

高中生平面向量学习的认知诊断研究

张雨晴, 王泓娜*

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2024年3月16日; 录用日期: 2024年5月7日; 发布日期: 2024年5月20日

摘要

随着数学教育的深入发展, 平面向量作为高中数学的重要组成部分, 对学生数学素养和问题解决能力的培养具有重要意义。然而, 由于平面向量的抽象性和复杂性, 学生在学习中往往存在认知障碍。因此, 文章基于G-DINA认知诊断模型, 对高中生平面向量学习进行了深入研究。通过设计并实施测试, 全面评估了学生的认知结构和掌握程度, 并基于诊断结果绘制了学习路径图, 为教师提供了针对性的教学调整建议, 对个体学生进行了教学补救。这不仅有助于教师更好地满足学生的学习需求, 也为优化平面向量教学内容和方法提供了实证支持。通过推动高中生平面向量教学的改进, 期望能够进一步提升学生的学习效果。

关键词

认知诊断, G-DINA模型, 平面向量

Cognitive Diagnosis of Plane Vector Learning for High School Students

Yuqing Zhang, Hongna Wang*

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Mar. 16th, 2024; accepted: May 7th, 2024; published: May 20th, 2024

Abstract

With the further development of mathematics education, plane vector, as an important part of high school mathematics, is of great significance to the cultivation of students' mathematical literacy and problem-solving ability. However, due to the abstractness and complexity of plane vec-

*通讯作者。

tors, students often have cognitive difficulties in learning. Therefore, based on G-DINA cognitive diagnosis model, this paper makes an in-depth study of planar vector learning for high school students. Through the design and implementation of the test, the cognitive structure and mastery of students were comprehensively assessed, and the learning path map was drawn based on the diagnosis results, which provided targeted teaching adjustment suggestions for teachers and teaching remediation for individual students. This not only helps teachers to better meet students' learning needs, but also provides empirical support for optimizing the content and methods of planar vector teaching. By promoting the improvement of planar vector teaching for senior high school students, it is expected to further enhance the learning effect of students.

Keywords

Cognitive Diagnosis, G-DINA Model, Plane Vector

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



1. 引言

传统教学中对学生的评价一般来源于测验,但是单从一个分数评价学生在学科知识上的掌握信息太过笼统,教师对于学生的数学认知结构也很难洞悉。近些年,认知诊断理论被引入到教育评价中,其价值在于通过对学生在测验题目上的作答情况进行分析,推测学生在知识、技能上的掌握情况,帮助教师了解学生在认知结构上存在的具体问题,施行精准补救。

平面向量在高中数学中占据着重要的地位,其丰富的内涵和广泛的应用使其成为数学学习和理解的关键部分。它不仅在代数和几何中有广泛的应用,而且也是连接这两个领域的桥梁。平面向量的学习有助于提高学生的思维水平,有助于培养运算能力和几何直观等核心素养。

研究将认知诊断中的 G-DINA 模型应用于高中生平面向量内容的学习评价,构建诊断测验项目,对学生的学习表现进行诊断评估,旨在为该方法在教学实践中的应用提供一些借鉴。

2. 高中生平面向量的认知诊断研究

2.1. 构建认知模型

在认知诊断模型的建模中,用“认知属性”来描述测量任务中被测的认知过程或认知技能,并作为诊断评估单元,它可以是认知过程中所涉及的知识或技能,是对被测心理内部加工过程的诊断基础。如果确定了用于构建认知诊断测试的内容域,则逻辑任务分析可以指定认知属性。

平面向量的有关内容在《普通高中数学课程标准:2017年版 2020年修订》中被划分在主题三一几何与代数中,通过对教材、课程标准和相关文献的分析,征询专家意见,经过细致的研讨,从平面向量内容中分析出认知属性为:平面向量的基本概念 A1;平面向量的加减运算 A2;平面向量的数乘运算和线性运算 A3;平面向量基本定理及其坐标表示 A4;平面向量数量积 A5;平面向量坐标运算 A6;平面向量的综合运用 A7 [1]。

根据已确定的 7 个认知属性之间的内在逻辑,结合高中生数学学习的认知过程,综合各专家意见,得到平面向量属性层级关系如图 1。

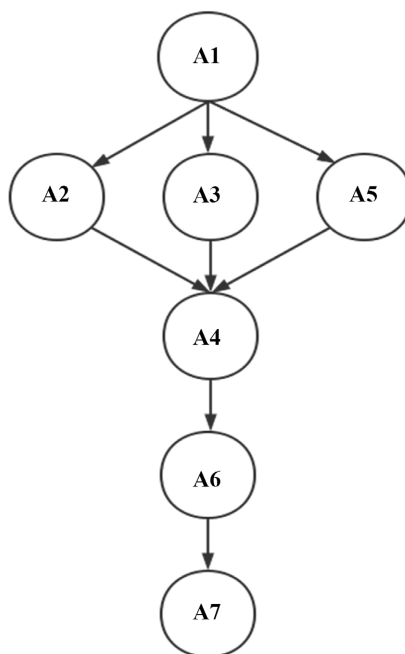


Figure 1. Hierarchical relationship of cognitive attributes

图 1. 认知属性层级关系

属性掌握模式反应了被测试学生对认知属性的掌握情况, 假设提取的属性是 K 个, 则属性掌握模式为由 K 个 0~1 元素构成的数列。如果被测试的学生对该认知属性已经掌握, 则在属性掌握模式用“1”表示, 反之就用“0”来表示。对于上述 7 个认知属性, 共有 2^7 也就是 128 种属性掌握模式。

认知属性的个数决定了属性掌握模式的个数, 并没有考虑层级关系。若根据认知属性的层级关系来分析, 在该属性掌握模式中有些掌握模式是不可能存在的, 比如一个被测试的学生没有掌握认知属性 A1 (平面向量的概念), 却能够掌握认知属性 A2、A3、A4、A5、A6 和 A7, 很显然这是不可能的, 于是从属性掌握模式中将不满足平面向量层级关系的模式全部去掉, 再排除(0000000)这个没有掌握任何属性的模式, 得到平面向量的典型项目考核模式, 如表 1 所示。

Table 1. Typical project assessment mode

表 1. 典型项目考核模式

序号	属性模式
1	1000000
2	1100000
3	1101000
4	1101010
5	1101011
6	1010000
7	1010100
8	1011010
9	1011011

续表

10	1000100
11	1001100
12	1001110
13	1001111
14	1110100
15	1111100
16	1111110
17	1111111

2.2. 认知诊断测验的构建

Q 矩阵主要用于指导认知诊断检测项目, 它是一个描述每一个认知诊断检测项目对应关系的矩阵, 通过 Q 矩阵的建立能够确定测验卷中的每一道题所对应的认知属性, 从而能够编制需要考核的认知属性与项目模式。根据典型项目考核模式从教材、教辅材料和最近十年的辽宁省高考题中选取和平面向量内容相关的题目并进行改编, 并与经验丰富的一线教师商讨, 共编制了 33 道测验题, 得到了对应的 Q 矩阵如表 2 所示。

Table 2. Q-Matrix
表 2. Q 矩阵

题目	属性						
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0
4	1	1	0	0	0	0	0
5	1	1	0	0	0	0	0
6	1	1	0	0	0	0	0
7	1	0	1	0	0	0	0
8	1	0	1	0	0	0	0
9	1	0	1	0	0	0	0
10	1	0	0	0	1	0	0
11	1	0	0	0	1	0	0
12	1	0	0	0	1	0	0
13	1	1	0	1	0	0	0
14	1	1	0	1	0	0	0
15	1	1	0	1	0	0	0
16	1	0	1	1	0	0	0
17	1	0	1	1	0	0	0

续表

18	1	0	1	1	0	0	0
19	1	0	0	1	1	0	0
20	1	0	0	1	1	0	0
21	1	0	0	1	1	0	0
22	1	0	0	1	1	1	0
23	1	0	0	1	1	1	0
24	1	0	0	1	1	1	0
25	1	1	0	1	0	1	0
26	1	1	0	1	0	1	0
27	1	1	0	1	0	1	0
28	1	0	1	1	0	1	0
29	1	0	1	1	0	1	0
30	1	0	1	1	0	1	0
31	1	0	0	1	1	1	1
32	1	1	0	1	1	1	1
33	1	0	1	1	0	1	1

2.3. 认知诊断测验的质量检验

2.3.1. 被试说明

为了对测试卷的质量进行检验, 在大连市 W 中学高二年级的两个平行班进行了预测试。两个班级同时测试, 全程由笔者和班主任老师进行监考, 保证了本次预测试得到数据具有真实性。被试学生总共 98 名, 规定测试的时间为 55 分钟, 收回有效问卷为 83 份。

2.3.2. 模型选择

认知诊断模型发展至今已有上百种模型, 大致可划分为两类, 一类是简化的认知诊断模型, 另一类是饱和的认知诊断模型, 其区别主要在于对属性作用机制的假设没有严格的要求, 也就是说, 同一模型中属性间可以是非补偿关系, 也可以是部分补偿或完全补偿关系[2]。

G-DINA 是一个常用的饱和认知诊断模型, 该模型认为测验项目答对的几率既被认知属性的主效应影响, 还被认知属性间的交互效应所影响, 所以测验被试对于不同认知属性的掌握都会影响被试的正确作答几率, 被试已经掌握的属性越多, 他在某个题目上答对的可能性越大, 但是掌握与此题不相关的认知属性不会影响此题答对的概率[3]。由于平面向量这一核心概念涉及多个认知属性, 采用 G-DINA 模型进行测量更具有一般性[4]。G-DINA 模型的项目反应函数如下:

$$P(X_{ij} = 1 | \alpha_{ij}^*) = \delta_{j0} + \sum_{k=1}^{K_j^*} \delta_{jk} \alpha_{ik} + \sum_{k=k+1}^{K_j^*} \sum_{k=1}^{K_j^*} \delta_{jkk'} \alpha_{ik} \alpha_{ik'} + \cdots + \delta_{j12 \dots K_j^*} \prod_{k=1}^{K_j^*} \alpha_{ik}$$

其中, X_{ij} 表示属性掌握模式为 α_i 的学生在第 j 个项目上回答是否正确, 取值为 1 或者 0。 K_j^* 表示项目 j 所测量的属性总数, 基于项目 j 所测量属性的缩减属性掌握模式被记为 α_{ij}^* 。 δ_{j0} 表示的是项目 j 的截距, 称为基线概率, 即在没有掌握项目 j 测量所有属性的情况下, 学生答对该项目的概率, 是一个非负值。

2.3.3. 测验质量分析

信度是用来反映测量结果可信性和稳定性的指标。经典测量理论中常用克隆巴赫系数检验测验的一致性,其取值在 0~1 之间,得到的数值越大,说明信度越好。使用 SPSS26.0 版本进行分析得到了克隆巴赫系数为 0.913,由此可以判断设计的预测问卷信度较好,得到的数据能够用于后续研究。

一致性指标 HCI 值是验证认知属性层级关系是否合理的指标,其取值范围为[-1, 1],数值越大说明建立的认知属性层级关系越合理,一般情况下如果 HCI 的平均值能够大于或等于 0.6,则能说明所建立的层级关系是合理的[5]。这里得到的 HCI 的平均值为 0.83,高于 0.6,说明学生的项目反应模式与所建立的理想掌握模式契合程度符合要求。

效度表现的是测量结果与考察内容吻合程度,体现测量工具的有效性。本研究是在认知诊断理论的指导下进行的,所以运用 Q 矩阵理论就能够检验预测测验的效度,又因为测验 Q 矩阵遵循了徐波东等人提出来的 Q 矩阵设计原则,所以说明本次预测测验的效度得到了保证。

运用认知诊断数据分析(flexCDMs)平台分析本次测验题目的区分度,得到的数值在 0.4 到 1 之间就能说明题目的区分度较好。检测结果显示 33 道题目的区分度均在(0.42, 1)区间内,每道题的区分度都大于 0.4,说明题目的区分度检验合格。项目拟合度 RMSEA:RMSEA 的值越接近于 0,说明项目拟合效果越好。具体而言,若 RMSEA 的值小于 0.1,则说明项目拟合效果较好;反之,若 RMSEA 的值大于 0.1,则说明项目拟合较差[2]。经检验,33 个测验题目的 RMSEA 值在[0.003, 0.090]之间,均小于 0.1,这表明全部题目的拟合效果良好。

2.4. 诊断结果分析

2.4.1. 属性掌握概率

在大连市 W 中学高二年级组其他十个班同时进行测验,由每个班级的数学教师或班主任老师进行监考和计时,保证得到成绩的真实,被试的学生为 458 名,收回有效问卷 430 份。运用 G-DINA 模型对学生的作答数据进行分析,得到了学生们这七个认知属性的平均掌握概率: A1 (0.77)、A2 (0.62)、A3 (0.56)、A4 (0.43)、A5 (0.54)、A6 (0.43)和 A7 (0.39)。学生对于 A1 的属性掌握概率最高,说明对于平面向量的概念掌握得最好,对于 A7 的属性掌握概率最低,说明学生对于平面向量内容知识的整合能力比较薄弱,对知识的综合应用能力有待提高。对于属性 A2 的属性掌握概率为 0.62,大于 A3 和 A5,说明对于 A2 的掌握程度优于 A3 和 A5,对于 A4 和 A6 的属性掌握概率均为 0.43,说明平面向量基本定理及坐标表示与坐标运算对于学生来说难度相差不大。

2.4.2. 属性掌握模式

基于 G-DINA 模型对学生的属性掌握模式做了分析和统计得到了学生的属性掌握模式由 20 种如表 3 所示,分别为: APM1 (0000000)、APM2 (1000000)、APM3 (1100000)、APM4 (1010000)、APM5 (1000100)、APM6 (1110000)、APM7 (1100100)、APM8 (0110000)、APM9 (0010100)、APM10 (0101000)、APM11 (0100100)、APM12 (0000110)、APM13 (0011000)、APM14 (1111000)、APM15 (1110100)、APM16 (1111100)、APM17 (1000010)、APM18 (1000001)、APM19 (1111110)和 APM20 (1111111)。其中属性掌握模式为 APM16 (1111100)的学生最多,即能够掌握前五个认知属性的学生占比最大,属性掌握模式为 APM20 (1111111)的学生占比 13.8%,即只有一小部分的学生能够掌握全部认知属性,说明大部分学生对于平面向量内容的学习都存在或多或少的问题。表中 APM (0110000)、AMP9 (0010100)、AMP10 (1000100)、AMP11 (0100100)、AMP12 (0000110)、AMP13 (0011000)、APM17 (1000010)和 APM18 (1000001)这八个属性掌握模式的学生占比较小,他们的卷面平均分为 5 分,较低的分数的会影响其属性掌握模式的识别,答对题目猜测的可能性较大,可以将这些掌握模式的学生看作没有掌握任何认知属性。

Table 3. Statistics of student mastery patterns**表 3.** 属性掌握模式统计

	属性掌握模式	占比(%)
APM1	0000000	1.2
APM2	1000000	3.4
APM3	1100000	6.1
APM4	1010000	0.2
APM5	1000100	0.3
APM6	1110000	7.2
APM7	1100100	7.4
APM8	0110000	0.2
APM9	0010100	0.2
APM10	0101000	0.1
APM11	0100100	0.1
APM12	0000110	0.1
APM13	0011000	0.2
APM14	1111000	3.7
APM15	1110100	15.8
APM16	1111100	21.7
APM17	1000010	0.2
APM18	1000001	0.2
APM19	1111110	17.9
APM20	1111111	13.8

2.4.3. 学习路径分析

根据以上分析能够了解和把握现阶段学生学习平面向量内容的认知水平与认知结构,那么接下来将层级关系和学生的属性掌握模式相结合来设计多元化学习路径。结合属性层级关系进行考虑,从 APM1 (0000000)到 APM2 (1000000)和 APM3 (1100000)的路径为: A1→A2;从 APM2 (1000000)到 APM4 (1010000)的路径为: A1→A3,从 APM2 (1000000)到 APM5 (1000100)的路径为: A1→A5;从 APM2 (1000000)到 APM16 (1111100)的路径为: A1→A2、A3、A5→A4;从 APM2 (1000000)到 APM19 (1111110)的路径为: A1→A2、A3、A5→A4→A6,从 APM2 (1000000)到 APM20 (1111111)的路径为: A1→A2、A3、A5→A4→A6→A7。

2.4.4. 教学补救及效果分析

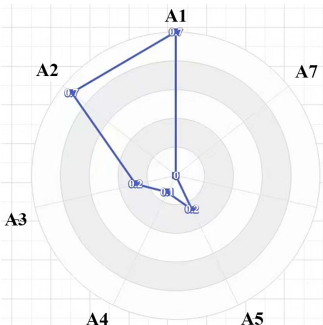
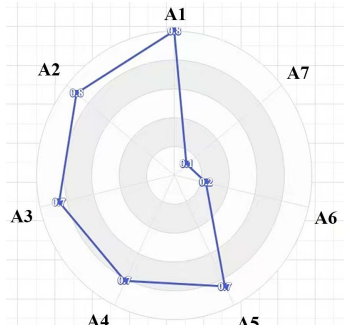
这里选择两个认知结构有缺陷的学生依据学习路径做为期两周的补救教学,之后对其进行测验,验收补救成果。

被试 1 的属性掌握模式为 1100000,只能掌握前两个认知属性,对其进行补救教学的重点为平面向量的运算,核心思想是类比实数的运算来探究向量的运算,因此整体的研究思路与实数的运算一致。首先,让学生明确平面向量运算的几何意义,其次是推导和概括出运算的性质,掌握平面向量运算的运算律,进而灵活地进行平面向量的四则运算,构建出比较完整的运算体系。有了这部分基础,再向学生渗透平面向量基本定理及坐标表示的内容,以让学生理解为目标,为平面向量的坐标运算打下基础。经过补救教学,其学习表现的前后对比如表 4 所示。可见,经过教学补救,学生掌握属性程度增加了 3 个,

但由于补救前只掌握 A1、A2 两个比较基础的属性, 所以短期补救还没有将所有属性掌握。

Table 4. Comparison of Subject 1 before and after remedial teaching

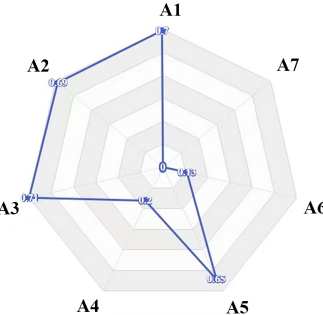
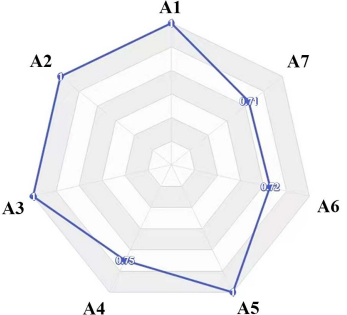
表 4. 被试 1 补救教学前后对比

	补救前	补救后
属性掌握模式	1100000	1111100
已掌握属性	A1、A2	A1、A2、A3、A4、A5
未掌握属性	A3、A4、A5、A6、A7	A6、A7
属性掌握概率雷达图		

被试 2 的属性掌握模式为 1110100, 能够掌握四个认知属性, 具体的补救内容为其他三个认知属性: 首先, 为学生在向量的概念和向量的运算这两条子路径学习的基础上, 进一步从力的分解这一物理情境中认识向量的分解。引导学生把一个向量按给定的两个方向进行分解, 在具体操作的过程中需要逆用平行四边形法则, 目的是让学生认识到每一个向量都可以分解为一组不共线的向量, 这组不共线的向量称为基底, 从而理解平面向量基本定理的含义。通过向量的正交分解建立起向量与实数组之间的对应关系, 让学生类比坐标系中的点与坐标的联系去理解坐标系中的向量与有序数对之间的联系, 得到向量的坐标表示。将向量的运算转化为实数组的运算, 使学生掌握算理, 灵活进行坐标运算。为了掌握属性 A7, 要培养学生应用向量的意识, 使其运用向量表示几何元素, 研究三角形组合元素之间的关系, 推导出正弦定理和余弦定理, 加强综合训练。经经过补救教学, 其学习表现的前后对比如表 5 所示。补救后被试 2 已掌握所有 7 个属性, 从雷达图可见, 属性掌握更均衡。

Table 5. Comparison of Subject 2 before and after remedial teaching

表 5. 被试 2 补救教学前后对比

	补救前	补救后
属性掌握模式	1110100	1111111
已掌握属性	A1、A2、A3、A5	A1、A2、A3、A4、A5、A6、A7
未掌握属性	A4、A6、A7	无
属性掌握概率雷达图		

3. 结语

本研究基于 G-DINA 模型对学生平面向量内容学习情况进行认知诊断, 通过属性掌握概率了解到学生在各个认知属性上的掌握程度, 并依据属性掌握模式构建学生学习路径, 为学生进行了精准的教学补救。认知诊断对学生的评价更具有科学性和可靠性, 为教学的有效性奠定了基础。

基金项目

辽宁省教育科学规划课题(项目编号: JG20DB264), 辽宁师范大学教师教育实践中心专项课题(项目编号: JSJYSJZXKT2023036)。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准: 2017 年版 2020 年修订[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [2] 白胜南. 中学生概率概念学习进阶的构建问题研究[D]: [博士学位论文]. 长春: 东北师范大学, 2021.
- [3] 涂冬波, 蔡艳, 戴海崎, 等. 一种多级评分的认知诊断模型: PDINA 模型的开发[J]. 心理学报, 2010, 42(10): 1011-1020.
- [4] De la Torre, J. and Akbay, L. (2019) Implementation of Cognitive Diagnosis Modeling Using the GDINA R Package. *Eurasian Journal of Educational Research*, **80**, 171-192.
- [5] 姚运国. 数学核心素养视角下提升高中生学习质量的教学研究——以《平面向量及其应用》为例[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 云南师范大学, 2022.