delta \\ &\le C\|f\|_{L_2}\prod_{j=1}^{3}\|f_j\|_{L_2}\end{aligned}$$

对所有非负函数 $\overline{f}\in L_2$，其中 $f_j=\langle\xi_j\rangle^s\langle\sigma_{\alpha,j}\rangle^{b'}\hat{u}_j\,(j=1,3)$ 和 $f_2=\langle\xi_2\rangle^s\langle\overline{\sigma}_{\beta,2}\rangle^{b'}\hat{\overline{u}}_2$。

令

$$\mathcal{F}F^j_{\alpha,\rho}(\xi,\tau)=\frac{f_j(\tau,\xi)}{\left(1+\left|\tau+\alpha\xi^2\right|\right)^\rho},\ j=1,2\text{；}\ \mathcal{F}F^2_{\beta,\rho}(\xi,\tau)=\frac{f_2(\tau,\xi)}{\left(1+\left|\tau-\beta\xi^2\right|\right)^\rho}\text{。}$$

通过将积分区域分割成若干个具有上界 $C\|f\|_{L^2_\xi L^2_\tau}\|f_1\|_{L^2_\xi L^2_\tau}\|f_2\|_{L^2_\xi L^2_\tau}\|f_3\|_{L^2_\xi L^2_\tau}$ 的区域来估计积分 Γ。

令

$$K(\xi,\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\frac{\langle\xi\rangle^s|\xi_2|}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s\langle\xi_3\rangle^s}\text{。}$$

情况 1 假设

$$\overline{\sigma}_{\beta,4}+\overline{\sigma}_{\beta,2}+\sigma_{\alpha,3}+\sigma_{\alpha,1}=\beta\left(\xi_4^2+\xi_2^2-\frac{\alpha}{\beta}\left(\xi_1^2+\xi_3^2\right)\right)\gtrsim|\beta||\xi_2|^{5/4}\text{。}$$

根据对称性，假设 $\left|\sigma_\beta\right|=\left|\overline{\sigma}_{\beta,4}\right|\gtrsim|\beta||\xi_2|^{5/4}$ 和 $|\xi|\lesssim|\xi_2|$。

由引理 2.2，2.3，2.4 可知，对于 $b<3/5$，限制在这个区域上的 Γ 以

$$\begin{aligned}&C\int_{\clubsuit}\frac{|\xi_2|}{\langle\xi_1\rangle^{1/2}\langle\xi_3\rangle^{1/2}}\frac{\overline{f}(\tau,\xi)}{\langle\sigma_\beta\rangle^{1-b}}\frac{f_1(\tau_1,\xi_1)}{\langle\sigma_{\alpha,1}\rangle^{b'}}\frac{f_2(\tau_2,\xi_2)}{\langle\overline{\sigma}_{\beta,2}\rangle^{b'}}\frac{f_3(\tau_3,\xi_3)}{\langle\sigma_{\alpha,3}\rangle^{b'}}\mathrm{d}\delta \\ &\lesssim C\int\overline{F}_0\cdot D_x^{-1/4}F^1_{\alpha,b'}\cdot D_x^{1/2}F^2_{\beta,b'}\cdot D_x^{-1/4}F^3_{\alpha,b'}(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\le C\|F_0\|_{L^2_xL^2_t}\left\|D_x^{-1/4}F^1_{\alpha,b'}\right\|_{L^4_xL^\infty_t}\left\|D_x^{1/2}F^2_{\beta,b'}\right\|_{L^\infty_xL^2_t}\left\|D_x^{-1/4}F^3_{\alpha,b'}\right\|_{L^4_xL^\infty_t} \\ &\le C\|f\|_{L^2_\xi L^2_\tau}\|f_1\|_{L^2_\xi L^2_\tau}\|f_2\|_{L^2_\xi L^2_\tau}\|f_3\|_{L^2_\xi L^2_\tau}\end{aligned}$$

为界。

情况 2 假设

$$\overline{\sigma}_{\beta,4}+\overline{\sigma}_{\beta,2}+\sigma_{\alpha,3}+\sigma_{\alpha,1}=\beta\left(\xi_4^2+\xi_2^2-\frac{\alpha}{\beta}\left(\xi_1^2+\xi_3^2\right)\right)\ll|\beta||\xi_2|^{5/4}\text{。}$$

意味着

$$\xi_4^2+\xi_2^2\sim\frac{\alpha}{\beta}\left(\xi_1^2+\xi_3^2\right)\text{。}$$

情况 2.1 若 $|\xi|=|\xi_4|\lesssim|\xi_1|$，通过对称性，假设 $|\xi|^2\sim\frac{\alpha}{\beta}|\xi_1|^2$ 和 $|\xi_2|\gg|\xi_3|$。由引理 2.2，2.3，2.4 可知，对

于 $b<3/5$ 和 $s>1/2$，限制在这个区域上的 Γ 以

$$\begin{aligned}
&C\int_{\clubsuit}\frac{|\xi_2|^{1/2}}{\langle\xi_3\rangle^{s}}\frac{\overline{f}(\tau,\xi)}{\langle\sigma_\beta\rangle^{1-b}}\frac{f_1(\tau_1,\xi_1)}{\langle\sigma_{\alpha,1}\rangle^{b'}}\frac{f_2(\tau_2,\xi_2)}{\langle\overline{\sigma}_{\beta,2}\rangle^{b'}}\frac{f_3(\tau_3,\xi_3)}{\langle\sigma_{\alpha,3}\rangle^{b'}}\mathrm{d}\delta\\
&\lesssim\int\overline{F}_{1-b,\beta}\cdot F^1_{b',\alpha}\cdot D_x^{1/2}F^2_{b',\beta}\cdot D_x^{-1/4}F^3_{b',\alpha}(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\le C\|F_{\beta,1-b}\|_{L_x^4L_t^4}\|F^1_{\alpha,b'}\|_{L_x^4L_t^4}\|D_x^{1/2}F^2_{\beta,b'}\|_{L_x^\infty L_t^2}\|D_x^{-s}F^3_{\alpha,b'}\|_{L_x^2L_t^\infty}\\
&\le C\|f\|_{L_\xi^2L_\tau^2}\|f_1\|_{L_\xi^2L_\tau^2}\|f_2\|_{L_\xi^2L_\tau^2}\|f_3\|_{L_\xi^2L_\tau^2}
\end{aligned}$$

为界。

情况 2.2 若 $|\xi|=|\xi_4|\lesssim|\xi_3|$，通过对称性，假设 $|\xi|^2\sim\frac{\alpha}{\beta}|\xi_3|^2$ 和 $|\xi_2|\gg|\xi_1|$。与情况 2.2 类似，可以得到结果。

情况 2.3 若 $|\xi|=|\xi_4|\lesssim|\xi_2|$，通过对称性，假设 $|\xi_4|\sim|\xi_2|\gg|\xi_1|$，$|\xi_3|$。若 $\xi_4^2\sim\frac{\alpha}{\beta}\xi_1^2$，$\xi_4^2\sim\frac{\alpha}{\beta}\xi_3^2$，$\xi_2^2\sim\frac{\alpha}{\beta}\xi_1^2$ 或者 $\xi_2^2\sim\frac{\alpha}{\beta}\xi_3^2$ 成立，与情况 2.1 或情况 2.2 类似，可以得到结果。不失一般性，假设 $\xi_4^2+\xi_2^2\gg\frac{\alpha}{\beta}(\xi_1^2+\xi_3^2)$，与情况 1 类似，可以得到结果。这就完成了定理 3.1 的证明。

推论 3.2 若 $s>\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<b$ 和 $\frac{1}{2}<b'$，则

$$\|u_1u_3\partial_x\overline{u}_2\|_{X^\alpha_{s,b'-1}}\le C\|u_1\|_{X^\beta_{s,b}}\|u_2\|_{X^\alpha_{s,b}}\|u_3\|_{X^\beta_{s,b}}。$$

4. 局部适定性

在本节中，将给出定理 1.1 的证明。对 $(u_0,v_0)\in H^s\times H^s\,(s>1/2)$，定义算子

$$\Phi_\alpha(u)=\psi_1(t)S_\alpha(t)u_0-i\psi_1(t)\int_0^t S_\alpha(t-t')\psi_\delta(t')v^2\overline{u}_x(t')\mathrm{d}t',$$

$$\Phi_\beta(v)=\psi_1(t)S_\beta(t)v_0-i\psi_1(t)\int_0^t S_\beta(t-t')\psi_\delta(t')u^2\overline{v}_x(t')\mathrm{d}t',$$

和集合

$$\mathcal{B}_\alpha=\left\{u\in X^\alpha_{s,b}:\|u\|_{X^\alpha_{s,b}}\le 2C\|u_0\|_{H^s}\right\},$$

$$\mathcal{B}_\beta=\left\{v\in X^\beta_{s,b}:\|v\|_{X^\beta_{s,b}}\le 2C\|v_0\|_{H^s}\right\}。$$

将要证明 $\Phi_\alpha\times\Phi_\beta$ 是从 $\mathcal{B}_\alpha\times\mathcal{B}_\beta$ 到 $\mathcal{B}_\alpha\times\mathcal{B}_\beta$ 的压缩映射。

利用定理 3.1、推论 3.2 和引理 2.5，对于 $1/2<b<b'<3/5$，得到不等式链

$$\begin{aligned}
\|\Phi_\alpha(u)\|_{X^\alpha_{s,b}}&\le C\|u_0\|_{H^s}+C\|\psi_\delta v^2\overline{u}_x\|_{X^\alpha_{s,b-1}}\\
&\le C\|u_0\|_{H^s}+C\delta^{b-b'}\left(\|u\|_{X^\alpha_{s,b}}\|v\|^2_{X^\beta_{s,b}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\Phi_\beta(u)\|_{X^\beta_{s,b}}&\le C\|u_0\|_{H^s}+C\|\psi_\delta u^2\overline{v}_x\|_{X^\beta_{s,b-1}}\\
&\le C\|u_0\|_{H^s}+C\delta^{b-b'}\left(\|v\|_{X^\beta_{s,b}}\|u\|^2_{X^\alpha_{s,b}}\right)
\end{aligned}$$

因此，若 δ 满足 $C\delta^{b-b'}\left(\|u_0\|^2_{H^s}+\|v_0\|^2_{H^s}\right)\le\frac{1}{2}$，则

$$\Phi_\alpha \times \Phi_\beta\left(\mathcal{B}_\alpha \times \mathcal{B}_\beta\right) \subset \mathcal{B}_\alpha \times \mathcal{B}_\beta 。$$

令 $(u_1,u_2)\times(v_1,v_2)\in \mathcal{B}_\alpha \times \mathcal{B}_\beta$。用上述类似的方法，得到

$$\left\|\Phi_\alpha(u_1)-\Phi_\alpha(u_2)\right\|_{X_{s,b}^\alpha} \le \frac{1}{2}\left\|u_1-u_2\right\|_{X_{s,b}^\alpha},$$

$$\left\|\Phi_\beta(v_1)-\Phi_\beta(v_2)\right\|_{X_{s,b}^\beta} \le \frac{1}{2}\left\|v_1-v_2\right\|_{X_{s,b}^\beta}。$$

因此 $\Phi_\alpha \times \Phi_\beta$ 是 $\mathcal{B}_\alpha \times \mathcal{B}_\beta$ 上的压缩映射。因此存在唯一的不动点，使得当 $T<\frac{\delta}{2}$ 时，Cauchy 问题 (1.1) 可解。

5. 总结

文献[13]利用调和分析方法，证明了一维带导数项的非线性 Schrödinger 方程 Cauchy 问题在 $H^{\frac{1}{2}}$ 中的适定性。基于文献[13]中证明方法，本文主要研究一维带导数非线性 Schrödinger 方程组 Cauchy 问题的适定性。利用傅里叶限制范数方法，压缩映射原理，证明了当初始值属于 $H^s(R)\times H^s(R)\left(s>\frac{1}{2}\right)$ 时方程组的局部适定性。本文主要克服了方程组耦合非线性项的估计问题。没有给出全局适定性，今后可以研究在合适的初始条件下此类带导数耦合 Schrödinger 方程组的 Cauchy 问题是全局适定的。

基金项目

本论文由中央高校基金(项目号 2023MS078)和国家自然科学基金青年项目(项目号 11801552)支持。

参考文献

[1] Agrawal, G.P. (2001) Nonlinear Fiber Optics. Academic Press, New York.

[2] Hasegawa, A. and Kodama, Y. (1995) Solitons in Optical Communications. Oxford University Press, Oxford. https://doi.org/10.1093/oso/9780198565079.001.0001

[3] Hisakado, M., Iizuka, T. and Wadati, M. (1994) Coupled Hybrid Nonlinear Schrödinger Equation and Optical Solitons. *Journal of the Physical Society of Japan*, **63**, 2887-2894. https://doi.org/10.1143/JPSJ.63.2887

[4] Hisakado, M. and Wadati, M. (1995) Integrable Multi-Component Hybrid Nonlinear Schrödinger Equations. *Journal of the Physical Society of Japan*, **64**, 408-413. https://doi.org/10.1143/JPSJ.64.408

[5] Zhang, H.-L. (2013) Energy-Exchange Collisions of Vector Solitons in the N-Coupled Mixed Derivative Nonlinear Schrödinger Equations from the Birefringent Optical Fibers. *Optics Communications*, **29**, 141-145. https://doi.org/10.1016/j.optcom.2012.10.011

[6] Mio, W., Ogino, T., Minami, K. and Takeda, S. (1976) Modified Nonlinear Schrödinger for Alfvén Waves Propagating along the Magnetic Field in Cold Plasma. *Journal of the Physical Society of Japan*, **41**, 265-271. https://doi.org/10.1143/JPSJ.41.265

[7] Mjolhus, E. (1976) On the Modulational Instability of Hydromagnetic Waves Parallel to the Magnetic Field. *Journal of Plasma Physics*, **16**, 321-334. https://doi.org/10.1017/S0022377800020249

[8] Sulem, C. and Sulem, P.-L. (1999) The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse. Applied Mathematical Sciences, Vol. 139, Springer, New York, 1-347.

[9] Zhang, H.-Q., Tian, B., Lü, X., Li, H. and Meng, X.-H. (2009) Soliton Interaction in the Coupled Mixed Derivative Nonlinear Schrödinger Equations. *Physics Letters A*, **373**, 4315-4321. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2009.09.010

[10] Chen, Y.M. (1960) The Initial-Boundary Value Problem for a Class of Nonlinear Schrödinger Equations. *Acta Mathematica Scientia*, **6**, 405-418. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(18)30500-9

[11] Guo, B.L. and Tan, S.B. (1991) On Smooth Solutions to the Initial Value Problem for the Mixed Nonlinear Schrödinger Equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*: *Mathematics*, **119**, 31-45. https://doi.org/10.1017/S0308210500028298

[12] Tan, S.B. and Zhang, L.H. (1994) On a Weak Solution of the Mixed Schrödinger Equations. *Journal of Mathematical*

Analysis and Applications, **182**, 409-421. https://doi.org/10.1006/jmaa.1994.1095

[13] Takaoka, H. (1999) Well-Posedness for the One Dimensional Schrödinger Equation with the Derivative Nonlinearity. *Advances in Differential Equations*, **4**, 561-680. https://doi.org/10.57262/ade/1366031032

[14] Biagioni, H. and Linares, F. (2001) Ill-Posedness for the Derivative Schrödinger and Generalized Benjamin-Ono Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **353**, 3649-3659. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-01-02754-4

[15] Wu, Y.F. (2013) Global Well-Posedness of the Derivative Nonlinear Schrödinger Equations in Energy Space. *Analysis & PDE*, **6**, 1989-2002. https://doi.org/10.2140/apde.2013.6.1989

[16] Colliander, J., Keel, M., Staffilani, G., Takaoka, H. and Tao, T. (2002) A Refined Global Well-Posedness Result for Schrödinger Equations with Derivatives. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **34**, 64-86. https://doi.org/10.1137/S0036141001394541

[17] Colliander, J., Keel, M., Staffilani, G., Takaoka, H. and Tao, T. (2001) Global Well-Posedness Result for Schrödinger Equations with Derivative. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **33**, 649-669. https://doi.org/10.1137/S0036141001384387

[18] Herr, S. (2006) On the Cauchy Problem for the Derivative Nonlinear Schrödinger Equation with Periodic Boundary Condition. *International Mathematics Research Notices*, **2006**, O96763. https://doi.org/10.1155/IMRN/2006/96763

[19] Takaoka, H. (2001) Global Well-Posedness for Schrödinger Equations with Derivative in a Nonlinear Term and Data in Low-Order Sobolev Spaces. *Electronic Journal of Differential Equations*, **42**, 1-23.

[20] Wang, B.X., Han, L.J. and Huang, C.Y. (2009) Global Well-Posedness and Scattering for the Derivative Nonlinear Schrödinger Equation with Small Rough Data. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C*, *Analyse non Linéaire*, **26**, 2253-2281. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2009.03.004

[21] Bourgain, J. (1993) Fourier Restriction Phenomena for Certain Lattice Subsets and Applications to Nonlinear Evolution Equations: Part I: Schrödinger Equations, Part II: The KDV-Equation. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, **3**, 107-156, 209-262. https://doi.org/10.1007/BF01895688

[22] Kenig, C.E., Ponce, G. and Vega, L. (1993) The Cauchy Problem for the Korteweg-de Vries Equation in Sobolev Spaces of Negative Indices. *Duke Mathematical Journal*, **71**, 1-21. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-93-07101-3

[23] Kenig, C.E., Ponce, G. and Vega, L. (1996) A Bilinear Estimate with Applications to the KDV Equation. *Journal of the American Mathematical Society*, **9**, 573-603. https://doi.org/10.1090/S0894-0347-96-00200-7

[24] Kenig, C.E., Ponce, G. and Vega, L. (1991) Oscillatory Integrals and Regularity of Dispersive Equations. *Indiana University Mathematics Journal*, **40**, 33-69. https://doi.org/10.1512/iumj.1991.40.40003