Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(5), 2148-2154**
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.135203

星图的R^1-限制性点割

张璐瑶，胡晓敏*

太原理工大学数学学院，山西 太原

收稿日期：2024年4月28日；录用日期：2024年5月21日；发布日期：2024年5月30日

摘　要

互联网络的拓扑结构可以用图论模型来描述，因此图论在研究网络问题时扮演着重要角色。连通度是衡量一个网络容错性和可靠性的重要指标。然而，在实际情况中，网络中一个点的所有邻点同时发生故障的概率较小，因此经典连通度在一定程度上低估了互联网络的容错性。为了更准确地评估网络的连通性，引入了条件连通度的概念，并进一步提出了R^k-连通度的概念，使得连通度问题更具有现实意义。本文主要研究并刻画了星图的全部基数最小的R^1-限制性点割。

关键词

星图，凯莱图，R^1-限制性点割，R^1-连通度

The R^1-Restricted Cuts of Star Graphs

Luyao Zhang, Xiaomin Hu*

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: Apr. 28th, 2024; accepted: May 21st, 2024; published: May 30th, 2024

Abstract

The topology of the Internet can be described using graph theory models, thus graph theory plays an important role in studying network issues. Connectivity is a crucial metric for assessing the fault tolerance and reliability of a network. However, in practical scenarios, the probability of all neighbors of a node in the network failing simultaneously is very small. Therefore, classic connectivity to some extent underestimates the fault tolerance of the Internet. To more accurately evaluate network connectivity, the concept of conditional connectivity has been introduced, and further, the concept of R^k-connectivity has been proposed, making the connectivity problem more practically significant. This paper primarily studies and characterizes the minimum cardinality R^1-restricted cut of star graphs.

*通讯作者。

文章引用: 张璐瑶, 胡晓敏. 星图的 R^1-限制性点割[J]. 应用数学进展, 2024, 13(5): 2148-2154.
DOI: 10.12677/aam.2024.135203

Keywords

Star Graph, Cayley Graph, R^1-Restricted Cut, R^1-Connectivity

1. 引言

设 G 是一个简单连通图且 $S\subseteq V(G)$，若 $G-S$ 不连通，则 S 是 G 的点割；G 中含点数最少的点割称为 G 的最小点割，G 的最小点割的基数用 $\kappa(G)$ 表示，称为 G 的连通度[1]。但是，一个点的所有邻点很少同时发生故障，于是，Harary [2]引入了条件连通度，之后，Esfahanian [3]又提出了 R^k-连通度的概念。设 G 是一个简单连通图且 $S\subseteq V(G)$。若对 $V(G)-S$ 中的任意一个点 u，其在 $G-S$ 中至少有 k 个邻点，则 S 称为 G 的 R^k-点集；若对 G 的一个 R^k-点集 S，$G-S$ 不连通，则称 S 是 G 的 R^k-点割；G 中含点数最少的 R^k-点割称为 G 的最小 R^k-点割；G 中最小的 R^k-点割的基数 $\kappa^k(G)$ 称为 G 的 R^k-连通度。

基于图最小的 R^k-点割的刻画，文献[4]提出了超 R^k 连通的概念。若对于 G 中每一个最小 R^k-点割 S，$G-S$ 都包含一个同构于某一确定图 H 的分支，其中 H 与图 G 和整数 k 有关，则称图 G 是超 R^k 连通的。换言之，若 G 超 R^k-连通，则 G 中每一个最小 R^k-点割 S 都是某一确定图 H 在 G 中的邻点所构成的集合。

包含 n 个元 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的全体置换构成的群叫做 n 次对称群，表示为 $Sym(n)$。令 Γ 为 $Sym(n)$ 中一些对换所构成的集合，称 $G(\Gamma)$ 为 $Cay(Sym(n),\Gamma)$ 的对换生成图，其点集为 $\{1,2,\cdots,n\}$，i 与 j 在 $G(\Gamma)$ 中相邻当且仅当对换 $(ij)\in\Gamma$。若 $G(\Gamma)$ 为一颗星，则其生成的 Cayley 图 $Cay(Sym(n),\Gamma)$ 记作 S_n，亦即：$S_n=Cay(Sym(n),\Gamma)=Cay(Sym(n),\{(12),(13),\cdots,(1n)\})$。

一些具有优良性质的 Cayley 图的限制性点连通度吸引了学者们的关注[5] [6] [7] [8] [9]。本文将研究并刻画了星图的全部基数最小的 R^1-限制性点割，并证明了星图是超 R^1 连通的。

2. 引理

为了证明主要结果，我们介绍以下引理：

引理 2.1 [10]令 $G(\Gamma)$ 是凯莱图 $G=Cay(Sym(n),\Gamma)$ 的对换生成图，其中 $n\geq 3$ 且 $|E(G(\Gamma))|=m$。设 $S\subseteq V(G)$，则以下结论成立：

1) 图 G 不含有子图 $K_{2,4}$；
2) 如果 $G(\Gamma)$ 不含有三角形，则图 G 不含有子图 $K_{2,3}$；
3) $G(\Gamma)\kappa(G)=m$；
4) G 是 m-正则的二部图。

定理2.2 [10]设G是由具有m条边n个顶点的生成图A生成的Cayley图，其中 $m\geq 7$。假设T是G中的一个点集，满足如果A没有三角形， 则 $|T|\leq m+2$；如果A具有三角形，则 $|T|\leq 2m-3$。以下之一成立：

1) $G-T$ 连通。
2) $G-T$ 不连通，且其恰有两个分支，其中之一为孤立点。
3) 生成图A没有三角形，$G-T$ 不连通，且其恰有两个分支，其中之一为 K_2，且 $|T|\leq 2m-2$。
4) 生成图A没有三角形，$G-T$ 不连通，且其恰有三个分支，其中有两个为孤立点，且 $|T|\leq 2m-2$。

5) 生成图A有三角形，$G-T$ 不连通，且其恰有三个分支，其中有两个为孤立点，且$|T|\le 2m-3$。

由于的对换生成图是一颗星，星中不含有三角形。于是，我们有以下推论：

推论2.3 设$n>5$，假设F是S_n的一个点集，且满足$|F|\le 2(n-1)-2$，那么以下之一成立：

1) $G-T$ 连通。

2) $G-T$ 不连通，且其恰有两个分支，其中之一为孤立点。

3) $G-T$ 不连通，且其恰有两个分支，其中之一为K_2，且$|F|=2(n-1)-2$。

4) $G-T$ 不连通，且其恰有三个分支，其中有两个为孤立点，且$|F|=2(n-1)-2$。

推论 2.4 S_n 中没有子图 $K_{2,3}$ 和 $K_{2,4}$。

S_n 中的两个点 u 和 v 相邻当且仅当在 S 中存在$(1i)$使得$v=u(1i)$。也就是$u=(p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_n)$，则$v=(p_i,\cdots,p_1,\cdots,p_n)$，反之亦然。记 S_{n-1}^i 是 S_n 的 $(n-1)$-维子星 $(i\in\{2,\cdots,n\})$，它是由点集$\{(p_1,p_2,\cdots,p_{n-1},i)|(p_1,\cdots,p_{n-1})$是$\{1,\cdots,n\}\setminus\{i\}$的所有置换$\}$所导出的子图。显然$S_{n-1}^i$是一个$(n-1)$-维子星，$V(S_{n-1}^i)$是最后一个位置固定为$i$，前$(n-1)$个位置是$\{1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n\}$这$(n-1)$个数的所有排列。由上面的讨论可知：$S$ 可以分解成 n 个$(n-1)$-维子星 S_{n-1}，它们分别是$S_{n-1}^1,S_{n-1}^2,S_{n-1}^3,\cdots,S_{n-1}^n$。对于$u\in V(S_{n-1}^i)$，$N(u)\cap V(S_{n-1}^i)=\{(12)u,\cdots,(1n-1)u\}$，而有唯一的邻点$u'=(1n)u$ 落在$V(S_n-S_{n-1}^i)$内，把这样的邻点称为 u 的外邻点。令$[i,j]=\{t:i\le t\le j\}$，其中$i<j$。$S[i,j]$表示点集$\{u:u\in V(S_{n-1}^t),t\in[i,j]\}$在 S_n 中的导出子图。容易验证，对于任意的$i\in[2,n]$，S_{n-1}^i的任意一点 u 均在$S_n-S_{n-1}^i$中有唯一邻点$u'=(1n)u$，即为 u 的外邻点。

引理 2.5 [11] $N(S_{n-1}^j)(j=1,\cdots,n)$是一个基数为$(n-1)!$的独立集，并且

$\left|N(S_{n-1}^j)\cap N(S_{n-1}^k)\right|=(n-2)!(k\ne j)$。

设$N_{S_n}^{out}(u)$（简记为$N^{out}(u)=N_{S_n}(u)\setminus N_{S_{n-1}^i}(u)$）中$u\in V(S_{n-1}^i)$，即$N_{S_n}^{out}(u)$为$u$ 在 S_n 中但不在 S_{n-1}^i 中的邻点。则对任意的点集$M\subseteq V(S_{n-1}^i)$，令$N_{S_n}^{out}(M)$（另标记为$N^{out}(M)=\{N_{S_n}^{out}(u)|u\in M\}$），于是可证明以下的引理成立。

引理 2.6 设$F\subseteq V(S_n)$，对任意的$p\in[i,l]$，记$F_p=F\cap V(S_{n-1}^p)$，如果以下条件同时成立：

1) 对任意的$t\in[j,j-1]$，令H_t是$S_{n-1}^t-F_t$的一个分支，且H_t与$S[j,l]-F$间存在边相连；

2) 对任意的$q\in[j,l]$，$S_{n-1}^q-F_q$均是连通的；

3) 对任意的$s\in[j,l-1]$，$S_{n-1}^s-F_s$与$S_{n-1}^{s+1}-F_{s+1}$之间存在边相连；

则点集$\{\cup_{t=i}^{j-1}V(H_t)\}\cup V(S[j,l]-F)$在 S_n 中的导出子图是连通的.

3. 主要结论的证明

定理 3.1 [12] $\kappa(S_n)=n-1$且S_n是超连通的。

定理 3.2 [13] $\kappa^1(S_n)=2n-4$。

引理 3.3 S_4是超 R^1 连通的。

证明：设 F 是 S_4 的一个最小 R^1-点割。由定理 3.2，可知$|F|=4$。对任意的$i\in[1,4]$，记$F_i=F\cap V(S_3^i)$。

断言： $0\le|J|\le 2$，其中$J=\{i|S_3^i-F_i$ 是不连通的$\}$。

情形 1： $|J|=0$。

对任意的$i\in[1,n]$，$S_n^i-F_i$都是连通的。如果对任意$i\in[1,3]$存在一条连接$S_{n-1}^i-F_i$与$S_{n-1}^{i+1}-F_{i+1}$的边，由引理 2.6，可知$S_n-F=S[1,n]-F$是连通的。所以不妨假设没有连接$S_3^1-F_1$与$S_3^2-F_2$的边。因此

$|F_1|+|F_2|\geq 2$。不妨假设$|F_1|\geq|F_2|$，从而$|F_1|\geq 1$，$|F_2|\leq 2$，$|F_3\cup F_4|\leq 2$。由引理 2.6，可知$S[2,4]-F$是连通的。因为S_4-F不连通且不含有孤立点，所以S_4-F的某个非孤立点分支 H 的顶点集包含在$V(S_3^1)-F_1$。显然，$2\leq|V(H)|\leq|V(S_3^1)-F_1|\leq 5$。如果$|V(H)|=2$，那么 H 是一条边且$F=N(H)$。如果$|V(H)|=3$，那么$1\leq|F_1|\leq 3$。由引理 2.5，可知存在一条连接$S_3^1-F_1$与$S_3^3-F_3$或者$S_3^4-F_4$的边。注意到$S[2,4]-F$是连通的，所以$S_4-F=S[1,4]-F$是连通的，与 F 是 S_4 的点割相互矛盾。如果$|V(H)|=4$，那么$1\leq|F_1|\leq 2$。由引理 2.5，可知存在一条连接$S_3^1-F_1$与$S_3^3-F_3$或者$S_3^4-F_4$的边。注意到$S[2,4]-F$是连通的，所以$S_4-F=S[1,4]-F$是连通的，与F是S_4的点割相互矛盾。如果$|V(H)|=5$，那么$|F_1|=1$，$|F_2|=1$。$|F_1|+|F_3\cup F_4|=3$可知存在一条连接$S_3^1-F_1$与$S_3^3-F_3$或者$S_3^4-F_4$的边。注意到$S[2,4]-F$是连通的，所以$S_4-F=S[1,4]-F$是连通的，与F是S_4的点割相互矛盾。

情形 2： $|J|=1$。

不妨设$S_3^1-F_1$不连通，即$|F_1|\geq 2$。不妨假设$|F_2|\geq|F_3|\geq|F_4|$。因为$|F|=4$，所以$|F_2|\leq 2$。

情形 2.1： $|F_1|=2$。

由引理 2.6，可知$S[2,4]-F$是连通的。因为S_4-F不连通且不含有孤立点，所以S_4-F的某个非孤立点分支H的顶点集包含在$V(S_3^1)-F_1$。因为$|V(H)|\geq 2$，$|F_1|=2$且$S_3^1-F_1$不连通，由推论 2.3，可知$S_3^1-F_1$恰有两个分支，其中之一为孤立点或者其恰有两个分支，其中之一为K_2，或者其恰有三个分支，其中有两个为孤立点。于是$S_3^1-F_1$可能的分支情况为：$\{u_1\},H_1$或者K_2,H_1。考虑$S_3^1-F_1$分支情况为：$\{u_1\}$，H_1。因为S_4-F不连通且不含有孤立点，所以存在一条连接$\{u_1\}$和$S[2,4]-F$的边。由引理 2.5，可知存在一条连接H_1和$S[2,4]-F$的边。又$S[2,4]-F$是连通的，由引理 2.6，可知$S_4-F=S[1,4]-F$是连通的，与F是S_4的点割相互矛盾。考虑$S_3^1-F_1$分支情况为：K_2，H_1。由引理 2.5，可知存在一条连接H_1和$S[2,4]-F$的边。设$K_2=(x_1,y_1)$。设x_1,y_1在$S_4-S_3^1$的邻点为$x_i,y_j,i\neq j$。若$x_i\notin F$或者$y_j\notin F$，则存在一条连接K_2和$S[2,4]-F$的边。由引理 2.6，可知S_4-F是连通的，与F是S_4的点割相互矛盾。若$x_i\in F$且$y_j\in F$，则$F=N(\{x_1,y_1\})$。

情形 2.2： $3\leq|F_1|\leq 4$。

此时，$|F_2|=1$。由引理 2.6，可知$S[2,4]-F$是连通的。因为S_4-F不含有孤立点，由引理 2.5，可知$S_3^1-F_1$的所有分支均存在一条边与$S[2,4]-F$相连。由引理 2.6，可知$S_4-F=S[1,4]-F$是连通的，与F是S_4的点割相互矛盾。

情形 3： $|J|=2$。

不妨设$S_3^1-F_1$和$S_3^2-F_2$不连通。显然$|F_1|=|F_2|=2$，$|F_3|=|F_4|=0$。由推论 2.3，可知$S_3^1-F_1$和$S_3^2-F_2$均含有一个孤立点和一条边，记为u_1,K_2和x_2,K_2'。

情形 3.1： u_1和x_2相邻。

若$F=N(\{u_1,x_2\})$，则(u_1,x_2)与为K_2,K_2'和以及$S[3,4]-F$没有边相连，则S_4-F不连通。

情形 3.2： u_1和x_2不相邻。

由引理 2.6，可知$S[3,4]-F$是连通的。因为S_4-F不连通且不含有孤立点，所以则u_1,x_2与$S[3,4]-F$间存在边相连S_4-F。由引理 2.5，可知K_2,K_2'和$S[3,4]-F$间存在边相连。由引理 2.6，可知$S_4-F=S[1,4]-F$是连通的，与F是S_4的点割相互矛盾。□

定理 3.4 设$n\geq 4$，则S_n是超R^1连通的。

证明：根据引理 3.3，只需考虑$n\geq 5$时的情形。设 F 是 S_n 的一个最小 R^1-点割。由定理 3.2，可知$|F|=2n-4$。对任意的$i\in[1,n]$，记$F_i=F\cap V(S_{n-1}^i)$。我们将证明$F=N(\{u,v\})$，其中u和v是S_n中一条边的两个端点。

断言： $0\leq|J|\leq 2$，其中$J=\{i\,|\,S_{n-1}^i-F_i$ 是不连通的$\}$。

当$|J|\geq 3$时，由定理3.2，可知$2n-4\geq 3(n-2)$，矛盾。所以$|J|\leq 2$。

情形 1： $|J|=0$。

对任意的$i\in[1,n]$，$S_n^i-F_i$都是连通的。如果对任意$i\in[1,n]$存在一条连接$S_{n-1}^i-F_i$与$S_{n-1}^{i+1}-F_{i+1}$的边，由引理 2.6，可知$S_n-F=S[1,n]-F$是连通的。所以不妨假设没有连接$S_{n-1}^1-F_1$与$S_{n-1}^2-F_2$的边。因此$|F_1|+|F_2|\geq(n-2)!\geq 3(n-3)$。

情形 1.1： $n\geq 6$。

$|F_1|+|F_2|\geq(n-2)!\geq 3(n-3)>2n-4$，则$S[2,n]-F$是连通的。由引理 2.5，可知存在一条连接$S_{n-1}^1-F_1$与$S[2,n]-F$的边，由引理 2.6，可知$S_n-F=S[1,n]-F$是连通的。

情形 1.2： $n=5$。

$|F_1|+|F_2|\geq(n-2)!=6$。根据定理3.2，可知$|F|=6$。从而$|F_1|+|F_2|=6$。不妨假设$|F_1|\geq|F_2|$，从而$|F_1|\geq 3$，$|F_2|\leq 3$，$|F_3\cup F_4\cup F_5|=0$。

根据引理 2.6，可知$S_5-F=S[2,5]-F$是连通的。又$3\leq|F_1|\leq 6$，所以$18\leq\left|V\left(S_{n-1}^1-F_1\right)\right|\leq 21$，根据引理 2.5，可知存在一条连接$S_4^1-F_1$与$S[2,5]-F$的边，由引理 2.6，可知$S_5-F=S[1,5]-F$是连通的。

情形 2： $|J|=1$。

不妨设$S_{n-1}^1-F_1$不连通。

情形 2.1： $S_{n-1}^1-F_1$不含有孤立点。

F_1是S_{n-1}^1的一个限制性点割，则$2(n-1)-4=2n-6\leq|F_1|\leq 2n-4$。以下用数学归纳法证明$S_n\,(n\geq 5)$是超连通的。$n=4$时，由引理 3.3，可知由$S_4$是超连通的。假设$n\geq 5$时，$S_{n-1}$是超连通的。考虑以下情况。

情形 2.1.1： $|F_1|=2n-6$。

因为S_{n-1}是超连通的，F_1为其限制性R^1-点割，且$|F_1|=2n-6$，则$F=N(\{u,v\})$，其中$u\sim v$。于是不妨设S_{n-1}^1的某个最小的限制性R^1-点割由顶点为u,v的一条边的所有邻点所构成，则$S_{n-1}^1-F_1$不连通且$F_1=N_1(\{u,v\})$，所以(u,v)与H_1恰是$S_{n-1}^1-F_1$的所有分支。又$|J|=1$，则$S_{n-1}^t-F_t, t\in[2,n]$均连通。$\sum_{i=2}^n|F_i|=2$，所以$S_{n-1}^i-F_i$与$S_{n-1}^j-F_j\,(i,j\in\{2,3,\cdots,n\})$之间均有边相连，由引理 2.6，可知$S[2,n]-F$连通。$V(H_1)=(n-1)!-(2n-6)-2\geq 4(n-2)-2n+4=2n-4\geq 6>2$。所以存在一条连接$H_1$和$S[2,n]-F$的一条边。设$u,v$在$S_n-S_{n-1}^1$的邻点分别为$u_i,v_j, i\neq j$且$i,j\in\{2,3,\cdots,n\}$。若$u_i$或者$v_j$属于$S[2,n]-F$，则$(u,v)$与$S[2,n]-F$之间有边相连，由引理 2.6，可知$S_n-F=S[1,n]-F$是连通的，这$F$为$S_n$点割矛盾，故若$u_i\in F$且$v_j\in F$。此时点集$V(H_1)\cup V(S[2,n]-F)$在$S_n-F$的导出子图连通，又$S_n-F$不连通且不含有孤立点，则$(u,v)$为$S_n-F$的一个非孤立点分支，即$F=N(\{u,v\})$。

情形 2.1.2： $|F_1|=2n-5$。

$\sum_{i=2}^n|F_i|=1$，由引理 2.6，可知得$S[2,n]-F$连通。令$F_1'=F_1\setminus\{x\}$，则$|F_1'|=2n-6$。

如果$S_{n-1}^1-F_1'$不连通。由推论 2.3，可知$S_{n-1}^1-F_1'$恰有两个分支，其中之一为K_2。于是$S_{n-1}^1-F_1'$的分支情况为：K_2,H_1。此时$K_2=(u,v)$，$F_1'=N_1(\{u,v\})$。若$x\in K_2$。$S_{n-1}^1-F_1$的分支情况为：v,H_1。S_n-F不连通且不含有孤立点，所以v与$S[2,n]-F$之间有边相连。$V(H_1)=(n-1)!-(2n-5)-1\geq 2n-4\geq 6$，从而存在一条连接$H_1$与$S[2,n]-F$的边。由引理 2.6，可知$S_n-F=S[1,n]-F$是连通的，这$F$为$S_n$点割矛盾。若$x\in H_1$。设$u,v$在$S_n-S_{n-1}^1$的邻点分别为$u_i,v_j, i\neq j$且$i,j\in\{2,3,\cdots,n\}$，从而$u_i$或者$v_j$不属于$S[2,n]-F$，即$(u,v)$与$S[2,n]-F$之间有边相连。$|F_1|=2n-5$，$S_{n-1}^1$是$(n-2)$-正则的，所以$S_{n-1}^1-F_1$最多有一个孤立点。$V(H_1)=(n-1)!-(2n-6)-2\geq 2n-4\geq 6$，从而$H_1-x$的所有分支均与$S[2,n]-F$之间有边相连。由引理 2.6，可知$S_n-F=S[1,n]-F$是连通的，这$F$为$S_n$点割矛盾。

如果 $S_{n-1}^1-F_1'$ 连通。于是 $S_{n-1}^1-F_1'$ 的分支情况为：H_1。显然，$x\in H_1$。$|F_1|=2n-5$，S_{n-1}^1 是 $(n-2)$-正则的，所以 $S_{n-1}^1-F_1$ 最多有一个孤立点。如果 $S_{n-1}^1-F_1$ 有一个孤立点，设为 t。S_n-F 不连通且不含有孤立点，所以 x 与 $S[2,n]-F$ 之间有边相连。$S_{n-1}^1-F_1$ 除去 t 之外的所有分支的包含的点数是大于等于 2 的，又 $\sum_{i=2}^n|F_i|=1$，由引理 2.5，可知这些分支均与 $S[2,n]-F$ 之间有边相连。由引理 2.6，可知 $S_n-F=S[1,n]-F$ 是连通的，这 F 为 S_n 点割矛盾。如果 $S_{n-1}^1-F_1$ 不含有孤立点。此时 $S_{n-1}^1-F_1$ 的所有分支的包含的点数是大于等于 2 的，又 $\sum_{i=2}^n|F_i|=1$，由引理 2.5，可知这些分支均与 $S[2,n]-F$ 之间有边相连。由引理 2.6，可知 $S_n-F=S[1,n]-F$ 是连通的，这 F 为 S_n 点割矛盾。

情形 2.1.3： $|F_1|=2n-4$。

$\sum_{i=2}^n|F_i|=0$，由引理 2.6，可知 $S[2,n]-F$ 连通。$(n-2)!\ge 6>0$，由引理 2.5，可知 $S_{n-1}^1-F_1$ 的所有分支均与 $S[2,n]-F$ 之间有边相连。由引理 2.6，可知 $S_n-F=S[1,n]-F$ 是连通的，这 F 为 S_n 点割矛盾。

情形 2.2： $S_{n-1}^1-F_1$ 含有孤立点。

由定理 3.1，可知 $\kappa(S_{n-1})=n-2$，从而 $n-2\le|F_1|\le 2n-4$。考虑以下情况。

情形 2.2.1： $|F_1|=n-2$。

$\sum_{i=2}^n|F_i|=(2n-4)-(n-2)=n-2$。$(n-2)!>n-2$，由引理 2。6，可知 $S[2,n]-F$ 连通。由推论 2。3，可知 $S_{n-1}^1-F_1$ 恰有两个分支，其中之一为孤立点，设为 x。S_n-F 不连通且不含有孤立点，所以 x 与 $S[2,n]-F$ 之间有边相连。由引理 2.6，可知 $S_n-F=S[1,n]-F$ 是连通的，这 F 为 S_n 点割矛盾。

情形 2.2.2： $n-1\le|F_1|\le 2n-4$。

$0\le\sum_{i=2}^n|F_i|\le n-3$。$(n-2)!-(n-3)>3(n-3)-(n-3)=2(n-3)\ge 4$。由引理 2.6，可知 $S[2,n]-F$ 连通。$n-1\le|F_1|\le 2n-4$，S_{n-1}^1 是 $(n-2)$-正则的，所以 $S_{n-1}^1-F_1$ 最多有两个孤立点。由推论 2.3，可知 $S_{n-1}^1-F_1$ 恰有两个分支，其中之一为孤立点，设为 x。于是 $S_{n-1}^1-F_1$ 的分支情况为：x,H_1。S_n-F 不连通且不含有孤立点，所以 x 与 $S[2,n]-F$ 之间有边相连。$V(H_1)-(n-3)-1\ge(n-1)!-(n-1)-(n-3)-1$，当 $n\ge 5$ 时，$V(H_1)-(n-3)-1\ge 6n-13\ge 17$。所以存在一条连接 H_1 和 $S[2,n]-F$ 的边。由引理 2.6，可知 $S_n-F=S[1,n]-F$ 是连通的，这 F 为 S_n 点割矛盾。

情形 3： $|J|=2$。

不妨假设 $S_{n-1}^1-F_1$ 和 $S_{n-1}^2-F_2$ 不连通。又 $|F|=2n-4$，由定理 3.1，可知 $|F_1|=|F_2|=n-2$，$\sum_{i=2}^n|F_i|=0$。由引理 2.6，可知 $S[2,n]-F$ 连通。由推论 2.3，可知 $S_{n-1}^1-F_1$ 恰有两个分支，其中之一为孤立点，设为 u,v。于是 $S_{n-1}^1-F_1$ 和 $S_{n-1}^2-F_2$ 的分支情况为：u,H_1 和 v,H_2。考虑以下情形。

情形 3.1： u 和 v 相邻。

此时 $F=N(\{u,v\})$，则 (u,v) 与为 H_1,H_2 和以及 $S[2,n]-F$ 没有边相连，则 S_n-F 不连通且不含有孤立点，(u,v) 为 S_n-F 的一个非孤立点分支，即 $F=N(\{u,v\})$。

情形 3.2： u 和 v 不相邻。

S_n-F 不连通且不含有孤立点，所以 u,v 与 $S[2,n]-F$ 之间均有边相连。由引理 2.5，可知 H_1 和 H_2 中的某些点在 $S_n-(S_{n-1}^1\cup S_{n-1}^2)$ 中存在外邻点，即 H_1 和 H_2 与 $S[2,n]-F$ 之间均有边相连。由引理 2.6，可知 $S_n-F=S[1,n]-F$ 是连通的，与 F 是 S_n 的点割相互矛盾。□

4. 结语

如今，随着科学技术的发展，一些具有良好性质的互联网络吸引了人们的关注。本文对星图的全部基数最小的 R^1-限制性点割进行了研究。证明了当 $n\ge 4$ 时，星图 S_n 是超 R^1 连通的。这一结论将为对星图的容错性做出更加合理的评估。

致　谢

本篇论文是在胡老师的耐心指导中下完成的。正是胡老师悉心指导和专业知识使我能够顺利完成这篇论文。此外，我要感谢我的家人和同学们，是你们的支持和帮助让我能够坚持到最后。

参考文献

[1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2008) Graph Theory. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-84628-970-5

[2] Harary, F. (1983) Conditional Connectivity. *Networks*, **13**, 347-357. https://doi.org/10.1002/net.3230130303

[3] Esfahanian, A.H. (1989) Generalized Measures of Fault Tolerance with Application to N-Cube Networks. *IEEE Transactions on Computers*, **38**, 1586-1591. https://doi.org/10.1109/12.42131

[4] Hu, X.M., Tian, Y.Z. and Meng, J.X. ((2018)) Super R^k-Vertex-Connectedness. *Applied Mathematics and Computation*, **339**, 812-819. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.07.012

[5] Wang, G.L., Shi, H.Z., Hou, F.F. and Bai, Y.L. (2015) Some Conditional Vertex Connectivities of Complete-Trasposition Graphs. *Information Sciences*, **295**, 536-543. https://doi.org/10.1016/j.ins.2014.10.032

[6] Yang, W.H., Li, H.Z. and Meng, J.X. (2010) Conditional Connectivity of Cayley Graphs Generated by Transposition Trees. *Information Processing Letters*, **110**, 1027-1030. https://doi.org/10.1016/j.ipl.2010.09.001

[7] Yang, W.H. (2018) A King of Conditional Connectivity of Cayley Graphs Generated by K-Trees. *Discrete Applied Mathematics*, **237**, 132-138. https://doi.org/10.1016/j.dam.2017.11.025

[8] Yu, X.M. and Huang, X.H. (2013) A King of Conditional Connectivity of Cayley Graphs Generated by Unicyclic Graphs. *Information Sciences*, **243**, 86-94. https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.04.011

[9] Tu, J.H., Zhou, Y.K. and Su, G.F. (2017) A Kind of Conditional Connectivity of Cayley Graphs Generated by Wheel Graphs. *Applied Mathematics and Computation*, **301**, 177-186. https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.12.015

[10] Cheng, E. and Lipták, L. (2007) Fault Resiliency of Cayley Graphs Generated by Transpositions. *International Journal of Foundations of Computer Science*, **5**, 1005-1022. https://doi.org/10.1142/S0129054107005108

[11] Wan, M. and Zhang, Z. (2009) A Kind of Conditional Vertex Connectivity of Star Graphs. *Applied Mathematics Letters*, **22**, 264-267. https://doi.org/10.1016/j.aml.2008.03.021

[12] Cheng, E., Lipman, M.J. and Park, H. (2001) Super Connectivity of Star Graphs, Alternating Group Graphs and Split-Stars. *ARS Combinatoria*, **59**, 107-116.

[13] Hu, S.C. and Yang, C.B. (1997) Fault Tolerance on Star Graphs. *International Journal of Foundations of Computer Science*, **8**, 127-142. https://doi.org/10.1142/S0129054197000112