

# 基于机器学习预测普通和高强混凝土弹性模量

邹志鹏

上海理工大学环境与建筑学院, 上海

收稿日期: 2024年4月20日; 录用日期: 2024年5月20日; 发布日期: 2024年5月24日

## 摘要

高性能混凝土(High Performance Concrete, HPC)在增强建筑物及基础设施的可持续性与可靠性方面发挥着重要作用。机器学习技术已经广泛应用于预测混凝土的多项性能指标。本研究提出了应用高斯过程(Gaussian Process, GP)模型, 预测普通和高强混凝土基于抗压强度的弹性模量。为优化GP模型的预测准确性, 本研究采用Kalman滤波和平滑(Kalman Filtering and Smoothing, KF/KS)技术以降低数据离散性的影响。研究结果显示, GP模型能够有效利用物理模型, 预测和泛化能力良好。通过应用KF/KS技术处理数据, 模型的性能得到进一步提升。该模型具有较高的准确性和稳定性, 有望成为弹性模量估算的快速、稳健和低成本的工具。

## 关键词

高性能混凝土, 弹性模量, 机器学习, 高斯过程, Kalman滤波和平滑

# Predicting the Elastic Modulus of Normal and High-Strength Concrete Based on Machine Learning

Zhipeng Zou

School of Environment and Architecture, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Apr. 20<sup>th</sup>, 2024; accepted: May. 20<sup>th</sup>, 2024; published: May. 24<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

High Performance Concrete (HPC) plays a crucial role in enhancing the sustainability and reliability of buildings and infrastructure. Machine learning techniques have been widely applied to predict various performance indices of concrete. This study introduces the use of Gaussian Process (GP) models to predict the elastic modulus of normal and high-strength concrete based on com-

pressive strength. To optimize the predictive accuracy of the GP model, this research employs Kalman Filtering and Smoothing (KF/KS) techniques to reduce the impact of data dispersion. The results demonstrate that the GP model can effectively utilize physical models, showing good prediction and generalization capabilities. The performance of the model is further improved by processing data through KF/KS techniques. With high accuracy and stability, the model promises to be a fast, robust, and low-cost tool for estimating the elastic modulus.

## Keywords

High Performance Concrete, Elastic Modulus, Machine Learning, Gaussian Process, Kalman Filtering and Smoothing

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

高性能混凝土(High Performance Concrete, HPC)是一种先进的水泥基复合材料。该材料具有优异的力学性能、良好的工作性能和耐久性。其抗压强度通常在 100MPa 以上, 由于混凝土内部孔隙率小, 所以 HPC 具有良好的抗腐蚀性、抗渗性、抗冻性等优点。然而, 制备 HPC 通常需要加入化学添加剂和额外的辅助性胶凝材料, 如粉煤灰、高炉渣、硅灰、高效减水剂等, 这些成分的复杂性为精确预测 HPC 的各项力学性能提出了挑战[1] [2] [3] [4]。

弹性模量是混凝土材料的一个关键性指标, 反映了材料抵抗弹性变形的能力。当混凝土强度达到设计要求时, 较低的弹性模量会导致混凝土构件刚度偏低、增大荷载作用下的变形, 进而影响构件的正常使用。HPC 抗压强度是普通混凝土的 1.5 倍以上, 而 HPC 弹性模量多为 30~50 GPa, 仅比普通混凝土高 20% 左右, 其增长幅度远小于抗压强度的增幅, 给 HPC 工程应用带来更多的困难[5] [6] [7]。

通过抗压强度的试验可以获取材料的应力-应变曲线, 进而计算弹性模量的值。然而, 这类试验一般耗时长且资源密, 特别是需要通过循环加载和应变测量来进行, 这在实际操作中极为困难[8] [9]。此外, 研究冻融环境下混凝土的物理、化学特性和耐久性的试验同样需要大量的时间和资源[10] [11]。

以往的研究表明, HPC 的弹性模量在很大程度上依赖于骨料的弹性模量及其在混凝土中的体积比[12]。除了试验方法之外, 建模和模拟技术也被广泛应用于计算混凝土的弹性模量。Teng 等[13]研究了纤维体积率和长径比对钢纤维混凝土弹性模量的影响, 并提出了一个经验公式, 进而简化弹性模量的计算, 但该公式的应用范围相对有限。

为了便于设计和应用, 各国提出了基于抗压强度估算弹性模量的经验公式[14]。这些经验公式操作简单, 但并不具有很好的普适性, 因为它们可能无法准确反映不同类型或成分混凝土的实际行为。这些局限性凸显了开发更为精确和普适性的弹性模量预测方法的必要性, 特别是考虑到 HPC 的广泛应用及其对建筑和基础设施项目性能的重要影响。

对此, 采用非参数化模型的机器学习方法具有明显优势。高斯过程(Gaussian Process, GP)是典型的非参数化模型, 与人工神经网络(Artificial Neural Network, ANN)相比, GP 模型需要训练的超参数少、不易发生过拟合, 并且能够更容易地与已知的物理模型结合, 从而提供较好的可解释性。经过有效训练的 GP 模型能够达到与大规模 ANN 相似的效果[15] [16] [17] [18], 并在高强混凝土、轻骨料混凝土的强度预测

等方面已体现出优势[19] [20]。

为避免参数化回归模型预测效果差、ANN 缺乏可解释性的不足[21]，本文建立并训练 GP 模型，预测基于抗压强度的普通和高强混凝土的弹性模量。通过 Kalman 滤波和平滑(Kalman Filtering and Smoothing, KF/KS)强化物理模型、降低数据离散性的影响。

## 2. 弹性模量试验结果

本文从文献[22]收集混凝土弹性模量和抗压强度试验数据构成数据集。上述数据分别用于训练模型、验证模型的预测效果及泛化能力。为实现这一目的，采用交叉验证的抽样方法：将数据集随机均分成 5 分，以其中 4 份为训练集、另外 1 份为验证集，此过程重复 5 次，以确保每一组数据都有机会作为验证集被使用，如图 1 所示。这种方法有助于评估模型对未知数据的预测能力，并减少过拟合的风险。通过这种方式，可以系统地评估模型的性能，提高模型的可靠性和准确性。

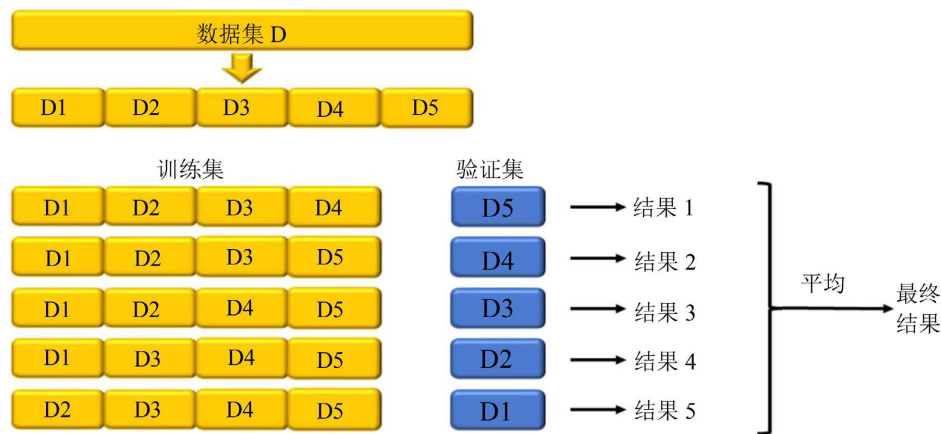


Figure 1. Procedure of the cross validation  
图 1. 交叉验证过程

## 3. 弹性模量计算模型

尽管混凝土弹性模量的确定性计算模型未能显式地考虑到不确定性因素，但它们传达了重要的工程判断。这些模型通过提供基于经验和理论的预测，有助于在一定程度上缓解不确定性带来的挑战。常见的计算模型如表 1 所示，这些模型在现实世界的工程实践中得到了广泛应用。

Table 1. Calculation models for concrete compressive strength and elastic modulus  
表 1. 混凝土抗压强度和弹性模量的计算模型

计算模型	公式	文献
GB/T 50010-2010	$E_c = \frac{10^5}{2.2 + 34.7/f_c}$	[23]
ACI Committee 318-14	$E_c = 4730\sqrt{f_c}$	[24]
ACI Committee 363-10	$E_c = 3320\sqrt{f_c} + 6900$	[25]
Association Francaise de Genie Civil (AFGC)	$E_c = 9500 f_c^{1/3}$	[26]
Eurocode 2	$E_c = 22000(f_c/10)^{1/3}$	[27]

续表

CSA A23.3-04	$E_c = 4500\sqrt{f_c}$	[28]
CEB-FIP	$E_c = 21500(f_c/10)^{1/3}$	[29]
Norwegian Standard NS 3473	$E_c = 9500f_c^{0.3}$	[30]
Alsalmán	$E_c = 8010f_c^{0.36}$	[31]
Ma	$E_c = 21902(f_c/10)^{1/3}$	[32]
Sritharan	$E_c = 4150\sqrt{f_c}$	[33]
Guo	$E_c = \frac{10^3}{0.0172 + 0.8364/f_c}$	[34]
Ahmad	$E_c = 4360\sqrt{f_c}$	[35]
Graybeal	$E_c = 43840\sqrt{f_c}$	[36]

注： $f_c$  表示抗压强度(MPa)； $E_c$  代表弹性模量(MPa)。

对于收集到的混凝土弹性模量数据集，本文采用非线性曲线拟合方法进行了分析，并将拟合结果与现有的计算模型进行对比，如图 2 所示，结合表 1 和图 2 可得到以下结论：

混凝土的拟合结果见式(1)。由图 2(a)、图 2(b)可知，欧洲规范 Eurocode 2 [27]可以较好地预测普通混凝土和 HPC 混凝土的弹性模量。

$$E_c = 7.562f_c^{0.404} \quad (1)$$

式中： $f_c$  为混凝土抗压强度，单位为 MPa； $E_c$  为混凝土弹性模量，单位为 GPa。

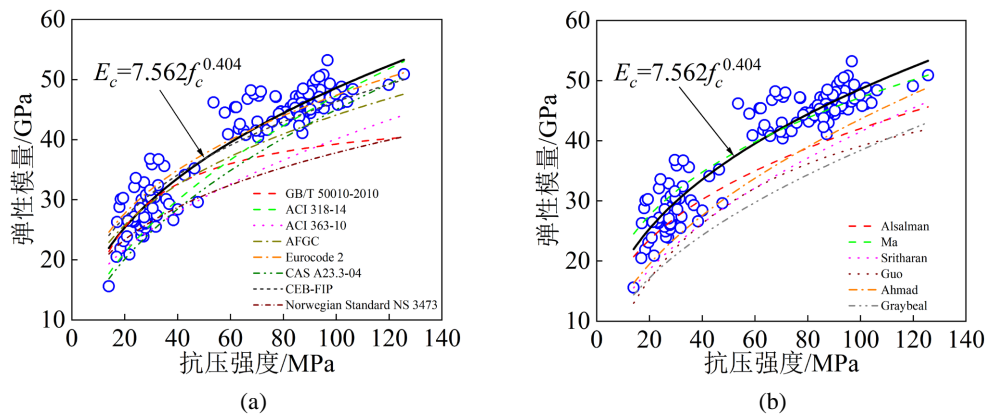


Figure 2. Relationship between concrete compressive strength and elastic modulus: (a) Norms; (b) Reference  
图 2. 混凝土抗压强度和弹性模量的关系: (a) 规范; (b) 文献

## 4. GP 模型及其预测效果

### 4.1. 基本原理

混凝土弹性模量的 GP 模型可以表示为：

$$E_c(x) \sim \mathbf{GP}(m(x), \mathbf{K}(x, x')) \quad (2)$$

式中： $E_c(\mathbf{x})$ 为弹性模量； $\mathbf{x}$ 为输入变量的列向量； $m(\mathbf{x})$ 为弹性模量的均值函数； $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 为弹性模量的协方差矩阵；**GP**表示高斯过程。

**GP**模型由均值函数和核函数确定。均值函数可选择常函数或多项式回归函数等形式；核函数可选择平方指数函数、Matern5/2函数和有理二次函数等，如表2所示。在模型训练之前合理选定均值函数和核函数，能够反映对UHPC抗压强度的先验判断、有助于提高训练过程的效率，这是**GP**模型区别于**ANN**和其他非参数化模型的特征。

**Table 2.** Kernel functions

**表 2.** 核函数

名称	公式
平方指数	$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right)$ $r = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}$
Matern5/2	$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sigma_f^2 \left(1 + \frac{\sqrt{5}r}{l} + \frac{5r^2}{3l^2}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{5}r}{l}\right)$
有理二次	$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sigma_f^2 \left(1 + \frac{r^2}{2\alpha l^2}\right)^{-\alpha}$

注： $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x}'$ 是训练数据； $\sigma_f$ 是标准差； $l$ 是特征长度尺度； $\alpha$ 是正比例混合参数。

在选定先验模型之后，可以采用已有的试验数据对其进行训练，即最大化以下对数似然函数：

$$\log p(E_c | \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} E_c^T \mathbf{K}^{-1} E_c - \frac{1}{2} \log \det(\mathbf{K}) - \frac{n}{2} \log 2\pi \quad (3)$$

式中： $\boldsymbol{\theta} = (\sigma_f, l, \sigma_n, \alpha)^T$ 为先验模型带入的参数(即超参数)组成的列向量； $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ ； $n$ 为训练数据的数量。(3)式右边第一项表示对训练数据的拟合程度；第二项是罚数，能够避免采用复杂的模型对训练数据进行过拟合；第三项是归一化常数[15]。训练的过程是基于贝叶斯方法，将先验判断信息和已有试验数据中的信息加权组合。

随试验数据的增加，充分训练的模型将获得更多的信息，可用于预测：对新输入数据 $\mathbf{x}^*$ ，更新模型估计其对应的输出 $E_c(\mathbf{x}^*)$ 。更新过程认为 $E_c(\mathbf{x}^*)$ 与 $E_c(\mathbf{x})$ 服从联合正态分布，即：

$$\begin{pmatrix} E_c(\mathbf{x}) \\ E_c(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} m(\mathbf{x}) \\ m(\mathbf{x}^*) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K(\mathbf{x}, \mathbf{x}) & K(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) \\ K(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) & K(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*) \end{bmatrix} \right) \quad (4)$$

式中： $N$ 为联合正态分布； $K(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ 为训练数据的协方差矩阵； $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)$ 为训练数据和新输入数据的协方差矩阵； $K(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*)$ 为新输入数据自身的协方差。从而 $E_c(\mathbf{x}^*)$ 可由更新后模型的参数(即后验参数)表示为：

$$E_c(\mathbf{x}^* | \mathbf{x}) \sim N(\mu_f, \sigma_f^2) \quad (5)$$

式中： $\mu_f$ 、 $\sigma_f^2$ 分别表示后验均值和后验方差，表达式为：

$$\mu_f = m(\mathbf{x}^*) + K(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})K(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{-1}(E_c(\mathbf{x}) - m(\mathbf{x})) \quad (6)$$

$$\sigma_f^2 = K(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*) - K(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})K(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{-1}K(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) \quad (7)$$

GP 模型预测的不仅是抗压强度的单个样本而是其概率密度模型，包含了全面的、量化的不确定性信息。

## 4.2. 预测效果评价指标

采用五个指标评价模型的预测效果，即平均绝对误差(Mean-Absolute-Error, MAE)、均方误差(Mean-Squared-Error, MSE)、拟合优度(Goodness-of-fit, 用  $R^2$  表示)和均方根误差(Root-mean-square-error, RMSE)、平均绝对百分比误差(Mean Absolute Percentage Error, MAPE)，其计算方法如表 3 所示，综合考虑以上指标，可以对模型预测效果做出较全面的评价。

**Table 3.** Evaluation metrics for prediction of the models

**表 3.** 模型预测效果评价指标

评价指标	公式
MAE	$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n  E_{ci} - E_{ci}^* $
MSE	$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (E_{ci} - E_{ci}^*)^2$
$R^2$	$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (E_{ci} - E_{ci}^*)^2}{\sum_{i=1}^n (E_{ci} - \bar{E}_c)^2}$
RMSE	$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (E_{ci} - E_{ci}^*)^2}$
MAPE	$\text{MAPE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left  \frac{E_{ci} - E_{ci}^*}{E_{ci}} \right  \times 100\%$

注： $E_{ci}$  是第  $i$  个测量值； $E_{ci}^*$  是第  $i$  个预测值； $\bar{E}_c$  是所有测量值的平均值； $n$  是样本数量。

## 4.3. 基于 GP 模型预测 UHPC 的弹性模量

核函数对 GP 模型的预测效果有关键影响。考虑到平方指数核函数无限可微、对模型进行了过度平滑，而抗压强度与弹性模量之间不应是平滑的函数关系。有理二次函数相较于 Matern5/2 核函数复杂度过高，因此选择 Matern5/2 核函数作为最终的核函数。

选择合理的先验均值函数，实质上是利用物理模型约束和引导训练过程，降低试验结果中固有的不确定性所带来的影响，这是 GP 模型的优势。采用 Matern5/2 核函数作为 GP 模型的核函数，将先验均值函数分别设为 Eurocode 2、公式(1)、常数(训练集中弹性模量的均值)和 0，依次建立 GP 模型 1~4。预测结果见图 3、图 4。

分析图 3、图 4 可知，模型 1 的预测效果最好，模型 2、4 次之，模型 3 预测效果最差。这一结果表明将混凝土弹性模量的确定性计算模型转化为先验 GP 模型的有效性。模型 1 和模型 2 充分利用现有的专业知识和先验信息，为 GP 模型提供了有力的指导，从而提高了预测的准确性。

通过将试验数据用于训练这些先验 GP 模型，生成了后验 GP 模型，有效地修正了先验模型的偏差。

模型 1 和模型 2 的后验均值函数表现为非线性, 这表明模型通过学习数据中的非线性关系来调整其预测, 从而增强了模型的适应性和预测能力。

模型 3 将训练集的均值作为先验, 未能有效地利用先验知识, 导致其与实际数据之间存在较大的偏差, 进而影响了预测效果的准确性。这一发现强调了在建立 GP 模型时, 充分整合和利用先验知识的重要性。通过精确地选择和设计先验模型, 可以显著提升后验模型的性能, 从而更为准确地预测混凝土弹性模量, 为混凝土结构设计和评估提供可靠的科学依据。

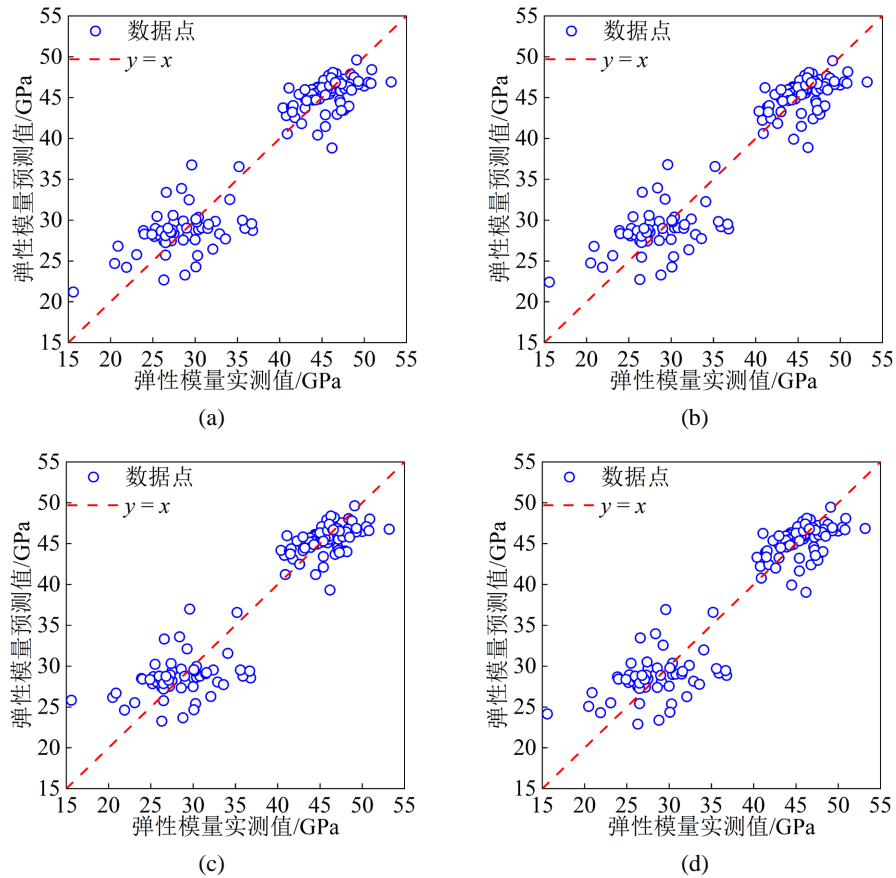
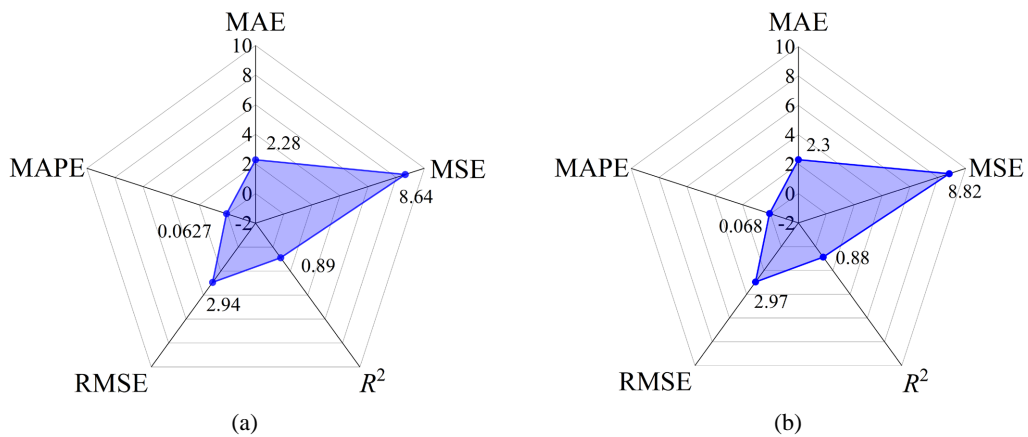
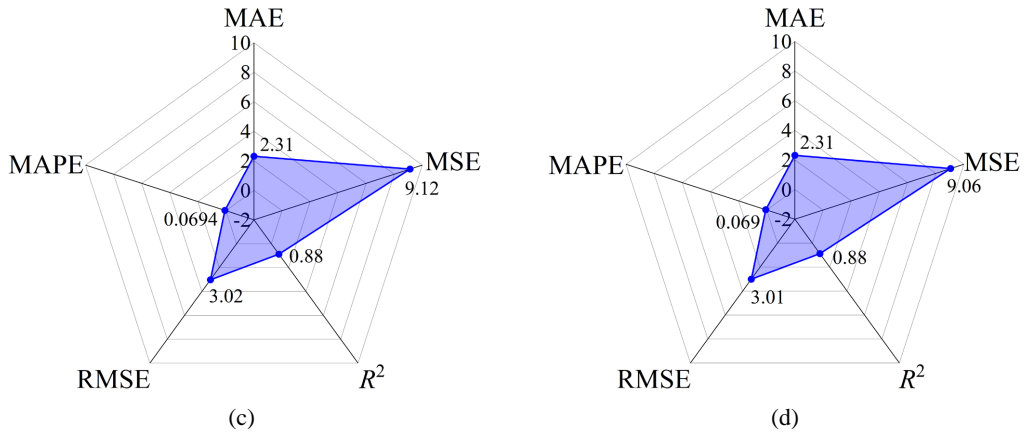


Figure 3. GP model prediction results: (a) Model 1; (b) Model 2; (c) Model 3; (d) Model 4

图 3. GP 模型预测结果: (a) 模型 1; (b) 模型 2; (c) 模型 3; (d) 模型 4





**Figure 4.** Results of different evaluation indicators: (a) Model 1; (b) Model 2; (c) Model 3; (d) Model 4  
**图 4.** 不同评价指标的结果: (a) 模型 1; (b) 模型 2; (c) 模型 3; (d) 模型 4

### 5. GP 模型改进

为进一步改善模型，减小混凝土弹性模量试验数据离散性的影响、同时强化物理模型的作用，采用 KF/KS 对训练数据进行预处理。KF 过程如下[37]：

- 1) 利用前一条件下弹性模量的后验估计值，对当前配合比条件下弹性模量进行预测：

$$E_{c[t]}^* = F\hat{E}_{c[t-1]} \tag{8}$$

式中： $\hat{E}_{c[t-1]}$  为前一条件下弹性模量的后验估计值； $E_{c[t]}^*$  为当前配合比条件下抗压强度的先验预测值； $F$  为状态转移矩阵，在本文的计算中只有一个状态变量即弹性模量，故  $F$  取为当前条件下由 Eurocode 2 计算得出的值与前一条件下计算得出的值之比，反映弹性模量在不同条件下的变化。

- 2) 利用状态转移矩阵，预测当前配合比条件下抗压强度的方差：

$$P_{[t]}^* = F\hat{P}_{[t-1]}F^T + Q \tag{9}$$

式中： $\hat{P}_{[t-1]}$  是前一配合比条件下的方差； $P_{[t]}^*$  是当前配合比条件下的方差； $Q$  是系统噪声的方差。

- 3) 计算当前配合比条件下的卡尔曼增益：

$$K_t = P_{[t]}^* \left( P_{[t]}^* + R \right)^{-1} \tag{10}$$

式中： $R$  是实测噪声的方差。

- 4) 采用当前条件下弹性模量的实测值，更新当前条件下弹性模量的先验预测值，得到弹性模量的后验估计值：

$$\hat{E}_{c[t]} = E_{c[t]}^* + K_t \left( E_{c[t]} - E_{c[t]}^* \right) \tag{11}$$

式中： $E_{c[t]}$  为当前条件下弹性模量的实测值。

- 5) 更新当前配合比条件下抗压强度的方差：

$$\hat{P}_{[t]} = (1 - K_t) P_{[t]}^* \tag{12}$$

- 6) 返回步骤 1) 继续计算。

以上为正向递推的滤波过程；平滑(KS)过程将滤波获得的最后状态的后验估计值  $\hat{E}_{c[t]}$  与方差  $\hat{P}_{[t]}$ ，作



为初始状态，向第一个观测值逆向递推[38]。

将经过 KF/KS 处理之后的数据，用于训练模型 1，预测结果如图 5、图 6 所示，预测效果较模型 1 得到进一步提升。

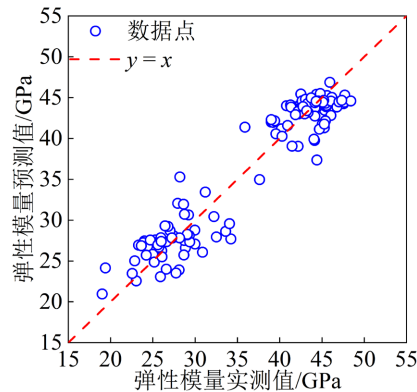


Figure 5. Prediction results of KF/KS-GP model

图 5. KF/KS-GP 模型预测结果

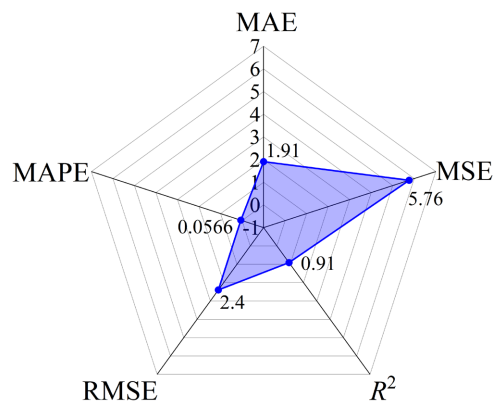


Figure 6. Results of different evaluation indicators

图 6. 不同评价指标的结果

## 6. 结论

本研究通过将混凝土的弹性模量确定性计算模型转化为先验高斯过程(GP)模型，并利用收集到的实验数据进行训练，从而获得了后验 GP 模型。通过采用五折交叉验证方法，本文全面评估了该模型预测混凝土弹性模量的效果。研究结果显示：

(1) 高斯过程模型的优势：GP 模型在预测普通混凝土和高性能混凝土(HPC)的弹性模量方面表现出色。该模型能够有效地综合工程判断和实验数据，通过对这两种信息的组合和加权，既利用工程判断来补充实验数据中的信息不足，又使用实验数据中的信息来缓解工程判断可能存在的偏差，从而达到了良好的预测效果。

(2) 数据预处理的重要性：通过引入卡尔曼滤波和平滑(KF/KS)技术对实验数据进行预处理，本研究成功降低了训练数据离散性的不利影响，这一步骤对提高模型预测精度至关重要。

引入 KF/KS 对试验数据进行预处理，可以降低训练数据离散性的不利影响。

(3) 模型训练和物理模型的结合：GP 模型通过其均值函数利用已知的物理模型指导模型训练过程。

基于 KF/KS 技术的应用, 本研究进一步强化了物理模型的约束, 从而不仅提升了训练效率, 还改善了模型的预测效果。

## 参考文献

- [1] Chang, T.P., Chuang, F.C. and Lin, H.C. (1996) A Mix Proportioning Methodology for High-Performance Concrete. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, **19**, 645-655. <https://doi.org/10.1080/02533839.1996.9677830>
- [2] Yeh, I.-C. (1998) Modeling of Strength of High-Performance Concrete Using Artificial Neural Networks. *Cement and Concrete Research*, **28**, 1797-1808. [https://doi.org/10.1016/S0008-8846\(98\)00165-3](https://doi.org/10.1016/S0008-8846(98)00165-3)
- [3] Bharatkumar, B.H., Narayanan, R., Raghuprasad, B.K., et al. (2001) Mix Proportioning of High Performance Concrete. *Cement and Concrete Composites*, **23**, 71-80. [https://doi.org/10.1016/S0958-9465\(00\)00071-8](https://doi.org/10.1016/S0958-9465(00)00071-8)
- [4] Lim, C.-H., Yoon, Y.-S. and Kim, J.-H. (2004) Genetic Algorithm in Mix Proportioning of High-Performance Concrete. *Cement and Concrete Research*, **34**, 409-420. <https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2003.08.018>
- [5] Marvila, M.T., de Azevedo, A.R.G., de Matos, P.R., et al. (2021) Materials for Production of High and Ultra-High Performance Concrete: Review and Perspective of Possible Novel Materials. *Materials*, **14**, Article 4304. <https://doi.org/10.3390/ma14154304>
- [6] Neville, A. and Aitcin, P.C. (1998) High Performance Concrete—An Overview. *Materials and Structures*, **31**, 111-117. <https://doi.org/10.1007/BF02486473>
- [7] Aitcin, P.C. (2003) The Durability Characteristics of High Performance Concrete: A Review. *Cement and Concrete Composites*, **25**, 409-420. [https://doi.org/10.1016/S0958-9465\(02\)00081-1](https://doi.org/10.1016/S0958-9465(02)00081-1)
- [8] Nematzadeh, M. and Naghipour, M. (2012) Compressive Strength and Modulus of Elasticity of Freshly Compressed Concrete. *Construction and Building Materials*, **34**, 476-485. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2012.02.055>
- [9] Mesbah, H.A., Lachemi, M. and Aitcin, P.C. (2002) Determination of Elastic Properties of High-Performance Concrete at Early Ages. *Materials Journal*, **99**, 37-41. <https://doi.org/10.14359/11314>
- [10] Wang, R., Hu, Z., Li, Y., et al. (2022) Review on the Deterioration and Approaches to Enhance the Durability of Concrete in the Freeze-Thaw Environment. *Construction and Building Materials*, **321**, Article 126371. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2022.126371>
- [11] Wang, R., Zhang, Q. and Li, Y. (2022) Deterioration of Concrete under the Coupling Effects of Freeze-Thaw Cycles and Other Actions: A Review. *Construction and Building Materials*, **319**, Article 126045. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.126045>
- [12] Demir, F. (2008) Prediction of Elastic Modulus of Normal and High Strength Concrete by Artificial Neural Networks. *Construction and Building Materials*, **22**, 1428-1435. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2007.04.004>
- [13] Teng, T.L., Chu, Y.A., Chang, F.A., et al. (2004) Calculating the Elastic Moduli of Steel-Fiber Reinforced Concrete Using a Dedicated Empirical Formula. *Computational Materials Science*, **31**, 337-346. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2004.04.003>
- [14] Narayanan, N. and Ramamurthy, K. (2000) Structure and Properties of Aerated Concrete: A Review. *Cement and Concrete Composites*, **22**, 321-329. [https://doi.org/10.1016/S0958-9465\(00\)00016-0](https://doi.org/10.1016/S0958-9465(00)00016-0)
- [15] Williams, C.K. and Rasmussen, C.E. (2006) Gaussian Processes for Machine Learning. MIT Press, Cambridge, MA, 4.
- [16] Peng, B., Wei, S., Zong, G., et al. (2019) Shear Resistance Estimation for Unreinforced Masonry Walls Based on Gaussian Process Models. *Advances in Structural Engineering*, **22**, 831-845. <https://doi.org/10.1177/1369433218802435>
- [17] Peng, B., Wang, D.D., Zong, G., et al. (2022) Calculation of Reliability Index for In-Plane Shear Failure of Unreinforced Masonry Walls Based on Gaussian Process Model. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, **26**, 1322-1335. <https://doi.org/10.1080/19648189.2019.1708467>
- [18] Dao, D.V., Adeli, H., Ly, H.B., et al. (2020) A Sensitivity and Robustness Analysis of GPR and ANN for High-Performance Concrete Compressive Strength Prediction Using a Monte Carlo Simulation. *Sustainability*, **12**, Article 830. <https://doi.org/10.3390/su12030830>
- [19] 张研, 苏国韶, 燕柳斌. 高强混凝土强度预测的高斯过程机器学习模型[J]. 混凝土, 2011(11): 18-20.
- [20] Hussain, F., Ali Khan, S., Khushnood, R.A., et al. (2022) Machine Learning-Based Predictive Modeling of Sustainable Lightweight Aggregate Concrete. *Sustainability*, **15**, Article 641. <https://doi.org/10.3390/su15010641>
- [21] Chu, S.H., Kurumisawa, K. and Kong, Y.K. (2023) Physically Explicable Mathematical Model for Strength Prediction of UHPFRC. *Engineering Structures*, **275**, Article 115191. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.115191>

- [22] Yazdi, J.S., Kalantary, F. and Yazdi, H.S. (2013) Prediction of Elastic Modulus of Concrete Using Support Vector Committee Method. *Journal of Materials in Civil Engineering*, **25**, 9-20. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)MT.1943-5533.0000507](https://doi.org/10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0000507)
- [23] 中华人民共和国住房和城乡建设部. GB 50010-2010 混凝土结构设计规范[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2010.
- [24] ACI Committee (2014) Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-14). American Concrete Institute, Farmington Hills, MI.
- [25] ACI Committee (2010) Report on High-Strength Concrete (ACI 363R-10). American Concrete Institute, Farmington Hills, MI.
- [26] SETRA and AFGC (2002) Ultra High Performance Fiber-Reinforced Concretes-Interim Recommendations (Bétons-Fibrés à Ultra-Hautes Performances-Recommandations Provisoires).
- [27] European Committee for Standardization (2004) Eurocode 2: Design of Concrete Structures-Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings.
- [28] Canadian Standards Association (2004) Design of Concrete Structures. Ontario.
- [29] FIP-CEB (1990) High Strength Concrete: State-of-the-Art Report, Bulletin d'Information No. 197. Lausanne, Switzerland.
- [30] NorgesStandardiseringsforbund (1992) Concrete Structures—Design Rules, NS 3473.
- [31] Alsaman, A., Dang, C.N., Prinz, G.S., *et al.* (2017) Evaluation of Modulus of Elasticity of Ultra-High Performance Concrete. *Construction and Building Materials*, **153**, 918-928. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2017.07.158>
- [32] Ma, J., Orgass, M., Dehn, F., *et al.* (2004) Comparative Investigations on Ultra-High Performance Concrete with and without Coarse Aggregates. *Proceedings of the International Symposium on Ultra High Performance Concrete*, Kassel, 13-15 September 2004, 13-15.
- [33] Sritharan, S., Bristow, B. and Perry, V. (2003) Characterizing an Ultra-High Performance Material for Bridge Applications under Extreme Loads. *Proceedings of the 3rd International Symposium on High Performance Concrete*, Orlando, 19-22 October 2003, 7.
- [34] 郭晓宇, 亢景付, 朱劲松. 超高性能混凝土单轴受压本构关系[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2017, 47(2): 369-376.
- [35] Ahmad, S., Zubair, A. and Maslehuddin, M. (2015) Effect of Key Mixture Parameters on Flow and Mechanical Properties of Reactive Powder Concrete. *Construction and Building Materials*, **99**, 73-81. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2015.09.010>
- [36] Graybeal, B.A. (2007) Compressive Behavior of Ultra-High-Performance Fiber-Reinforced Concrete. *Materials Journal*, **104**, 146-152. <https://doi.org/10.14359/18577>
- [37] Ma, H., Yan, L., Xia, Y., *et al.* (2020) Kalman Filtering and Information Fusion. Springer, Singapore. <https://doi.org/10.1007/978-981-15-0806-6>
- [38] Hennig, P., Osborne, M.A. and Kersting, H.P. (2022) Probabilistic Numerics: Computation as Machine Learning. Cambridge University Press, Cambridge. <https://doi.org/10.1017/9781316681411>