Finance 金融, 2011, 1, 33-37
http://dx.doi.org/10.12677/fin.2011.12006 Published Online July 2011 (http://www.hanspub.org/journal/fin/)

Ruin Probabilities for a Double Type-Insurance Risk Model with Negative Risk Sums*

Wei Zou, Jiehua Xie
Department of Science, Nanchang Institute of Technology, Nanchang
Email: jhxie@nit.edu.cn
Received: Mar. 28th, 2011; revised: May 9th, 2011; accepted: Jun. 14th, 2011.

Abstract: In this paper, we consider a double type-insurance risk model with negative risk sums. Correlation may exist among the two "claims" number process. We derive the integro-differential equation and the explicit expression for the ruin probabilities. We also compare the ruin probabilities of this risk model with classical negative risk sums model and give the numerical illustration. The results obtained generalize the classical negative risk sums model.

Keywords: Correlated Aggregate Claims; Negative Risk Sums; Ruin Probability

具有相关理赔的二元负风险和模型的破产概率*

邹　娓，谢杰华
南昌工程学院理学系，南昌
Email: jhxie@nit.edu.cn
收稿日期：2011 年 3 月 28 日；修回日期：2011 年 5 月 9 日；录用日期：2011 年 6 月 14 日

摘　要：本文研究了一类"理赔"计数过程相关的二元负风险和模型，给出了此模型破产概率所满足的积分－微分方程及其解析表达式，并将此模型的破产概率和经典负风险模型的破产概率进行了比较，对具体实例给出了数值比较结果。本文所得结果推广了经典负风险和模型的相应结果。

关键词：相关；负风险和；破产概率

1. 引言与模型

风险经营的稳定性分析在风险理论中占有重要的地位，而破产理论则直接应用于风险经营稳定性分析，因此破产概率一直是风险理论中十分重要的研究课题。根据理赔方式，保险业的险种主要分为正风险和与负风险和两大类。负风险和模型最典型的应用实例是寿险年金保险和养老保险，在这种风险模型中，保险公司以常值年金率付给被保险人年金，在被保险人死亡(即"理赔"发生)时，保险公司从被保险人那里收到一笔与"期望抚恤金"相当的酬金。设 $(\Omega,\Im,p)$ 为一完备概率空间，以下所遇随机变量均为该空间上的随机变量。经典负风险和模型的盈余过程定义为[1]

$$U(t)=u+ct-\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i=u+ct-S(t), \tag{1.1}$$

其中 u，c 均为常数，$u\ge 0$，$c<0$；u 表示保险公司的初始资金；$-c$ 表示保险公司付给被保险人的年金率；$\{Y_i, i=1,2,\cdots\}$ 为非正独立同分布的随机变量序列，其共同分布记为 F_Y，均为 μ_Y，且 $F_Y(0)=1$；Y_i 表示第 i 次"理赔额"(负值理赔额)；$N(t)$ 是参数为 λ 的齐次 Poisson 过程，它表示在 $(0,\ t]$ 内"理赔额"发生的次数；$U(t)$ 表示在时刻 t 保险公司的盈余。在(1.1)式中，$\{N(t);t\ge 0\}$ 与 $\{Y_i, i=1,2,\cdots\}$ 假定是相互独立的。

近年来，国内外有很多学者研究了具有相依关系的二元风险模型的破产概率问题，如 Ambagaspitiya[2,3]，Partrat[4]，Yuen、Guo 和 Wu[5]，谢和邹[6-10]等。上述工作对于破产概率的研究都集中在正风险和模型，由于风险险种的多样性，对具有相依关系的负风险和模型的研究也同样重要。本文考虑了"理赔"计数过程具有相依关系二元负风险和模型，该模型的盈余过程定义为

*基金项目：江西省教育厅科技项目(GJJ10267)。

$$U_1(t)=u+ct-\sum_{i=1}^{N_1(t)}Y_i-\sum_{j=1}^{N_2(t)}Z_j=u+ct-S_1(t),\ (1.2)$$

其中 $c<0$；$\{N_1(t);t\ge 0\}$ 服从参数为 λ 的齐次 poisson 过程，$\{N_2(t);t\ge 0\}$ 是一个这样的计数过程：它的点发生时刻形成的点过程 $\{m(t);t\ge 0\}$ 为 $\{N_1(t);t\ge 0\}$ 的一个 $p-$ 稀疏，而在各个点发生时刻发生的点数是有相同分布 $\{p_n,n=1,2,\cdots\}$ 的独立随机变量 W_k，即 $\Pr(W_k=n)=p_n(n=1,2,\cdots)$。$\{Y_i,i=1,2,\cdots\}$ 与 $\{Z_i,i=1,2,\cdots\}$ 是两个相互独立的非正随机变量序列，其分布函数分别为 F_Y 和 F_Z，均值为 μ_Y、μ_Z，且 $F_Y(0)=F_Z(0)=1$。

风险模型(1.2)在实际问题中有其应用背景。如考虑有两个不同类型的负风险和模型，第一个类可表示某一地区一定年龄段的女性寿险年金保险，第二类表示该地区一定年龄段的男性寿险年金保险。这两个类一般并不独立，在理赔中，每次第一类理赔以 $q=1-p$ 的概率不会引起第二类理赔的发生，而以概率 P 引起第二类理赔的发生，并且在第二类保险理赔的每个点发生时刻，要求理赔的人数可能不止一个，它可能服从某一离散型分布，即第二类理赔的点发生时刻形成的计数过程为第一类理赔的一个 $p-$ 稀疏.

本文给出了“理赔”计数过程具有相依关系的二元负风险和模型(1.2)的破产概率所满足的积分－微分方程及解析表达式，并将此风险模型的破产概率和经典负风险模型(1.1)的破产概率进行了比较。当“理赔额”为负指数变量时，对具体实例给出了数值比较。本文所得结果推广了经典负风险和模型的相应结果。

2. 模型转换

在 (1.2) 式的定义中，令 $S_Y(t)=\sum_{i=1}^{N_1(t)}Y_i$，$S_Z(t)=\sum_{j=1}^{N_2(t)}Z_j$，则 $S_Y(t)$ 和 $S_Z(t)$ 分别表示两个险种到 t 时刻为止的负值理赔总额。对于 $\{N_2(t);t\ge 0\}$，首先有 $N_2(t)=\sum_{k=1}^{m(t)}W_k$，类似于文献[11]的讨论，可得风险过程

$$S_Z(t)=\sum_{j=1}^{N_2(t)}Z_j=\sum_{j=1}^{\sum_{k=1}^{m(t)}W_k}Z_j=(Z_1+Z_2+\cdots Z_{W1})+\left(Z_{W_1+1}+Z_{W_1+2}+\cdots Z_{W_1+W_2}\right)+\left(Z_{W_1+\cdots+W_{m(t)-1}+1}+\cdots+Z_{W_1+\cdots+W_{m(t)}}\right)$$

令

$$X_k=Z_{W_1+\cdots+W_{m(t)-1}+1}+\cdots+Z_{W_1+\cdots+W_k},\quad 1\le k\le m(t),$$

且令 $W_0=0$。因此，

$$S_Z(t)=\sum_{k=1}^{m(t)}X_k。\qquad (2.2)$$

X_k 表示 $m(t)$ 的每个点发生时刻 Z 的负值理赔总额。

根据文献[11]的分析，知 $\{X_k,k=1,2,\cdots\}$ 为非正独立且同分布的随机变量序列，且 $\{X_k,k=1,2,\cdots\}$ 的分布函数为

$$F_X(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}F_Z^{(*)n}(x)p_n,\qquad (2.2)$$

其中 $F_Z^{(*)n}(y)$ 为 $F_Z(y)$ 的 n 重卷积，并且 $F_X(0)=1$。

由于 $\{m(t);t\ge 0\}$ 为 $\{N_1(t);t\ge 0\}$ 的一个 $p-$ 稀疏，故 $\{N_1(t);t\ge 0\}$ 可以分解为两个相互独立的点过程 $\{m(t);t\ge 0\}$ 和 $\{m_1(t);t\ge 0\}$ 的，即对于每一 $\omega\in\Omega$ 和 $\forall t\ge 0$，有 $N_1(t,w)=m(t,w)+m_1(t,w)$，则

$$S_1(t)=\sum_{i=1}^{N_1(t)}Y_i+\sum_{k=1}^{m(t)}X_k=\sum_{i=1}^{m(t)}(X_i+Y_i)+\sum_{i=1}^{m_1(t)}Y_i^*,$$

其中 Y_i 与 Y_i^* 为独立同分布的随机变量。这样两个相依的负值理赔总额化为了两个相互独立的负值理赔总额，计数过程分别为 $\{m(t);t\ge 0\}$ 和 $\{m_1(t);t\ge 0\}$，每次的负值理赔额的分布函数分别为 $\left(F_Y*\left(\sum_{n=1}^{+\infty}F_Z^{(*)n}p_n\right)\right)(x)$ 和 $F_Y(y)$。此时风险模型(1.2)变成了

$$U_1(t)=u+ct-\sum_{i=1}^{m(t)}(X_i+Y_i)-\sum_{i=1}^{m_1(t)}Y_i^*。\qquad (2.3)$$

又因为 $\{N_1(t);t\ge 0\}$ 为参数 λ 的齐次 Poisson 过程，所以 $\{m(t);t\ge 0\}$ 和 $\{m_1(t);t\ge 0\}$ 分别是参数 $p\lambda$ 和 $q\lambda(q=1-p)$ 的齐次 Poisson 过程。又 $\{X_i+Y_i,i=1,2,\cdots\}$ 与 $\{Y_i^*,i=1,2\cdots\}$ 相互独立，易知(2.3)可化为一个经典的负风险和模型

$$U_1(t)=u+ct-\sum_{i=1}^{N_1(t)}L_i,\qquad (2.4)$$

其中 $\{N(t),t\ge 0\}$ 是参数 λ 的齐次 Poisson 过程，L_i 的分布函数为

$$F_L(y)=\frac{1}{\lambda}\left[p\lambda F_{X_i+Y_i}(y)+q\lambda F_{Y_i^*}(y)\right]=p\left[\left(F_Y*\left(\sum_{n=1}^{+\infty}F_Z^{(*)n}p_n\right)\right)(y)\right]+qF_Y(y)\text{。}\tag{2.5}$$

3. 负风险和模型的破产概率

破产时间 T_u 定义为 $T_u=\inf\{t\ge 0;U_1(t)<0\}$，若上集为空，则令 $T_u=+\infty$。二元负风险和模型(1.2)的破产概率定义为 $\Psi_1(u)=\Pr(T_u<+\infty)$。为了使保险公司保持长期稳定，本文始终假设 $c-\lambda u_Y-\lambda pu_Z>0$。

由于保险人以常值年金率连续支付给被保险人年金，“理赔”实为收入，所以盈余在相继的两次“理赔”间连续递减，在“理赔”发生时有向上的跳跃，因而，破产只可能发生在相继的“理赔”之间，且满足 $U_1(T_u)=0$.由轨道性质知 $\Psi_1(0)=1$。

引理 1 令 $u>0$，则存在常数 $r\ge 0$，使得

$$\Psi_1(u)=e^{-ru}\text{。}\tag{3.1}$$

证明 由文献[1]知，经典负风险和模型的破产概率 $\Psi(u)$ 满足 $\Psi(u)=\Psi(x)\Psi(u-x)$，$(0\le x\le u)$ 且 $\Psi(0)=1$。根据第二部分的讨论知，具有相依关系的二元负风险和模型(1.2)可以转化为经典负风险和模型(2.4)，因此 $\Psi_1(u)$ 满足 $\Psi_1(u)=\Psi_1(x)\Psi_1(u-x)$，$(0\le x\le u)$。由于 $\Psi_1(u)$ 单调下降，故存在常数 $r\ge 0$ 使得 $\Psi_1(u)=e^{-ru}$，引理 1 得证。

注 1 因 $\Psi_1(0)=1$，引理 1 的结论对 $u=0$ 也成立。

定理 1 令 $u\ge 0$，则 $\Psi_1(u)$ 满足如下积分－微分方程：

$$\Psi_1'(u)=\frac{\lambda}{c}\Psi_1(u)-\frac{\lambda q}{c}\int_{-\infty}^{0}\Psi_1(u-y)\,\mathrm{d}F_Y(y)-\frac{\lambda p}{c}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0}p_n\Psi_1(u-y)\,\mathrm{d}F_Y*F_Z^{(*)n}(y)\text{。}\tag{3.2}$$

证明 由文献[1]知，经典负风险和模型的破产概率 $\Psi(u)$ 满足积分－微分方程

$$\Psi'(u)=\frac{\lambda}{c}\Psi(u)-\frac{\lambda}{c}\int_{-\infty}^{0}\Psi(u-y)\,\mathrm{d}F_Y(y)\text{。}\tag{3.3}$$

而由第二部分的讨论知，具有相依关系的二元负风险和模型(1.2)可以转化为负值理赔额为 $\{L_i,i=1,2,\cdots\}$，计数过程为 $N(t)$ 的经典负风险和模型，其中 $N(t)$ 为参数为 λ 的 Poisson 过程。因此，将此模型中负值理赔额的分布函数(2.5)式代入(3.3)式，可得定理 1 的结论。

由文献[1]中的公式(15)：

$$\lambda+cr-\lambda M_Y(r)=0\,.\tag{3.4}$$

其中 $M_Y(r)$ 表示“理赔额”$\{Y_i,i=1,2,\cdots\}$ 的矩母函数。

类似于方程(3.4)，由(3.1)式和(3.2)式知引理 1 中的 r 满足如下方程

$$\lambda+cr-\lambda p\sum_{n=1}^{+\infty}p_nM_Y(r)\left(M_Z(r)\right)^n-\lambda qM_Y(r)=0\text{，}\tag{3.5}$$

引理 2 若 $c-\lambda\mu_Y-\lambda p\mu_Z>0$，则方程(3.5)有唯一正根。

证明 令

$$g(r)=\lambda+cr-\lambda p\sum_{n=1}^{+\infty}p_nM_Y(r)\left(M_Z(r)\right)^n-\lambda qM_Y(r)\text{，}$$

则 $g(0)=0,\ \lim\limits_{n\to+\infty}g(r)=-\infty$。易验证

$$g'(r)=c-\lambda p\sum_{n=1}^{+\infty}\left(np_n\left(M_Z(r)\right)^{n-1}M_Z'(r)M_Y(r)+p_n\left(M_Z(r)\right)^nM_Y'(r)\right)-\lambda qM_Y'(r)\text{，}$$

且

$$g'(0)=c-\lambda p\sum_{n=1}^{+\infty}\left(np_n\mu_Z+p_n\mu_Y\right)-\lambda q\mu_Y>c-\lambda\mu_Y-\lambda p\mu_Z>0\text{，}$$

所以 $g(r)$ 在 $r=0$ 右侧附近大于零。又当 $r>0$ 时

$$g''(r)=-\lambda p\sum_{n=1}^{+\infty}\left(np_n\left(M_Z(r)\right)^{n-2}\right)\left((n-1)\left(M_Z'(r)\right)^2M_Y(r)+M_Z(r)M_Z''(r)M_Y(r)\text{，}\right.$$

$$\left.+2M_Z(r)M_Z'(r)M_Y'(r)-\lambda qM_Y''(r)\ \right)<0$$

所以 $g(r)$ 为凸函数，故 $g(r)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一正根。引理 2 得证。

由引理 1，定理 1 和引理 2 可得

定理 2 当$u \geq 0$，则$\Psi_1(u)=e^{-R_1 u}$，其中R_1是方程(3.5)的唯一正根，并且称R_1为调节系数。

注 2 由引理 2 和定理 2 知，当$c-\lambda\mu_Y-\lambda p\mu_z>0$时，有$\Psi_1(u)<1$，$u>0$。

下面将“理赔”计数过程相关的二元负风险和模型的破产概率和经典负风险和模型的破产概率进行比较。由文献[1]知，方程(3.4)也存在唯一正根，不妨设此正根为R。且$\Psi(u)=e^{-R_u}$。

定理 3 当$u \geq 0$，则$R_1>R$，$\Psi(u)>\Psi_1(u)$。

证明 令

$f_1(r)=\lambda p\sum_{n=1}^{+\infty}p_n M_Y(r)(M_Z(r))^n+\lambda q M_Y(r)-\lambda$，$f(r)=\lambda M_Y(r)-\lambda$。显然，$R_1$是方程$f_1(r)=cr$的唯一正根，$R$是方程$f(r)=cr$的唯一正根。又$f_1(0)=f(0)=0$，当$r>0$时，

$$f_1(r)-f(r)=\lambda p\sum_{n=1}^{+\infty}p_n M_Y(r)(M_Z(r))^n+\lambda q M_Y(r)-\lambda M_Y(r)=\lambda M_Y(r)\left(p\sum_{n=1}^{+\infty}p_n(M_Z(r))^n+q-1\right)<0。$$

所以$f_2(r)$在$f_1(r)$之前与直线$y=cr$相遇。因此$R_1>R$，从而有$\Psi(u)>\Psi_1(u)$。定理 3 得证。

4. 数值分析

本节讨论当“理赔额”分布为负指数分布时破产概率$\Psi_1(u)$的明确表达式。由定理 2，此时仅需给出方程(3.5)的唯一正根的明确表达式即可。

例 “理赔额”为负指数分布的情形。

此时$F_Y(x)=e^{\alpha x},F_Z(x)=e^{\beta x},x\leq 0,\alpha,\beta>0$，且$F_Y(x)=F_Z(x)=1,x>0$。那么，$\mu_Y=-1/\alpha$，$\mu_Z=-1/\beta$。并且假设$W_i$为$\{1,2\}$上的两点分布，且$P(W_i=1)=1/2$，$P(W_i=2)=1/2$。对于其它情形可类似的计算。取$\alpha=1/2$，$\lambda=1$，$c=-1$，由(3.5)式以及定理 2 可推出$R_1$是如下方程的正根：

$$\lambda+cr-\lambda p\left(\frac{\alpha}{r+\alpha}\right)\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{r+\beta}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{r+\beta}\right)^2\right\}-\lambda q\left(\frac{\alpha}{r+\beta}\right)=0。\tag{4.1}$$

求解(4.1)式得，此方程只有唯一正根$R_1=0.691488$。同理可知，R是如下方程的正根：

$$\lambda+cr-\lambda\left(\frac{\alpha}{r+\alpha}\right)=0。\tag{4.2}$$

求解(4.2)式，得此方程只有唯一正根$R=0.5$。

可知$R_1>R$，这样也验证了定理的结论。

不同初始资金下两种破产概率的数值比较见表 1。

从表 1 的最后一列可以看出，如果初始资金相同，具有相依关系的二元负风险和模型的破产概率小于经典负风险和破产概率。同时，随着初始资金的增大，经典的负风险和模型的破产概率与具有相依关系的二元负风险和模型的破产概率的比值呈递增趋势。这在一定程度上表明随着初始资金的增大，保险类之间的相关性对破产概率的影响也越来越显著。

Table 1. The comparable numerical results of two classes of ruin probabilities
表 1. 不同初始资金下两种破产概率的数值比较结果

u	$\Psi(u)$	$\Psi_1(u)$	$\Psi(u)/\Psi_1(u)$
0	1	1	1
1	0.606531	0.500830	1.21005
3	0.223130	0.125624	1.77618
5	0.082085	0.031511	2.60502
7	0.030197	0.007904	3.82063
8	0.018316	0.003958	4.62697
9	0.011109	0.001983	5.60350
10	0.006737	0.000993	6.78612
15	0.000553	0.000031	17.6780

5. 结论

本文将经典的负风险和模型推广为具有相依关系的二元负风险和模型，给出了此模型破产概率所满足的积分－微分方程及解析表达式，并将此模型的破产概率和经典负风险和模型的破产概率进行了比较。当“理赔额”为负指数变量时，对具体事例给出了数值比较。本文所得结果推广了经典负风险和模型的相应结果。当然，对于此模型以及更一般的负风险和模型，还有待于研究人员做更深一步的探讨和研究。

参考文献 (References)

[1] J. Grandell. Aspects of Risk Theory. New York: Springer-Verlag, 1991.
[2] R. S. Ambagaspitiya. On the distribution of a sum of correlated aggregate claims. Insurance: Mathematics and Economics, 1998, 23(1): 15-19.
[3] R. S. Ambagaspitiya. On the distribution of two classes of corre-

lated aggregate claims. Insurance: Mathematics and Economics, 1999, 24(3): 301-308.
[4] C. Partrat. Compound model for two dependent for kinds of claims. Insurance: Mathematics and Economics, 1994, 15(2-3): 219- 231.
[5] K. C. Yuen, J. Y. Guo, and X. Y. Wu. On a correlated aggregate claims model with Poisson and Erlang risk processes. Insurance: Mathematics and Economics, 2002, 31(2): 205-214.
[6] 谢杰华, 邹妮. 一类具有时间相依索赔风险模型的破产概率[J]. 中国科学院研究生院学报, 2008, 25(3): 313-319.
[7] 谢杰华, 邹妮. 具有相关索赔风险模型的破产概率[J]. 应用数学学报, 2009, 32(3): 546-554.
[8] J. H. Xie, W. Zou. Expected present value of total dividends in a delayed claims risk model under stochastic interest rates. Insurance: Mathematics and Economics, 2010, 46(2): 415-422.
[9] W. Zou, J. H. Xie. On the ruin problem in an Erlang (2) risk model with delayed claims. Communications in Computer and Information Science, 2010, 105(2): 54-61.
[10] J. H. Xie, W. Zou. On the expected discounted penalty function for the compound Poisson risk model with delayed claims. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, 235(8): 2392-2404.
[11] 戚懿. 广义复合 Poisson 模型下的破产概率[J]. 应用概率统计, 1999, 15(2): 141-146.

