Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 149-155
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.12029 Published Online July 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

A Filled Function Method of Finding Weak Efficient Minimizer for Convex Multi-objective Optimization*

Ying Zhang, Yingtao Xu
Department of Mathematics, Physics and Information Engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua
Email: znuzy@shu.edu.cn
Received: Mar. 25th, 2011; revised: Apr. 20th, 2011; accepted: Apr. 23rd, 2011.

Abstract: To a kind of multi-objective optimization problem, which objective function is convex vector function and which constraints are box sets, firstly we use linear weighted method to turn it into nonconvex single-objective optimization problem, secondly we get the global minimizer of the single-objective optimization problem by implying the filled function method, then we attain the weak efficient minimizer of the prime multi-objective optimization problem.

Keywords: Operations Research; Multi-Objective Programming; Filled Function; Local Minimizer; Global Minimizer

求解一类凸多目标规划最小弱有效解的填充函数法*

张 莹，徐应涛
浙江师范大学数理与信息工程学院，金华
Email: znuzy@shu.edu.cn
收稿日期：2011 年 3 月 25 日；修回日期：2011 年 4 月 20 日；录用日期：2011 年 4 月 23 日

摘 要：针对一类目标函数为凸向量值函数且约束为箱子集的多目标规划，先利用线性加权和法将其转化为非凸单目标规划，再利用填充函数法求得该单目标规划的全局最优解，从而得到原规划的最小弱有效解。

关键词：运筹学；多目标规划；填充函数；局部极小点；全局极小点

1. 引言

多目标规划作为最优化的一个重要分支，它主要研究在某种意义下多个数值目标的同时最优化问题，是当前计算数学、应用数学以及工程优化中较为活跃的研究领域之一。近年来，关于多目标规划的研究十分活跃，如[1-3]，但由其自身的复杂性，针对规划本身直接求解的研究较少。本文采用间接方法，将多目标规划转化为单目标规划，再利用填充函数求解。

考虑如下的凸多目标规划问题(*VP*)：

$$\begin{aligned} \min\quad & f(x)=\left(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_p(x)\right)^{\mathrm{T}} \\ s.t.\quad & l_i\le x_i\le u_i,\quad i=1,\cdots,n \end{aligned} \tag{1}$$

其中函数 $f:R^n\to R^p$ 是凸向量值函数，$-\infty<l_i<u_i$，$i=1,\cdots,n$ 。

针对规划(*VP*)，利用线性加权和法将其转化为如下单目标规划问题$(SP)_1$：

$$\begin{aligned} \min\quad & \lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\cdots+\lambda_p f_p(x) \\ s.t.\quad & l_i\le x_i\le u_i,\quad i=1,\cdots,n \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\lambda\in\Lambda^+=\left\{\lambda=\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p\right)^{\mathrm{T}}\middle|\lambda_j\ge 0,\sum_{j=1}^{p}\lambda_j=1\right\}$.

*基金项目：国家自然科学基金资助项目(No. 11001248)。

引理 1.1[4] 对每个给定的 $\overline{\lambda} \in \Lambda^+$，相应于$(SP)_1$的最优解必是$(VP)$的弱有效解。

引理 1.2[4] 对(VP)的任一弱有效解$\overline{x}$，都必存在一个$\overline{\lambda} \in \Lambda^+$，使$\overline{x}$是$(SP)_1$的最优解。

以上两个引理说明，对凸多目标规划来说，当取遍$\overline{\lambda} \in \Lambda^+$时，通过求$(SP)_1$的最优解便可得到$(VP)$的弱有效解集，且$(VP)$的任一弱有效解$\overline{x}$，必存在一个$\overline{\lambda} \in \Lambda^+$，使$\overline{x}$是$(SP)_1$的最优解。因此，$(SP)_1$的全局最优解一定是$(VP)$的弱有效解，这个解就称为最小弱有效解，定义如下：

定义 1.1 如果$\left(x^*,\lambda^*\right)$是$(SP)_1$的全局最优解，则称$x^*$是(VP)的最小弱有效解。

但求解$(SP)_1$的全局最优解时，每次需选定一个$\lambda\left(\lambda \in \Lambda^+\right)$，这为$(SP)_1$的求解带来一定的困难。本文视$\lambda\left(\lambda \in \Lambda^+\right)$为变量，令

$$\begin{aligned}F\left(x,\lambda\right) &= \lambda_1 f_1\left(x\right)+\lambda_2 f_2\left(x\right)+\cdots+\lambda_{p-1} f_{p-1}\left(x\right)\\ &\quad +(1-\sum_{j=1}^{p-1}\lambda_j)f_p\left(x\right)\end{aligned}$$

可得如下非凸单目标规划问题$(SP)_2$：

$$\begin{aligned}\min\quad & F\left(x,\lambda\right) \\ s.t.\quad & l_i \le x_i \le u_i, \quad i=1,\cdots,n \\ & 0 \le \lambda_j \le 1, \quad j=1,\cdots,p-1\end{aligned} \tag{3}$$

从而，若$\left(x^*,\lambda^*\right)$是$(SP)_2$的全局最优解，则$x^*$是$(VP)$的最小弱有效解。

$(SP)_2$是$n+p-1$个变量的非凸非线性规划问题，而填充函数法是一种求解非凸非线性规划全局最优解的有效方法。利用$(SP)_2$本身的特点并结合填充函数的优点，本文给出了求解$(SP)_2$全局最优解，即(VP)最小弱有效解的一类新的填充函数法。

2. 新的填充函数及其性质

2.1. 问题表述

填充函数法最先由葛仁溥[5]提出，是一类较为有效的确定性全局优化方法。它在当前局部极小点处构造填充函数，通过极小化填充函数迅速跳出当前局部极小点达到函数值更小的局部极小点，循环运算直至找到全局极小点。填充函数法提供了一个利用局部优化工具解决全局优化问题的方法，因此受到理论及实际工作者的欢迎，有很多学者对此作了进一步的研究，如[6-9]。

但这些文献中提出的填充函数，由于参数的选取与局部极小点的谷域的半径有关且很敏感，计算性能不理想；并要求目标函数二次连续可微以及局部极小点的个数有限，但实际应用时目标函数有可能是不可微或者有无限多个局部极小点。这就促使我们去寻找具有易调节参数且更好性质的填充函数。

考虑如下的规划问题：

$$\begin{aligned}\min\quad & f\left(x\right) \\ s.t.\quad & x \in S\end{aligned} \tag{4}$$

其中$S=\left\{x \in R^n \left| a_i \le x_i \le b_i, i=1,\cdots,n\right.\right\}$，$-\infty < a_i < b_i < +\infty$，$i=1,\cdots,n$函数$f\left(x\right)$是 Lipschitz 连续的且 Lipschitz 常数为L。

记$g_i\left(x\right)=a_i-x_i$，$i=1,\cdots,n$，$g_i\left(x\right)=x_i-b_i$，$i=n+1,\cdots,2n$，则(4)等价于以下问题$(P)$：

$$\begin{aligned}\min\quad & f\left(x\right) \\ s.t.\quad & x \in \Omega\end{aligned} \tag{5}$$

其中$\Omega=\left\{x \in R^n \left| g_i\left(x\right) \le 0, i=1,\cdots,2n\right.\right\}$。记$L(P)$为$(P)$的所有局部极小点的集合，$G(P)$为$(P)$的所有全局极小点的集合，假设$x_1^*$是$f\left(x\right)$的当前局部极小点，$L^{x_1^*}=\left\{x \in L\left(P\right): f\left(x\right)=f\left(x_1^*\right)\right\}$是有界闭集，假设$(P)$的不同局部极小点的个数可以是无限的，但不同局部极小值的个数是有限的。

填充函数的最初定义由葛仁溥[5]提出如下：

定义 2.1 函数$P\left(x,x_1^*\right)$被称为$f\left(x\right)$在点x_1^*处的填充函数，若$P\left(x,x_1^*\right)$满足以下性质：

$(P1)$ x_1^*是$P\left(x,x_1^*\right)$的严格局部极大点，且$f\left(x\right)$在x_1^*的盆谷B_1^*是$P\left(x,x_1^*\right)$在山丘的一部分；

$(P2)$ 凡是比x_1^*的盆谷B_1^*高的盆谷处，不会有$P\left(x,x_1^*\right)$的局部极小点或平稳点；

$(P3)$ 若存在盆谷B_2^*低于盆谷B_1^*，则一定存在$x' \in B_2^*$，使得在x'和x_1^*连线上存在$P\left(x,x_1^*\right)$的局部极小点。

该填充函数的定义依赖于目标函数$f\left(x\right)$的盆谷和山丘的概念，这就需要假设$f\left(x\right)$仅有有限个极小点。不利用函数的盆谷和山丘的概念，我们改进填充函数如下：

定义 2.2 函数 $P\left(x,x_1^*\right)$ 被称为 $f\left(x\right)$ 在点 x_1^* 处的填充函数，若 $P\left(x,x_1^*\right)$ 满足以下性质：

$(P1)$ x_1^* 是 $P\left(x,x_1^*\right)$ 在 R^n 的严格局部极大点；

$(P2)$ 对任意的 $x\in\Omega_1\setminus x_1^*$ 或 $x\in R^n\setminus\Omega$，有 $0\notin\partial P\left(x,x_1^*\right)$，这里

$$\Omega_1=\left\{x\in R^n\left|f\left(x\right)\ge f\left(x_1^*\right),g_i\left(x\right)\le 0,i=1,\cdots,2n\right.\right\}$$

$\partial P\left(x,x_1^*\right)$ 是 $P\left(x,x_1^*\right)$ 在点 x 处的广义梯度；

$(P3)$ 若 $\Omega_2=\left\{x\left|f\left(x\right)<f\left(x_1^*\right),x\in\Omega\right.\right\}$ 非空，则存在 $x_0^*\in\Omega_2$ 使得 x_0^* 是 $P\left(x,x_1^*\right)$ 的局部极小点。

定义 2.2 表明若 $P\left(x,x_1^*\right)$ 是满足定义 2.2 的填充函数且 x_1^* 不是全局极小点，则在极小化 $P\left(x,x_1^*\right)$ 的过程中，一定会找到 $\bar{x}$ 满足 $f\left(\bar{x}\right)<f\left(x_1^*\right)$，从 $\bar{x}$ 出发利用局部搜索可达到一个函数值比 $f\left(x_1^*\right)$ 更低的极小点，从而跳出当前局部极小点，重复此过程直到找到全局极小点。

2.2. 新的单参数填充函数及其性质

本节提出一个新的单参数填充函数：

$$\begin{aligned}&P\left(x,x_1^*,\mu\right)\\&=-\left\|x-x_1^*\right\|+\mu\left(f\left(x\right)-f\left(x_1^*\right)\right)+\frac{1}{\mu}\\&\quad+\frac{1}{\mu}\min\left[0,\max\left(f\left(x\right)-f\left(x_1^*\right),g_i\left(x\right),i=1,\cdots,2n\right)\right]\end{aligned}$$

其中 x_1^* 是 $f\left(x\right)$ 的当前局部极小点，$\|\cdot\|$ 是欧几里德范数。

下面的定理 2.1～2.3 证明 $P\left(x,x_1^*,\mu\right)$ 是满足定义 2.2 的填充函数。

定理 2.1 假设 $x_1^*\in L\left(P\right)$，若 $0<\mu<\dfrac{1}{L}$，则 x_1^* 是 $P\left(x,x_1^*,\mu\right)$ 的严格局部极大点。

证明 因为 $x_1^*\in L\left(P\right)$，则存在 x_1^* 的邻域 $O\left(x_1^*,\delta_1\right)$，$\delta_1>0$，使得对任意的 $x\in O\left(x_1^*,\delta_1\right)\cap\Omega$，有 $f\left(x\right)\ge f\left(x_1^*\right)$。下面考虑两种情况：

情况 1：对任意的 $x\in O\left(x_1^*,\delta_1\right)\cap\Omega$，有

$$\min\left[0,\max\left(f\left(x\right)-f\left(x_1^*\right),g_i\left(x\right),i=1,\cdots,2n\right)\right]=0$$

情况 2：对任意的 $x\in O\left(x_1^*,\delta_1\right)\cap\left(R^n\setminus\Omega\right)$，至少存在一个 $i_0\in\{1,\cdots,2n\}$ 使得 $g_{i_0}\left(x\right)>0$，则

$$\min\left[0,\max\left(f\left(x\right)-f\left(x_1^*\right),g_i\left(x\right),i=1,\cdots,2n\right)\right]=0$$

因此，对任意的 $x\in O\left(x_1^*,\delta_1\right)$，$x\ne x_1^*$，当 $0<\mu<\dfrac{1}{L}$ 时，有

$$\begin{aligned}P\left(x,x_1^*,\mu\right)&=-\left\|x-x_1^*\right\|+\mu\left(f\left(x\right)-f\left(x_1^*\right)\right)\\&\le-\left\|x-x_1^*\right\|+\mu L\left\|x-x_1^*\right\|\\&<0=P\left(x_1^*,x_1^*,\mu\right)\end{aligned}$$

则 x_1^* 是 $P\left(x,x_1^*,\mu\right)$ 的严格局部极大点。

定理 2.2 假设 $x_1^*\in L\left(P\right)$ 且 $x\in\Omega_1\setminus x_1^*$ 或 $x\in R^n\setminus\Omega$，当 $0<\mu<\dfrac{1}{L}$，有 $0\notin\partial P\left(x,x_1^*,\mu\right)$。

证明 考虑如下两种情况：

情况 1：对任意的 $x\in\Omega_1\setminus x_1^*$，有 $f\left(x\right)\ge f\left(x_1^*\right)$，$g_i\left(x_1^*\right)\le 0$，$g_i\left(x\right)\le 0$，$i=1,\cdots,2n$。则

$$\min\left[0,\max\left(f\left(x\right)-f\left(x_1^*\right),g_i\left(x\right),i=1,\cdots,2n\right)\right]=0$$

情况 2：对任意的 $x\in R^n\setminus\Omega$，至少存在一个 $i_0\in\{1,\cdots,2n\}$ 使得 $g_{i_0}\left(x\right)>0$，则

$$\min\left[0,\max\left(f\left(x\right)-f\left(x_1^*\right),g_i\left(x\right),i=1,\cdots,2n\right)\right]=0$$

因此，由 $P\left(x,x_1^*,\mu\right)=-\left\|x-x_1^*\right\|+\mu\left(f\left(x\right)-f\left(x_1^*\right)\right)$，得

$$\partial P\left(x,x_1^*,\mu\right)\subset-\frac{x-x_1^*}{\left\|x-x_1^*\right\|}+\mu\partial f\left(x\right)$$

记 $d=\dfrac{x-x_1^*}{\left\|x-x_1^*\right\|}$，有

$$\begin{aligned}\left\langle\partial P\left(x,x_1^*,\mu\right),d\right\rangle&\subset-\frac{\left\langle x-x_1^*,d\right\rangle}{\left\|x-x_1^*\right\|}+\mu\left\langle\xi,d\right\rangle\\&=-\frac{\left(x-x_1^*\right)^T\left(x-x_1^*\right)}{\left\|x-x_1^*\right\|^2}+\mu\cdot\frac{\left\langle\xi,x-x_1^*\right\rangle}{\left\|x-x_1^*\right\|}\\&\le-1+\mu\left\|\xi\right\|\le-1+\mu L<0\end{aligned}$$

这里 $\xi\in\partial f\left(x\right)$。因此，对任意的 $\varsigma\in\partial P\left(x,x_1^*,\mu\right)$，有 $\varsigma^{\mathrm{T}}d<0$，即 $0\notin\partial P\left(x,x_1^*,\mu\right)$。

定理 2.3 假设 $x_1^*\in L\left(P\right)$ 但 $x_1^*\notin G\left(P\right)$ 且

$cl\,\mathrm{int}\,\Omega = cl\Omega$。当 $0<\mu<\frac{1}{L}$ 且 μ 适当小时，存在点 $x_0^*\in\Omega_2$ 使得 x_0^* 是 $P(x,x_1^*,\mu)$ 的一个局部极小点。

证明 因为 $x_1^*\in L(P)$ 但 $x_1^*\notin G(P)$，则存在 $f(x)$ 的另一个局部极小点 x_2^* 且 $f(x_2^*)<f(x_1^*)$，$g_i(x_2^*)\le 0$，$i=1,\cdots,2n$。因为 $f(x)$ 是 Lipschitz 连续的，$g_i(x),i=1,\cdots,2n$ 连续且 $cl\,\mathrm{int}\,\Omega=cl\Omega$，则存在点 $x_3^*\in\mathrm{int}\,\Omega$ 使得 $(x_3^*)<f(x_1^*)$，$g_i(x_3^*)<0$，$i=1,\cdots,2n$。

当 $0<\mu<\frac{1}{L}$ 时，有

$$\begin{aligned}
&P(x_3^*,x_1^*,\mu)\\
&=-\|x_3^*-x_1^*\|+\mu\left(f(x_3^*)-f(x_1^*)\right)\\
&\quad+\frac{1}{\mu}\max\left[f(x_3^*)-f(x_1^*),g_i(x_3^*),i=1,\cdots,2n\right]\\
&\le(\mu L-1)\|x_3^*-x_1^*\|\\
&\quad+\frac{1}{\mu}\max\left[f(x_3^*)-f(x_1^*),g_i(x_3^*),i=1,\cdots,2n\right]\\
&<\frac{1}{\mu}\max\left[f(x_3^*)-f(x_1^*),g_i(x_3^*),i=1,\cdots,2n\right]\\
&<0
\end{aligned}$$

则 $\lim\limits_{\mu\to 0}P(x_3^*,x_1^*,\mu)=-\infty$。

对任意的 $x\in\partial\Omega$，至少存在一个 $i_0\in\{1,\cdots,2n\}$ 使得 $g_{i_0}(x)=0$，则

$$\min\left[0,\max\left(f(x)-f(x_1^*),g_i(x),i=1,\cdots,2n\right)\right]=0$$

因此当 $0<\mu<\frac{1}{L}$ 时，有

$$\begin{aligned}
P(x,x_1^*,\mu)&=-\|x-x_1^*\|+\mu\left(f(x)-f(x_1^*)\right)\\
&\le(\mu L-1)\|x-x_1^*\|
\end{aligned}$$

从而 μ 适当小时，必有 $P(x_3^*,x_1^*,\mu)<P(x,x_1^*,\mu)$。

因此

$$\begin{aligned}
\min_{x\in\Omega}P(x,x_1^*,\mu)=\min_{x\in\Omega\setminus\partial\Omega}P(x,x_1^*,\mu)&=P(x_0^*,x_1^*,\mu)\\
&\le P(x_3^*,x_1^*,\mu)
\end{aligned}$$

且 $\Omega\setminus\partial\Omega$ 是开集，则当 $0<\mu<\frac{1}{L}$ 且 μ 适当小时，$x_0^*\in\Omega\setminus\partial\Omega$ 是 $P(x,x_1^*,\mu)$ 的局部极小点，且由 $P(x,x_1^*,\mu)\le P(x_3^*,x_1^*,\mu)$ 必有 $f(x_0^*)<f(x_1^*)$，$g_i(x_0^*)<0$，$i=1,\cdots,2n$，即 $x_0^*\in\Omega_2$。

下面的定理 2.4 说明该填充函数有一个很好的性质,即距离当前局部极小点 x_1^* 越远，函数值越小，从而保证在极小化填充函数的过程中不会回到原来的盆谷，极小点必在目标函数值低于 $f(x_1^*)$ 的区域得到。

定理 2.4 假设 $x_1^*\in L(P)$，$0<\|x_1-x_1^*\|+\eta<\|x_2-x_1^*\|$，$\|x_1-x_2\|\le\sigma,\sigma,\eta>0$ 或 $x_1\notin\Omega$ 或 $x_2\notin\Omega$，且 $f(x_1)\ge f(x_1^*)$，$f(x_2)\ge f(x_1^*)$ 若

$$0<\mu<\min\left\{\frac{\eta}{L\sigma},\frac{1}{L}\right\}$$

则

$$P(x_2,x_1^*,\mu)<P(x_1,x_1^*,\mu)<0=P(x_1^*,x_1^*,\mu)$$

证明 对满足条件的 x_1 和 x_2，易得

$$\min\left[0,\max\left(f(x_1)-f(x_1^*),g_i(x_1),i=1,\cdots,2n\right)\right]=0$$

和

$$\min\left[0,\max\left(f(x_2)f(x_1^*),g_i(x_2),i=1,\cdots,2n\right)\right]=0$$

考虑

$$\begin{aligned}
&P(x_2,x_1^*,\mu)-P(x_1,x_1^*,\mu)\\
&-\left(\|x_2-x_1^*\|-\|x_1-x_1^*\|\right)+\mu\left(f(x_2)-f(x_1)\right)\\
&\le-\left(\|x_2-x_1^*\|-\|x_1-x_1^*\|\right)+\mu L\|x_2-x_1\|\\
&=\left(\|x_2-x_1^*\|-\|x_1-x_1^*\|\right)\left(-1+\mu L\frac{\|x_2-x_1\|}{\|x_2-x_1^*\|-\|x_1-x_1^*\|}\right)\\
&\le\left(\|x_2-x_1^*\|-\|x_1-x_1^*\|\right)\left(-1+\mu L\frac{\sigma}{\eta}\right)\\
&<0
\end{aligned}$$

则当 $0<\mu<\min\left\{\frac{\eta}{L\sigma},\frac{1}{L}\right\}$ 时，结合定理 2.1，有

$$P(x_2,x_1^*,\mu)<P(x_1,x_1^*,\mu)<0=P(x_1^*,x_1^*,\mu)$$

3. 填充函数算法 NFFM 和数值实验

3.1. 填充函数算法 NFFM

基于以上讨论，我们给出填充函数算法 NFFM。

初始步

1. 选择一个摄动常数 δ，例如：$\delta:=0.1$。

2. 选择参数 μ 的一个下界 $\mu_L > 0$，例如：$\mu_L := 10^{-8}$。

3. 选择一个小数 $\hat{\mu} > 0$，例如：$\hat{\mu} = 0.1$.

4. 选择方向 $e_k, k = 1,2,\cdots,k_0, k_0 \geq 2n$，这里 n 是变量的维数。

5. $k := 1$.

主步

1. 以 x 为初始点，利用有约束局部搜索程序极小化原问题(P)，得到 $f(x)$ 第一个局部极小点 x_1^*。

2. 令 $\mu = 1$。

3. 构造填充函数：

$$
\begin{aligned}
&P\left(x, x_1^*, \mu\right) \\
&= -\left\|x - x_1^*\right\| + \mu\left(f(x) - f\left(x_1^*\right)\right) \\
&\quad + \frac{1}{\mu}\min\left[0, \max\left(f(x) - f\left(x_1^*\right), g_i(x), i = 1,\cdots,2n\right)\right]
\end{aligned}
$$

4. 若 $k > k_0$，转步 7；否则以 $x := x_1^* + \delta e_k$ 为初始点，利用无约束局部搜索程序极小化填充函数问题(F)，得到 $P\left(x, x_1^*, \mu\right)$ 一个局部极小点 x_k。

$$
(\mathrm{F}) \qquad \begin{aligned} \min \quad & P\left(x, x_1^*, \mu\right) \\ s.t. \quad & x \in R^n \end{aligned} \tag{6}
$$

5. 若 $x_k \notin \Omega$，令 $k := k + 1$，转步 4；否则下一步。

6. 若 x_k 满足 $f(x_k) < f\left(x_1^*\right)$，令 $x := x_k$ 且 $k := 1$，以 x 为新的初始点，利用有约束局部搜索程序极小化原问题(P)，得到 $f(x)$ 的另一个局部极小点 x_2^*，令 $x_1^* := x_2^*$，转步 2；否则下一步。

7. 减小 μ，令 $\mu := \hat{\mu}\mu$。

8. 若 $\mu \geq \mu_L$，令 $k := 1$，转步 3：否则算法停止，x_1^* 为全局极小点。

注：算法包括两个阶段，局部极小化阶段和填充阶段：

阶段 1：得到 $f(x)$ 的一个局部极小点 x_1^*。

阶段 2：构造 $P\left(x, x_1^*, \mu\right)$ 且极小化 $P\left(x, x_1^*, \mu\right)$。当找到满足 $f(x_k) < f\left(x_1^*\right)$ 的且在 Ω_2 内的 x_k 时，算法跳出阶段 2 并返回阶段 1，把 x_k 作为新的初始点寻找 $f(x)$ 的另一个局部极小点 x_2^*(如果存在的话)。

在主步 2 中令 $\mu = 1$，通过以上两阶段循环逐渐减小直到 μ 小于某个预设值，最后找到的局部极小点被认为是全局极小点，算法终止。

3.2. 数值实验

本节对 3 个凸多目标规划问题进行数值实验，在若干次迭代后都在最小弱有效解的某个邻域内终止，表明所给的填充函数算法是有效的。算法中运用复形调优法对原规划问题进行局部搜索，运用模式搜索法对填充函数问题进行局部搜索，算法终止条件为 $\mu \leq 10^{-8}$。计算结果见各表，表中记号如下：k 是寻找第 k 个局部极小点的迭代步数；μ 是寻找第 $k+1$ 个局部极小点时的参数值；$\left(x_k, \lambda_k\right)$ 是寻找第 k 个局部极小点时的新的初始点；$\left(x_k^*, \lambda_k^*\right)$ 是第 k 个局部极小点；$F\left(x_k, \lambda_k\right)$ 是第 k 个新的初始点的函数值；$F\left(x_k^*, \lambda_k^*\right)$ 是第 k 个局部极小点的函数值。

例 3.1.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) = \left(f_1(x), f_2(x), f_3(x)\right) \\
s.t. \quad & -4 \leq x_i \leq 4, \quad i = 1,2
\end{aligned}
$$

其中 $f_1(x) = 5x_1 + x_2$，$f_2(x) = \left|x_1 + x_2\right|$，$f_3(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_2$。

先利用线性加权和法将其转化为单目标规划问题(SP)$_2$:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & F(x, \lambda) \\
& = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \left(1 - \lambda_1 - \lambda_2\right) f_3(x) \\
s.t. \quad & -4 \leq x_i \leq 4, \quad i = 1,2 \\
& 0 \leq \lambda_j \leq 1, \quad j = 1,2
\end{aligned}
$$

运用算法找到了原问题的最小弱有效解 $x^* = (0,-3)^T$，最小弱有效值 $f\left(x^*\right) = -2.9982$，计算结果见表 1。

例 3.2.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) = \left(f_1(x), f_2(x)\right) \\
s.t. \quad & 0 \leq x_i \leq 3, \quad i = 1,2,3,4
\end{aligned}
$$

其中

$$
f_1(x) = \max\left\{g_1(x), g_2(x)\right\}, f_2(x) = g_3(x) - 5
$$

这里

$$
g_i(x) = g_0(x) + 10 \cdot h_i(x), \quad i = 1,2,3
$$

$$
g_0(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 - 5x_1 - 5x_2 - 21x_3 + 7x_4
$$

$$
h_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 + x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 8
$$

$$
h_2(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - x_1 - x_4 - 10
$$

Table 1. Computational results with initial point (1, 1, 0.2319, 0.1022)
表1. 计算结果－初始点(1, 1, 0.2319, 0.1022)

NFFM					
k	μ	(x_k, λ_k)	$F(x_k, \lambda_k)$	(x_k^*, λ_k^*)	$F(x_k^*, \lambda_k^*)$
1	-	(1, 1, 0.2319, 0.1022)	5.5912	(–0.0004, –0.921, 0.2286, 0.3002)	0.4645
2	0.1	(0, 0, 0.5319, 0.0002)	0	(–0.0001, –0.9232, 0.5219, 0.0003)	–0.0748
3	0.01	(–0.0003, –2.4231, 0.9991.0.0003)	–2.4181	(0, –3, 0.9998, 0.0001)	–2.9982

Table 2. Computational results with initial point (1, 1, 1, 2.5, 0.5)
表 2. 计算结果－初始点(1, 1, 1, 2.5, 0.5)

NFFM					
k	μ	(x_k, λ_k)	$F(x_k, \lambda_k)$	(x_k^*, λ_k^*)	$F(x_k^*, \lambda_k^*)$
1	-	(1, 1, 1, 2.5, 0.5)	26.75	(0, 1, 0, 2, 0.7091)	–6
2	0.1	(0.6078, 2.0003, 0.0003, 0.0319, 0.2317)	–22.9117	(0.9289, 0.862, 0.2453, 0.0803, 0.4308)	–35.9939
3	0.01	(0.4012, 0.2524, 0.2288, 0, 0.9812)	–49.4733	(0, 1, 1, 1, 0.5)	–65

Table 3. Computational results with initial point (0, 0, 0.1, 0.5)
表3. 计算结果－初始点(0, 0, 0.1, 0.5)

NFFM					
k	μ	(x_k, λ_k)	$F(x_k, \lambda_k)$	(x_k^*, λ_k^*)	$F(x_k^*, \lambda_k^*)$
1	-	(0, 0, 0.1 ,0.5)	4.4	(–1.9811, 2.4489, 0.2807, 0.4329)	3.2289
2	0.1	(0.0012, 0.2354, 0.6722, 0.0003)	0.3857	(0, 0, 0.999, 0.00001)	0.0001

$$h_3(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 - x_2 - x_4$$

先利用线性加权和法将其转化为单目标规划问题$(SP)_2$：

$$\begin{aligned} \min \quad & F(x,\lambda) = \lambda_1 f_1(x)(1-\lambda_1) + f_2(x) \\ s.t. \quad & 0 \le x_i \le 3, \quad i = 1,2,3,4 \\ & 0 \le \lambda_1 \le 1 \end{aligned}$$

运用算法找到了原问题的最小弱有效解$x^* = (0,1,1,1)^T$，最小弱有效值$f(x^*) = -65$，计算结果见表2。

例 3.3.

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x)) \\ s.t. \quad & -10 \le x_i \le 10, \quad i = 1,2 \end{aligned}$$

其中$f_1(x) = x_1^2 + x_2^2$，$f_2(x) = (2+x_1)^2 + (2-x_1)^2$，$f_3(x) = \mathrm{e}^{(x_1+x_2)^2}$

先利用线性加权和法将其转化为单目标规划问题$(SP)_2$：

$$\begin{aligned} \min \quad & F(x,\lambda) \\ & = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + (1-\lambda_1-\lambda_2) f_3(x) \\ s.t. \quad & -10 \le x_i \le 10, \quad i = 1,2 \\ & 0 \le \lambda_j \le 1, \quad j = 1,2 \end{aligned}$$

运用算法找到了原问题的最小弱有效解$x^* = (0,0)^T$，最小弱有效值$f(x^*) = 0.0001$，计算结果见表3。

4. 结论

本文针对一类凸多目标规划构造了形式简单的单参数填充函数，在理论分析的基础上给出了填充函数算法。数值实验表明该算法能够成功地找到所给问题的最小弱有效解，算法是有效的且参数易于调节。此外，在数值实验的局部搜索程序中，我们使用简单的复形调优法和模式搜索法，如果采用更有效的算法，如根据具体函数提供的梯度信息，相信可以得到更好的数值结果。

参考文献 (References)

[1] D. S. Liu, K. C. Tan, and S. Y. Huang. On solving multiobjective bin packing problems using evolutionary particle swarm optimization. European Journal of Operational Research, 2008, 190(2): 357-382.

[2] 仇秋生, 集值优化问题全局极小解集的连通性[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版), 2009, 32(3): 257-261.

[3] I. A. Baky. Solving multi-level multi-objective linear programming problems through fuzzy goal programming approach. Applied Mathematical Modelling, 2010, 34(9): 2377-2387.

[4] 林锉云, 董加礼. 多目标优化的方法与理论[M]. 长春: 吉林教育出版社, 1992.

[5] R. P. Ge. The theory of filled function methods for finding global minimizers of nonlinearly constrained minimization problems. Journal of Computational Mathematics, 1987, 5: 1-9.

[6] W. X. Zhu. A class of filled functions irrelevant to the number of local minimizers for global optimization. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2002, 22(4): 406-413.

[7] M. Kong. On the filled function method for nonsmooth program. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2004, 20(4): 149-154.

[8] C. J. Wang, Y. J. Yang, and J. Li. A new filled function method for unconstrained global optimization. Applied Mathematics and Computation, 2009, 225(1): 68-79.

[9] W. X. Wang, Y. L. Shang, and L. S. Zhang. A filled function method with one parameter for box constrained global optimization. Applied Mathematics and Computation, 2007, 194(1): 54-66.

