Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 58-72
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144111

Hans汉斯

分数布朗运动驱动的自排斥扩散的渐近行为与参数估计

薛红飞，闫理坦

东华大学理学院，上海

收稿日期：2024年2月18日；录用日期：2024年3月10日；发布日期：2024年4月17日

摘 要

在本文中，我们研究了Hurst指数 $\frac{1}{2} \le H < 1$ 的分数布朗运动驱动的自排斥扩散随机微分方程 $\mathrm{d}X_t^H = \mathrm{d}B_t^H + \theta\left(\int_0^t (1+s)^3 \mathrm{d}X_s^H\right)\mathrm{d}t + \nu \mathrm{d}t$ 解的长时间行为以及当 $\nu = 0$ 时 θ 最小二乘估计 $\hat{\theta}$，并讨论了 $\hat{\theta}$ 相合性和 $\hat{\theta}_T - \theta$ 的渐进分布。

关键词

参数估计，分数布朗运动，长时间行为

Asymptotic Behavior and Estimation of Self-Repelling Diffusion Driven by Fractional Brownian Motion (fBm)

Hongfei Xue, Litan Yan

College of Science, Donghua University, Shanghai

Received: Feb. 18th, 2024; accepted: Mar. 10th, 2024; published: Apr. 17th, 2024

Abstract

In this paper, we consider a self-repelling diffusion driven by a fractional Brownian motion with Hurst index $\frac{1}{2} \le H < 1$, $\mathrm{d}X_t^H = \mathrm{d}B_t^H + \theta\left(\int_0^t (1+s)^3 \mathrm{d}X_s^H\right)\mathrm{d}t + \nu \mathrm{d}t$, we prove asymptotic behavior of

文章引用: 薛红飞, 闫理坦. 分数布朗运动驱动的自排斥扩散的渐近行为与参数估计[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 58-72.
DOI: 10.12677/pm.2024.144111

the solution and the strong consistent of $\hat{\theta}$ when $\nu=0$, we also obtain the asymptotic distribution of $\hat{\theta}_T-\theta$.

Keywords

Parameter Estimation, Fractional Brownian Motion, Asymptotic Behavior

1. 引言

分数布朗运动(Fractional Brownian Motion)是一种重要的随机过程，其理解和分析离不开数学中的数与代数概念。在分数布朗运动中，数学上的概念和工具发挥着关键作用，帮助更好地建模和描述具有长期记忆性质的现象。通过数学中的代数表达式和运算规则，我们可以推导出分数布朗运动驱动的随机微分方程解的一些性质。同时，数学统计中的概念和技巧也能够帮助处理和分析方程中的参数估计问题，从而深入研究方程的特性和行为规律。因此，数与代数在分数布朗运动驱动的随机微分方程的理论和应用中扮演着至关重要的角色，为探索提供了坚实的基础和有效的工具。

1992 年，Durrett 和 Rogers [1]提出了聚合物生长形状的模型，也称为布朗聚合物模型，对应的随机微分方程的结构如下：

$$X_t=X_0+B_t+\int_0^t\int_0^s f\left(X_s-X_u\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}s,$$

其中 B 是 d 维标的准布朗运动，f 是满足利普希茨条件的连续函数。该模型是边缘(顶点)自交互随机漫步概念的连续模拟。在 $f(x)=g(x)x/\|x\|$ 和 $g(x)\ge 0$ 条件下，方程的解 X_t 被 Pemantle [2]证实是一个连续的过程，这个轨道依赖型随机微分方程可以看作是聚合物成型的模型，X_t 表示在时间 t 时聚合物末端所在的位置。如果对任意的 $x\in R^d$，函数 f 满足 $x\cdot f(x)\ge 0$ (换而言之，它更倾向于远离其之前到达过的位置)，则称方程的解为自排斥的。如果对任意的 $x\in R^d$，函数 f 满足 $x\cdot f(x)\le 0$ (换而言之，它更倾向于返回到其之前到达过的位置)，则称方程的解为自吸引的。值得注意的是，这种模型可以比拟为一个 Ornstein-Uhlenbeck 过程，因此，研究这类方程的渐近行为与参数估计是很有意义的。更多的研究可以参考 Nualart 和 Peccati [3]，Benaïm [4]等。

受启发，我们考虑随机微分方程

$$X_t^H=x+B_t^H+\theta\int_0^t\int_0^s(1+r)^3\mathrm{d}X_r^H\mathrm{d}s+\nu t \tag{1}$$

其中 $X_0^H=0$，B^H 为带有 Hurst 指数 $\frac{1}{2}\le H<1$ 的分数布朗运动，$\nu\in\mathbb{R}$。本文，将展开并证明下面的陈述：

(I) 假设 $\frac{1}{2}\le H<1$，定义 $\xi_\infty=\int_0^\infty\theta(1+r)^3\mathrm{e}^{-G(r)}\mathrm{d}B_r^H$

并且定义 $J^H(n;\theta)=\left\{J_t^H(n;\theta),t\ge 0\right\}$，$n=0,1,2,\cdots$ 通过 $J_t^H(0;\theta):=\theta(1+t)^3\mathrm{e}^{-G(t)}X_t$，

$$J_t^H(n;\theta):=\frac{\theta(1+t)^4}{4}\left(J_t^H(n-1;\theta)-(\xi_\infty+\nu)\lambda_{n-1}\right),\quad n\ge 1$$

其中 X_t 为的解。然后，有

$$J_t^H(n;\theta)\to(\xi_\infty+\nu)\lambda_n \tag{2}$$

其中

$$\lambda_0=1,\lambda_n=\frac{3\times(2\times3+1)\times\cdots\times(3n+n-1)}{4^n}$$

在 L^2 中，当 t 趋于无穷时，对每个 $n=0,1,2,\cdots$ 几乎处处成立。

(II) 在公式(1)中，设 $\nu=0$ 时，通过使用 Hu 和 Nualart [5]介绍的最小二乘估计方法，假设过程 $\{X_t^H,t>0\}$ 在连续情况下，得到 θ 的最小二乘估计量

$$\hat{\theta}_T=\frac{\int_0^T Y_t^H\mathrm{d}X_t^H}{\int_0^T\left(Y_t^H\right)^2\mathrm{d}t},$$

其中 $Y_t^H=\int_0^t(1+r)^3\mathrm{d}X_r^H,t\geq0$ 则：

1) $\hat{\theta}$ 是强相合的

2) $(T+1)^{3(H-1)}\mathrm{e}^{G(t)}\left(\hat{\theta}-\theta\right)\to2\theta^{1-H}\sqrt{H\Gamma(2H)}\dfrac{N}{\xi_\infty}$

当 T 趋向于无穷的时。

本文结构如下，在第 2 部分简要回顾一些关于分数 Brown 运动的基本理论和 Malliavin 积分以及最小二乘估计方法。第 3 部分，证明了上述结论(I)。第 4 部分，证明了上述结论(II)。

2. 预备知识

在本部分中，将介绍分数布朗运动的一些基本定义和结果，以及参数估计将用到的最小二乘估计方法。设 $0<H<1$，Hurst 参数为 H 的分数布朗运动为连续 Gaussian 过程 $B^H=\{B_t^H,t\geq0\}$，定义在 $(\Omega,\mathcal{F}^H,P)$ 上使得 $\mathcal{F}^H$ 是一个由 B^H 生成的 σ -域。可以知道对于任意的 $t,s\geq0$ Gaussian 随机过程 $B^H=\{B_t^H,t\geq0\}$ 满足

$$E\left[B_t^HB_s^H\right]=\frac{1}{2}\left[t^{2H}+s^{2H}-|t-s|^{2H}\right],$$

$$E\left[B_t^H\right]=0$$

当 $H=1/2$，$B^{1/2}$ 与标准布朗运动 B 重合。当 $H\neq\frac{1}{2}$ 时，分数布朗运动既不是半鞅也不是马尔科夫过程，这时无法使用鞅论中经典的 Itô 型随机分析，当然也很难直接在分数布朗运动驱动的随机微分方程的研究中使用。作为一个高斯过程，我们可以构造关于 B^H 的变差随机积分。设 $\mathcal{H}$ 为示性函数 $1_{[0,t]},t\in[0,T]$ 生成的线性空间 $\mathcal{E}$，满足如下的内积形式：

$$\left\langle1_{[0,s]},1_{[0,t]}\right\rangle_{\mathcal{H}}=\frac{1}{2}\left[t^{2H}+s^{2H}-|t-s|^{2H}\right]$$

对于任意的 $s,t\in[0,T]$。当 $\frac{1}{2}<H<1$ 时可以给出 $\mathcal{H}$ 的形式如下：

$$\mathcal{H}=\left\{\varphi:[0,T]\to\mathbb{R}\,\middle|\,\|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2=\alpha_H\int_0^T\int_0^T\varphi(t)\varphi(s)|t-s|^{2H-2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t<\infty\right\}$$

其中 $\alpha_H=H(2H-1)$。可以在 $\mathcal{E}$ 上定义一个线性映射 $\varphi\mapsto B^H(\varphi)$，映射的具体形式如下：

$$1_{[0,t]}\mapsto B^H\left(1_{[0,t]}\right):=\int_0^T1_{[0,t]}\mathrm{d}B_s^H=B_t^H,\quad t\in[0,T]$$

其中$T>0$，则有，这个线性映射是一个从$\mathcal{E}$到B^H生成的 Gaussian 空间的等距线性映射，并且它可以扩展到$\mathcal{H}$。这里的线性映射是等距的指的是映射保持向量之间的距离不变，对于任意两个向量 u 和 v，线性映射 T 满足$\|T(u)-T(v)\|=\|u-v\|$，其中$\|.\|$表示向量的范数或长度。这个线性映射也被称为关于 B^H 的维纳积分，表示为

$$B^H(\varphi)=\int_0^T \varphi(t)\mathrm{d}B_t^H \tag{3}$$

其中对于任意的函数 $\varphi\in\mathcal{H}$。如果对于任意的$T>0$，上述的维纳积分都可以很好的表示，那么我们可以进一步定义如下的积分：

$$\int_0^\infty \varphi(t)\mathrm{d}B_t^H$$

其中对于任意的函数φ满足

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 := \alpha_H\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(t)\varphi(s)|t-s|^{2H-2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t<\infty$$

因此，我们称公式(3)为广义维纳积分。

用$\mathcal{S}$表示如下形式的光滑函数集：

$$F=f\left(B^H(\varphi_1),B^H(\varphi_2),\cdots,B^H(\varphi_n)\right) \tag{4}$$

其中 $f\in C_b^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ (f 和其所有导数函数都是有界的)并且$\varphi_i\in\mathcal{H}$。公式(4)的函数$ F $的导数算子 D^H (Malliavin 导数)被定义为

$$D^H F=\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(B^H(\varphi_1),B^H(\varphi_2),\cdots,B^H(\varphi_n)\right)\varphi_j$$

导数算子(derivative operator)是指将可微函数映射到其导数函数的线性算子。上述导数算子是一个从$L^2(\Omega)$到$L^2(\Omega;\mathcal{H})$的闭算子。若算子的定义域和共轭空间上的范数拓扑的交集是非空的，且该算子在该交集上连续，则称其为闭算子(closable operator)。我们用$\mathbb{D}^{1,2}$表示$\mathcal{S}$的闭包，通过如下的范数：

$$\|F\|_{1,2} := \sqrt{E|F|^2+E\|D^H F\|_{\mathcal{H}}^2}$$

发散积分δ^H是导数算子D^H的伴随。也就是说，我们说$L^2(\Omega;\mathcal{H})$中的随机变量u属于发散算子δ^H的域，用$\mathrm{Dom}\left(\delta^H\right)$表示，如果

$$E\left|\left\langle D^H F,u\right\rangle_{\mathcal{H}}\right|\le c\|F\|_{L^2(\Omega)}$$

对于每一个$F\in\mathcal{S}$。在这种情况下，$\delta^H(u)$由对偶关系定义

$$E\left[F\delta^H(u)\right]=E\left\langle D^H F,u\right\rangle_{\mathcal{H}} \tag{5}$$

对于所有的$u\in\mathbb{D}^{1,2}$。则有$\mathbb{D}^{1,2}\subset\mathrm{Dom}\left(\delta^H\right)$和

$$\begin{aligned}E|\delta(u)|^2&=\alpha_H\int_0^T\int_0^T E[u_s u_t]|s-t|^{2H-2}\mathrm{d}s\mathrm{d}r\\&\quad+\alpha_H^2\int_0^T\int_0^T E\left[\left(D_x^H u_s\right)\left(D_y^H u_t\right)\right]|s-y|^{2H-2}|t-x|^{2H-2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{6}$$

对于所有的$u\in\mathbb{D}^{1,2}$。我们将使用符号

$$\delta^H(u)=\int_0^T u_s\delta B_s^H$$

表示过程 u 的 Skorohod 积分，并定义了不定 Skorohod 积分 $\int_0^t u_s \delta B_s^H = \delta^H\left(u1_{[0,t]}\right)$。

最小二乘法的原理，假设线性回归模型的拟合方程为 $y = ax + b$，那么残差平方和(损失函数)可以定义为

$$L = \sum_{i=1}^{n}\left(y^i - \left(ax^i + b\right)\right)^2$$

拟合目的是使残差平方和 L 尽可能地小，即实际值和预测值尽可能地靠近。根据高等数学中求极值的相关知识，通过对残差平方和 L 进行求导(对参数 a 和 b 进行求导)，导数为 0 时，该残差平方和将取极值，便可以得到对应参数的估计量。

设 $B^H = \left\{B_t^H, t \ge 0\right\}$ 是一个带有 Hurst 指数 $H\left(\frac{1}{2} \le H < 1\right)$ 的一维分数布朗运动，定义在 $\left(\Omega, \mathcal{F}^H, P\right)$ 上，使得 $\mathcal{F}^H$ 是一个由 B^H 生成的 σ 域。设 X^H 是一个分数自排斥扩散，通过如下方程定义

$$\mathrm{d}X_t^H = \mathrm{d}B_t^H + \theta\left(\int_0^t (1+s)^3 \mathrm{d}X_s^H\right)\mathrm{d}t + \nu \mathrm{d}t, \quad t \ge 0 \tag{7}$$

其中 $X_0^H = 0$，$\nu \in R$ 和 $B_0^H = 0$。定义核函数 $(t,s) \mapsto h_\theta(t,s)$ 通过

$$h_\theta(t,s) = \begin{cases} 1 + \theta(1+s)^3 \mathrm{e}^{-G(s)} \int_s^t \mathrm{e}^{G(u)} \mathrm{d}u, t \ge s \\ 0, t < s \end{cases}$$

其中 $G(s) = \theta \int_0^s (1+s)^3 \mathrm{d}r = \frac{\theta(1+s)^4 - \theta}{4}$，根据 Yan 和 Sun [6]方程(7)的解 X_t^H 形式如下：

$$X_t^H = \int_0^t h_\theta(t,s)\mathrm{d}B_s^H + \nu \int_0^t h_\theta(t,s)\mathrm{d}s \tag{8}$$

对于任意的 $s, t \ge 0$。

3. 长时间行为

假设 $\frac{1}{2} \le H < 1$，此部分主要考虑由分数布朗运动驱动的自排斥扩散方程(7)的解

$$X_t^H = \int_0^t h_\theta(t,s)\mathrm{d}B_s^H + \nu \int_0^t h_\theta(t,s)\mathrm{d}s$$

的渐近行为，其中 $X_0^H = 0$，$\nu \in R$ 和 $B_0^H = 0$，并得到了其有循环收敛性。

引理 3.1：设 $\frac{1}{2} \le H < 1$，定义过程

$$\xi_t^H := \int_0^t \theta(1+r)^3 \mathrm{e}^{-G(r)} \mathrm{d}B_r^H, \quad t \ge 0$$

则，过程 $\xi^H = \left\{\xi_t^H, t \ge 0\right\}$ 和这个随机变量 $\xi_\infty^H := \int_0^\infty \theta(1+r)^3 \mathrm{e}^{-G(r)} \mathrm{d}B_r^H$ 可以在 L^2 上被定义，并且

$$\eta_t^H := \left(\frac{\theta(1+t)^4}{4}\right)^n \Psi(t)\left(\xi_\infty^H - \xi_t^H\right) \to 0$$

在 L^2 上几乎处处收敛，当 t 趋向于无穷的时，对于所有的 $n \ge 0$，其中 $\Psi(t) = \theta(1+t)^3 \mathrm{e}^{-G(t)} \int_0^t \mathrm{e}^{G(u)} \mathrm{d}u$。

证明：当 $H = \frac{1}{2}$ 对应布朗运动情况，引理显然成立。当 $\frac{1}{2} < H < 1$，随机变量 ξ_∞^H 定义在 L^2 上，根据均值定理和连续性有

DOI: 10.12677/pm.2024.144111

$$e^{-G(t)}\int_t^{t+x}\theta(1+r)^3\,dr = xe^{-G(t)}\theta(1+t+kx)^3 \le C_H x$$

其中 $x\in[0,1]$ 和 $k\in[0,1]$。故

$$\begin{aligned}
ds &= \int_0^{+\infty}\theta(1+t+x)^3 e^{-G(t+x)}x^{2H-2}dx = \int_0^{+\infty}x^{2H-2}dx\left(e^{-G(t)}-e^{-G(t+x)}\right)\\
&=(2-2H)\int_0^{+\infty}x^{2H-3}\left(e^{-G(t)}-e^{-G(t+x)}\right)dx\\
&=(2-2H)\int_1^{+\infty}x^{2H-3}\left(e^{-G(t)}-e^{-G(t+x)}\right)dx+(2-2H)\int_0^1 x^{2H-3}\left(e^{-G(t)}-e^{-G(t+x)}\right)dx\\
&\le 1+(2-2H)\int_0^1 x^{2H-3}\left(e^{-G(t)}-e^{-G(t+x)}\right)dx\\
&\le 1+(2-2H)\int_0^1 x^{2H-3}e^{-G(t)}\int_t^{t+x}\theta(1+y)^3\,dydx \le C_H
\end{aligned} \tag{9}$$

对于任意的 $t\ge 0$。运用洛必达法则，有

$$\begin{aligned}
\Lambda_g(H) &:= \lim_{t\to\infty} e^{G(t)}\int_t^{+\infty}\int_s^{+\infty}\theta(1+s)^3\theta(1+r)^3 e^{-G(s)-G(r)}(r-s)^{2H-2}\,drds\\
&=\lim_{t\to\infty}\int_t^{+\infty}\theta(1+s)^3 e^{-G(s)}(s-t)^{2H-2}\,ds \le C_H
\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{2}<H<1$ 和 $n\ge 0$。在 L^2 上，当 t 趋向于无穷大时有 $\Psi(t)\to 1$。下面证明它以概率 1 收敛，通过分部积分法和洛必达法则

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\theta(1+t)^4}{4}\right)^n\left(\xi_\infty^H-\xi_t^H\right)=\left(\frac{\theta(1+t)^4}{4}\right)^n\int_t^\infty\theta(1+s)^3 e^{-G(s)}dB_s^H\\
&=-\theta(1+t)^3\left(\frac{\theta(1+t)^4}{4}\right)^n e^{-G(t)}B_t^H-\left(\frac{\theta(1+t)^4}{4}\right)^n\int_t^\infty B_s^H\left\{\theta 3(1+t)^2-\left(\theta(1+t)^3\right)^2\right\}e^{-G(s)}ds\xrightarrow{a.s.}0
\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{2}\le H<1$，当 t 趋向于无穷大时。

引理 3.2：定义函数 $I_\theta(t):R_+\to R$ 通过

$$I_\theta(t)=\theta(1+t)^3 e^{-G(t)}\int_0^t e^{G(u)}du-1$$

如果 $\frac{1}{2}\le H<1$，随机变量 $\int_0^\infty I_\theta(t)dB_t^H$ 定义在 L^2 上，并且

$$\int_0^t I_\theta(s)dB_s^H \to \int_0^\infty I_\theta(s)dB_s^H \quad (t\to\infty) \tag{10}$$

在 L^2 上几乎处处成立。

证明：

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} I_\theta(t)(1+t)^4 &= \lim_{t\to\infty}(1+t)^4 e^{-G(t)}\left(\theta(1+t)^3\int_0^t e^{G(u)}du-e^{G(t)}\right)\\
&=\lim_{t\to\infty}(1+t)^4 e^{-G(t)}\left(\theta(1+t)^3\int_0^t e^{G(u)}du-\int_0^t\theta(1+u)^3 e^{G(u)}du-1\right)\\
&=\theta\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(1+t)^{-4}e^{G(t)}}\int_0^t e^{G(u)}\left((1+t)^3-(1+u)^3\right)du\\
&=\theta\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(1+t)^{-4}e^{G(t)}}\int_0^t e^{G(u)}\int_u^t 3(1+r)^2\,drdu
\end{aligned}$$

$$=3\theta\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(1+t)^{-4}\mathrm{e}^{G(t)}}\int_0^t(1+u)^2\mathrm{d}u\int_0^u\mathrm{e}^{G(r)}\mathrm{d}r$$

$$=3\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(1+t)^{-3}\mathrm{e}^{G(t)}}\int_0^t\mathrm{e}^{G(u)}\mathrm{d}u=\frac{3}{\theta}$$

结合函数$t\mapsto I_\theta(t)$的连续性，我们有

$$|I_\theta(t)|\le C_\theta^1\frac{1}{(1+t)^4}$$

对于任意的$t\ge0$，有

$$E\left(\int_0^\infty I_\theta(s)\mathrm{d}B_s\right)^2=\int_0^\infty I_\theta(s)^2\,\mathrm{d}s<\infty$$

和

$$E\left(\int_0^\infty I_\theta(s)\mathrm{d}B_s^H\right)^2=\alpha_H\int_0^\infty\int_0^\infty I_\theta(s)I_\theta(r)|s-r|^{2H-2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s<\infty$$

对于$\frac{1}{2}\le H<1$。于是，可以得到

$$\lim_{t\to\infty}E\left(\int_t^\infty I_\theta(s)\mathrm{d}B_s\right)^2=\int_t^\infty I_\theta(s)^2\,\mathrm{d}s=0$$

$$\lim_{t\to\infty}E|\Psi_t|^2=\lim_{t\to\infty}E\left(\int_t^\infty I_\theta(s)\mathrm{d}B_s^H\right)^2=\alpha_H\int_t^\infty\int_t^\infty I_\theta(s)I_\theta(r)|s-r|^{2H-2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s=0$$

我们得到了公式(10)在L^2上成立。

下面，证明对任意$\theta>0$，当t趋向于无穷大时，Ψ_t几乎处处收敛到0，考虑函数$t\mapsto I_\theta'(t)$，有

$$\begin{aligned}I_\theta'(t)&=3\theta(1+t)^{21}\mathrm{e}^{-G(t)}\int_0^t\mathrm{e}^{G(u)}\mathrm{d}u-\theta^2(1+t)^6\mathrm{e}^{-G(t)}\int_0^t\mathrm{e}^{G(u)}\mathrm{d}u+\theta(1+t)^3\\&=\theta(1+t)^2\mathrm{e}^{-G(t)}\left(3\int_0^t\mathrm{e}^{G(u)}\mathrm{d}u-\theta(1+t)^4\int_0^t\mathrm{e}^{G(u)}\mathrm{d}u+(1+t)\mathrm{e}^{G(t)}\right)\\&=\theta(1+t)^2\mathrm{e}^{-G(t)}\int_0^t\mathrm{e}^{G(u)}\left(3-\theta(1+t)^4+\theta(1+t)(1+u)^3\right)\mathrm{d}u+\theta(1+t)^3\mathrm{e}^{-G(t)}\end{aligned}$$

对于任意的$t\ge0$。设$f_\theta(t)=\int_0^t\mathrm{e}^{G(u)}\left(3-\theta(1+t)^4+\theta(1+t)(1+u)^3\right)\mathrm{d}u$，对于任意的$\theta>0$，我们可以得到$f_\theta(0)=0$，

$$\begin{aligned}f_\theta'(t)&=\int_0^t\mathrm{e}^{G(u)}\left(-\theta(4)(1+t)^3+\theta(1+u)^3\right)\mathrm{d}u+3\mathrm{e}^{G(t)}\\&=-4\theta\int_0^t3(1+s)^2\,\mathrm{d}s\int_0^s\mathrm{e}^{G(u)}\mathrm{d}u+3\to-\infty\quad(t\to+\infty)\end{aligned}$$

并且对任意的$t\ge0$，有$f_\theta'(t)\le3$。

因此

$$f_\theta=\int_0^t f_\theta'(s)\mathrm{d}s\to\infty\quad(t\to+\infty)$$

由洛必达法则，有

$$\lim_{t\to+\infty} I'_\theta(t)(1+t)^5 = \lim_{t\to+\infty}\theta(1+t)^7 \mathrm{e}^{-G(t)}\int_0^t \mathrm{e}^{G(u)}\left(3-\theta(1+t)^4+\theta(1+t)(1+u)^3\right)\mathrm{d}u + \lim_{t\to+\infty}\theta(1+t)^8 \mathrm{e}^{-G(t)}$$
$$=\theta\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t \mathrm{e}^{G(u)}\left(3-\theta(1+t)^4+\theta(1+t)(1+u)^3\right)\mathrm{d}u}{(1+t)^{-7}\mathrm{e}^{G(t)}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{3\mathrm{e}^{G(t)}+\int_0^t \mathrm{e}^{G(u)}\left(-\theta(4)(1+t)^3+\theta(1+u)^3\right)\mathrm{d}u}{(1+t)^{-4}\mathrm{e}^{G(t)}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-4\theta}{(1+t)^{-4}\mathrm{e}^{G(t)}}\left(\int_0^t 3(1+s)^2\mathrm{d}s\int_0^s \mathrm{e}^G(u)\mathrm{d}u\right)=-\frac{12}{\theta}$$

对于任意的$\theta>0$。结合函数$t\mapsto I'_\theta(t)(1+t)^5$的连续性，有

$$\left|I'_\theta(t)\right|\le C_\theta^2\frac{1}{(1+t)^5}$$

对于$t\ge0$。由条件$\int_t^\infty B_s^H I'_\theta(s)\mathrm{d}s\xrightarrow{a.s.}0$，当$t$趋向于无穷，结合均值定理有

$$I_\theta(t)B_t^H \overset{a.s.}{\sim}\frac{4}{\theta(1+t)^4}B_t^H\overset{a.s.}{\to}0\quad(t\to\infty)$$

对于任意的$\frac{1}{2}\le H<1$。因此，当t趋向于无穷大时

$$\Psi_t=\int_t^\infty I_\theta(s)\mathrm{d}B_s^H=-I_\theta(t)B_t^H-\int_t^\infty I'_\theta(s)B_s^H\mathrm{d}s\to0$$

几乎处处成立。

定理3.1：设$\frac{1}{2}\le H<1$，通过以下方式定义递归过程$J^H(n;\theta)=\left\{J_t^H(n;\theta),t\ge0\right\}$，$n=0,1,2,\cdots$

$$J_t^H(0;\theta):=\theta(1+t)^3\mathrm{e}^{-G(t)}X_t,$$
$$J_t^H(n;\theta):=\frac{\theta(1+t)^4}{4}\left(J_t^H(n-1;\theta)-(\xi_\infty+\nu)\lambda_{n-1}\right),\quad n\ge1$$

其中X_t是公式(8)，则

$$J_t^H(n;\theta)\to(\xi_\infty+\nu)\lambda_n \tag{11}$$

其中

$$\lambda_0=1,\lambda_n=\frac{3(2*3+1)\cdots(3n+n-1)}{4^n}$$

在L^2几乎处处成立，对于每一个$n=0,1,2,\cdots$，当t趋向于无穷大时。

证明：当$n=0$时，我们有

$$\lim_{t\to+\infty}J_t^H(0;\theta)=\lim_{t\to+\infty}\theta(1+t)^3\mathrm{e}^{-G(t)}X_t$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\theta(1+t)^3\mathrm{e}^{-G(t)}\left[\int_0^t h_\theta(t,s)\mathrm{d}B_s^H+\nu\int_0^t \mathrm{e}^{G(u)}\mathrm{d}u\right]$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\left[\theta(1+t)^3\mathrm{e}^{-G(t)}\int_0^t h_\theta(t,s)\mathrm{d}B_s^H+\nu\left(I_\theta(t;0)\right)\right]$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\left[\theta(1+t)^3\mathrm{e}^{-G(t)}\int_0^t\left[1+\theta(1+s)^3\mathrm{e}^{-G(s)}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{G(u)}\mathrm{d}u-\int_0^s \mathrm{e}^{G(u)}\mathrm{d}u\right)\right]\mathrm{d}B_s^H+\nu\left(I_\theta(t;0)\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to+\infty}\theta(1+t)^3 \mathrm{e}^{-G(t)}\left[\int_0^t \mathrm{e}^{G(u)}\mathrm{d}u\int_0^t\theta(1+s)^3\mathrm{e}^{-G(s)}\mathrm{d}B_s^H-\int_0^t I_\theta(s)\mathrm{d}B_s^H\right]+\lim_{t\to+\infty}\nu\left(I_\theta(t;0)\right)\\
&= \lim_{t\to+\infty}\theta(1+t)^3 \mathrm{e}^{-G(t)}\int_0^t \mathrm{e}^{G(u)}\mathrm{d}u\,\xi_t-\lim_{t\to+\infty}\theta(1+t)^3 \mathrm{e}^{-G(t)}\int_0^t I_\theta(s)\mathrm{d}B_s^H+\lim_{t\to+\infty}\nu\left(I_\theta(t;0)\right)\\
&= \lim_{t\to+\infty}\xi_t\left(I_\theta(t;0)\right)-\lim_{t\to+\infty}\theta(1+t)^3 \mathrm{e}^{-G(t)}\int_0^t I_\theta(s)\mathrm{d}B_s^H+\lim_{t\to+\infty}\nu\left(I_\theta(t;0)\right)\\
&= \lim_{t\to+\infty}(\xi_t+\nu)\left(I_\theta(t;0)\right)-\lim_{t\to+\infty}\theta(1+t)^3 \mathrm{e}^{-G(t)}\int_0^t I_\theta(s)\mathrm{d}B_s^H
\end{aligned}
$$

从引理 3.1 和引理 3.2，有

$$\lim_{t\to+\infty}\xi_t\to\xi_\infty$$

$$\lim_{t\to+\infty}(\xi_t+\nu)I_\theta(t;0)=\lim_{t\to+\infty}(\xi_t+\nu)\left[\theta(1+t)^3\left[\sum_{k=2}^{k=n+1}(-1)^n\frac{3(2*3+1)\cdots(3k+k-1)}{\theta^{k+1}(1+t)^{3(k+1)+k}}\right]+1\right]\to\xi_\infty+\nu$$

$$\lim_{t\to+\infty}\theta(1+t)^3\mathrm{e}^{-G(t)}\int_0^t I_\theta(s)\mathrm{d}B_s^H\to 0$$

在 L^2 上几乎处处成立，则

$$\lim_{t\to+\infty}J_t^H(0;\theta)\to(\xi_\infty+\nu)$$

对于 n，

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}J_t^H(n;\theta)&=\lim_{t\to+\infty}\frac{\theta(1+t)^4}{4}\left(J_t^H(n-1;\theta)-\lambda_{n-1}(\xi_\infty+\nu)\right)\\
&=\lim_{t\to+\infty}(\xi_t+\nu)\lambda_n-\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\theta(1+t)^4}{4}\right)^n\theta(1+t)^3\mathrm{e}^{-G(t)}\int_0^t I_\theta(s)\mathrm{d}B_s^H
\end{aligned}
$$

由引理 3.2 得

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\theta(1+t)^4}{4}\right)^n\theta(1+t)^3\mathrm{e}^{-G(t)}\int_0^t I_\theta(s)\mathrm{d}B_s^H\to 0$$

在 L^2 上几乎处处成立，则

$$\lim_{t\to+\infty}J_t^H(n;\theta)\to\lambda_n(\xi_\infty+\nu)$$

在 L^2 几乎处处成立。

4. 自排斥扩散的参数估计

假设 $\frac{1}{2}\le H<1$，回顾分数布朗运动驱动的自排斥扩散为

$$\mathrm{d}X_t^H=\mathrm{d}B_t^H+\theta\left(\int_0^t(1+s)^3\mathrm{d}X_s^H\right)\mathrm{d}t+\nu\mathrm{d}t$$

令 $\nu=0$，有

$$\mathrm{d}X_t^H=\mathrm{d}B_t^H+\theta\left(\int_0^t(1+s)^3\mathrm{d}X_s^H\right)\mathrm{d}t \tag{12}$$

其中 $X_0^H=0$ 和 $B_0^H=0$。

本部分，研究方程(12)中参数 θ 的最小二乘估计，通过使用 Y. Hu 和 D. Nualart [5]建立的最小二乘方法，假设过程 $\{X_t^H,t>0\}$ 可以连续观察。定义 $Y_t^H=\int_0^t(1+r)^3\mathrm{d}X_r^H,t\ge0$，可以将方程(12)改写成

$$\mathrm{d}X_t^H=\mathrm{d}B_t^H+\theta\left(Y_t^H\right)\mathrm{d}t \tag{13}$$

使用常系数变异法，有

$$Y_t^H=\mathrm{e}^{G(t)}\int_0^t(1+s)^3\mathrm{e}^{-G(s)}\mathrm{d}B_s^H \tag{14}$$

设 $\xi_t=\int_0^t(1+s)^3\mathrm{e}^{-G(s)}\mathrm{d}B_s^H$，故 $Y_t^H=\mathrm{e}^{G(t)}\xi_t$。参数 θ 的最小二乘估计量可以通过计算下面损失函数 $\rho(\theta)$ 的最小值获得

$$\rho(\theta)=\int_0^T\left(\dot{X}_t^H-\theta Y_t^H\right)^2\mathrm{d}t$$

通过对损失函数 $\rho(\theta)$ 求导后等于零，有

$$\hat{\theta}_T=\frac{\int_0^T Y_t^H\mathrm{d}X_t^H}{\int_0^T\left(Y_t^H\right)^2\mathrm{d}t},$$

引理 4.1：假设 $\frac{1}{2}\le H<1$，对于任意的整数 $p\ge1$，有

$$(1+T)^3\mathrm{e}^{-2G(T)}\int_0^T\mathrm{e}^{2G(t)}(\xi_t)^p\,\mathrm{d}t\to\frac{1}{2\theta}(\xi_\infty)^p \tag{15}$$

当 T 趋向于无穷大时。根据引理 3.1，对于任意的 $m>0$，$\frac{1}{T^m}\xi_T\to0$ 在 L^2 几乎处处成立。

证明：当 $\frac{1}{2}\le H<1$ 时，由引理 3.1，随机变量 ξ_∞ 服从 0 均值正态分布，所以

$$P(\xi_\infty\ne0)=1$$

变量 $\{\xi_t,t\ge0\}$ 连续，有 $\lim\limits_{t\to\infty}\inf\limits_{\frac{1}{2}t\le s\le t}\xi_s=\xi_\infty$，因此，当 t 趋向于无穷大时 $\int_0^t\mathrm{e}^{2G(s)}\xi_s^p\mathrm{d}s\to\infty$，由洛必达法则，$(1+T)^3\mathrm{e}^{-2G(T)}\int_0^T\mathrm{e}^{2G(t)}(\xi_t)^p\,\mathrm{d}t\xrightarrow{a.s.}\frac{1}{2\theta}(\xi_\infty)^p$。

引理 4.2：假设 $\frac{1}{2}\le H<1$，当 T 趋向于无穷大时

$$\lim_{T\to\infty}(T+1)^{6H}\mathrm{e}^{-2G(T)}\int_0^T\int_0^T\mathrm{e}^{G(s)+G(r)}|s-r|^{2H-2}\mathrm{d}s\mathrm{d}r=\theta^{-2H}\Gamma(2H-1)$$

证明：对于非负连续函数 f，$\lim\limits_{T\to\infty}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$ 存在且有限，有

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\left(1-\frac{x}{(1+T)^4}\right)^{\frac{3}{4}}}=\lim_{T\to\infty}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$$

根据洛必达法则和变量替换 $\frac{\theta}{4}\left((1+T)^4-(1+r)^4\right)=x$ 以及控制收敛定理，有

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty}(T+1)^{6H}\mathrm{e}^{-2G(T)}\int_0^T\int_0^T\mathrm{e}^{G(s)+G(r)}|s-r|^{2H-2}\mathrm{d}s\mathrm{d}r\\&=2\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(T+1)^{-6H}\mathrm{e}^{2G(T)}}\int_0^T\mathrm{e}^{G(s)}\int_0^s\mathrm{e}^{G(r)}|s-r|^{2H-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\&=\theta^{-1}\lim_{T\to\infty}(1+T)^{6H-3}\int_0^T\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{4}\left((1+T)^4-(1+r)^4\right)}(T-r)^{2H-2}\mathrm{d}r\end{aligned}$$

$$=\theta^{-2}\lim_{T\to\infty}(1+T)^{6H-3}\int_0^{G(T)}\mathrm{e}^{-x}\left(T+1-\left((1+T)^4-\frac{4x}{\theta}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{2H-2}\frac{\mathrm{d}x}{\left((1+T)^4-\frac{4x}{\theta}\right)^{\frac{3}{4}}}$$

$$=\frac{4^{2H-2}}{\theta^{2H}}\lim_{T\to\infty}\int_0^{G(T)}\mathrm{e}^{-x}\left(1+(1-\frac{4x}{\theta(1+T)^4})^{\frac{1}{4}}\right)^{2-2H}\frac{x^{2H-2}\mathrm{d}x}{\left(1-\frac{4x}{\theta(1+T)^4}\right)^{\frac{3}{4}}}$$

$$=\theta^{-2H}\Gamma(2H-1)$$

引理 4.3：设$\frac{1}{2}\le H<1$，对于任意的$\sigma\{B_t^H,t\ge0\}$-可测随机变量F满足$P(F<\infty)=1$，当T趋向于无穷大时，有以下收敛成立

$$\left(F,(T+1)^{3H}\mathrm{e}^{-G(T)}\int_0^T\mathrm{e}^{G(s)}\mathrm{d}B_s^H\right)\to\left(F,\sqrt{H\Gamma(2H)}\theta^{-H}N\right) \tag{16}$$

其中N是独立于B^H的标准正态随机变量。

证明：对于任意$T>0$，我们有

$$(T+1)^{3H}\mathrm{e}^{-G(T)}\int_0^T\mathrm{e}^{G(s)}\mathrm{d}B_s^H=N\sigma_{H,\theta}(T)$$

其中“=”代表同分布，N是标准正态随机变量，并且

$$\sigma_{H,\theta}^2(T)=(T+1)^{6H}\mathrm{e}^{-2G(T)}E\left(\int_0^T\mathrm{e}^{G(s)}\mathrm{d}B_s^H\right)^2$$
$$=H(2H-1)(T+1)^{6H}\mathrm{e}^{-G(T)}\int_0^T\int_0^T\mathrm{e}^{G(s)+G(r)}|s-r|^{2H-2}\mathrm{d}s\mathrm{d}r,T>0$$

根据引理 4.2，有

$$(T+1)^{3H}\mathrm{e}^{-G(T)}\int_0^T\mathrm{e}^{G(s)}\mathrm{d}B_s^H\to\sqrt{H\Gamma(2H)}\theta^{-H}N,T\to\infty$$

由方程(15)两侧服从二维正态分布，以及 Hu 和 Nualart [5]，只需要证明对于任意的$d\ge1$，$s_1,\cdots,s_d\in[0,\infty)$，当$T$趋向于无穷大时，以下收敛成立

$$\left(B_{s_1}^H,\cdots,B_{s_d}^H,(T+1)^{3H}\mathrm{e}^{-G(T)}\int_0^T\mathrm{e}^{G(s)}\mathrm{d}B_s^H\right)\to\left(B_{s_1}^H,\cdots,B_{s_d}^H,\theta^{-H}\sqrt{H\Gamma(2H)}N\right) \tag{17}$$

为了得到(15)，只需要证明其协方差矩阵收敛于相应的结果。当$H=\frac{1}{2}$，显然，故以下考虑$\frac{1}{2}<H<1$。对于任意固定的$s>0$，有

$$E\left(B_s^H\cdot(T+1)^{3H}\mathrm{e}^{-G(T)}\int_0^T\mathrm{e}^{G(r)}\mathrm{d}B_r^H\right)$$
$$=H(2H-1)(T+1)^{3H}\mathrm{e}^{-G(T)}\int_0^T\mathrm{e}^{G(v)}\mathrm{d}v\int_0^s|u-v|^{2H-2}\mathrm{d}u$$
$$=H(2H-1)(T+1)^{3H}\mathrm{e}^{-G(T)}\int_0^s\mathrm{e}^{G(v)}\mathrm{d}v\int_0^s|u-v|^{2H-2}\mathrm{d}u$$
$$+H(2H-1)(T+1)^{3H}\mathrm{e}^{-G(T)}\int_s^T\mathrm{e}^{G(v)}\mathrm{d}v\int_0^s|u-v|^{2H-2}\mathrm{d}u$$
$$=:I(T)+J(T)$$

当$T\to\infty$，我们有$I(T)\to0$。再根据洛必达法则，对任意的$s>0$，有

$$0<J(T)=H(T+1)^{3H}\mathrm{e}^{-G(T)}\int_s^T\mathrm{e}^{G(v)}\left[v^{2H-1}-(v-s)^{2H-1}\right]\mathrm{d}v$$
$$\le Hs^{2H-1}\left((T+1)^{3H}\mathrm{e}^{-G(T)}\int_s^T\mathrm{e}^{G(v)}\mathrm{d}v\right)\to 0$$

则，对于任意的 $s>0$，有

$$\lim_{T\to\infty}E\left(B_s^H\cdot(T+1)^{3H}\mathrm{e}^{-G(T)}\int_0^T\mathrm{e}^{G(r)}\mathrm{d}B_r^H\right)=0$$

引理 4.4：设 $\frac{1}{2}\le H<1$，当 T 趋向于无穷大时，有

$$(T+1)^{3H}\mathrm{e}^{-G(T)}\int_0^T(1+s)^3\mathrm{e}^{-G(s)}\delta B_s^H\int_0^s\mathrm{e}^{G(r)}\delta B_r^H\xrightarrow{L^2}0 \tag{18}$$

$$(T+1)^{3H}\mathrm{e}^{-G(T)}\int_0^T(1+s)^3\mathrm{e}^{-G(s)}\mathrm{d}s\int_0^s\mathrm{e}^{G(r)}|s-r|^{2H-2}\mathrm{d}r\to 0 \tag{19}$$

证明：方程(17)的收敛显然成立，下面考虑(18)的收敛性。通过二重积分的等距公式和方程(6)，对于任意 $T>0$，有

$$E\left((T+1)^{3H}\mathrm{e}^{-G(T)}\int_0^T(1+s)^3\mathrm{e}^{-G(s)}\left(\int_0^s\mathrm{e}^{G(r)}\delta B_r^H\right)\delta B_s^H\right)^2$$
$$=(T+1)^{6H}\mathrm{e}^{-2G(T)}E\left(\int_0^T(1+s)^3\mathrm{e}^{-G(s)}\left(\int_0^s\mathrm{e}^{G(r)}\delta B_r^H\right)\delta B_s^H\right)^2$$
$$=(\alpha_H)^2(T+1)^{6H}\mathrm{e}^{-2G(T)}\int_0^T(1+s)^3\mathrm{e}^{-G(s)}\mathrm{d}s\int_0^s\mathrm{e}^{G(x)}\mathrm{d}x\int_0^T(1+r)^3\mathrm{e}^{-G(r)}\mathrm{d}r\int_0^r\mathrm{d}y\mathrm{e}^{G(y)}$$
$$\times\left(|s-y|^{2H-2}|r-x|^{2H-2}+|s-r|^{2H-2}|x-y|^{2H-2}\right)$$

再由不等式

$$\int_0^s\mathrm{d}\xi\int_0^r|r-\xi|^{2H-2}|s-\eta|^{2H-2}\mathrm{d}\eta\le\frac{2}{(2H-1)^2}r^{2H-1}s^{2H-1}$$

则

$$E\left((T+1)^{3H}\mathrm{e}^{-G(T)}\int_0^T(1+s)^3\mathrm{e}^{-G(s)}\left(\int_0^s\mathrm{e}^{G(r)}\delta B_r^H\right)\delta B_s^H\right)^2\le C_H T^{2+6H}\mathrm{e}^{-2G(T)}\to 0, T\to\infty.$$

定理 4.1：设 $\theta>0$ 且定理 3.1 的条件成立。对于 $\frac{1}{2}\le H<1$，当 T 趋向于无穷大时，有

$$\hat{\theta}_T=\frac{\int_0^T Y_t^H\mathrm{d}X_t^H}{\int_0^T\left(Y_t^H\right)^2\mathrm{d}t}\to\theta$$

几乎处处成立。

证明：

$$\hat{\theta}-\theta=\frac{\int_0^T Y_t^H\mathrm{d}X_t^H-\theta\int_0^T\left(Y_t^H\right)^2\mathrm{d}t}{\int_0^T\left(Y_t^H\right)^2\mathrm{d}t}=\frac{\int_0^T Y_t^H\mathrm{d}B_t^H}{\int_0^T\left(Y_t^H\right)^2\mathrm{d}t}$$

由分部积分，有

$$\begin{aligned}\int_0^T Y_t^H \mathrm{d}B_t^H &= Y_T B_T^H - \int_0^T B_t^H \mathrm{d}Y_t^H \\ &= Y_T^H B_T^H - \int_0^T B_t^H \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{G(t)}\xi_t\right) \\ &= Y_T^H B_T^H - \theta\int_0^T (1+t)^3 \mathrm{e}^{G(t)} B_t^H \xi_t \mathrm{d}t - \int_0^T \mathrm{e}^{G(t)} B_t^H \mathrm{d}\xi_t \\ &= Y_T^H B_T^H - \theta\int_0^T (1+t)^3 \mathrm{e}^{G(t)} B_t^H \xi_t \mathrm{d}t - \int_0^T (1+t)^3 B_t^H \mathrm{d}B_t^H.\end{aligned}$$

根据方程(13)，引理 3.1 和洛必达法则，当 T 趋向于无穷大时，以下收敛以概率 1 成立：

$$(1+T)^{-3}\mathrm{e}^{-G(T)}\cdot Y_T^H B_T^H = \frac{B_T^H}{(1+T)^3}\cdot \mathrm{e}^{-G(T)} Y_T^H \to 0,$$

$$(1+T)^{-3}\mathrm{e}^{-G(T)}\left(\int_0^T (1+t)^3 \mathrm{e}^{G(t)} B_t^H \xi_t \mathrm{d}t\right) \to 0$$

此外

$$\begin{aligned}(1+T)^{-3}\mathrm{e}^{-G(T)}\cdot\int_0^T (1+t)^3 B_t^H \mathrm{d}B_t^H &= \frac{1}{2}(1+T)^{-3}\mathrm{e}^{-G(T)}\int_0^T (1+t)^3 \mathrm{d}\left(Bt^H\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}(1+T)^{-3}\mathrm{e}^{-G(T)}\left[TB_T^{H2} - \int_0^T B_t^{H2}\mathrm{d}t\right] \to 0\end{aligned}$$

则

$$(1+T)^{-3}\mathrm{e}^{-G(T)}\left(\int_0^T Y_t^H \mathrm{d}B_t^H\right) \to 0$$

再由引理 4.1，当 $p=2$，有

$$(1+T)^3\mathrm{e}^{-2G(T)}\int_0^T \left(Y_t^H\right)^2 \mathrm{d}t = (1+T)^3 \mathrm{e}^{-2G(T)}\int_0^T \mathrm{e}^{2G(t)}(\xi_t)^2\,\mathrm{d}t \to \frac{1}{2\theta}(\xi_\infty)^2 \tag{20}$$

所以

$$\hat{\theta}-\theta = \frac{\int_0^T Y_t^H \mathrm{d}B_t^H}{\int_0^T \left(Y_t^H\right)^2 \mathrm{d}t} \to 0$$

当 T 趋向于无穷大。

定理 4.2：假设 $\theta>0$ 和 $\frac{1}{2}\le H<1$，则

$$(T+1)^{3(H-1)}\mathrm{e}^{G(t)}\left(\hat{\theta}-\theta\right) \to 2\theta^{1-H}\sqrt{H\Gamma(2H)}\frac{N}{\xi_\infty}$$

依分布成立，其中 N 是独立的随机正态分布。

证明：对于任意的 $T>0$，有

$$(T+1)^{3(H-1)}\mathrm{e}^{G(T)}\left(\hat{\theta}-\theta\right) = (T+1)^{3(H-1)}\mathrm{e}^{G(T)}\frac{\int_0^T Y_t^H \mathrm{d}B_t^H}{\int_0^T \left(Y_t^H\right)^2 \mathrm{d}t} = \frac{(T+1)^{3H}\mathrm{e}^{-G(T)}\int_0^T Y_t^H \mathrm{d}B_t^H}{(T+1)^3\mathrm{e}^{-2G(T)}\int_0^T \left(Y_t^H\right)^2 \mathrm{d}t}$$

现在考虑渐近分布，对于任意的 $T>0$，有

$$\begin{aligned}&\int_0^T (1+s)^3 \mathrm{e}^{-G(s)}\left(\int_0^s \mathrm{e}^{G(t)}\mathrm{d}B_t^H\right)\mathrm{d}B_s^H \\ &= \int_0^T (1+s)^3 \mathrm{e}^{-G(s)}\left(\int_0^s \mathrm{e}^{G(t)}\delta B_t^H\right)\mathrm{d}B_s^H\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^T (1+s)^3 \mathrm{e}^{-G(s)} \left(\int_0^s \mathrm{e}^{G(t)} \delta B_t^H \right) \delta B_s^H \\
&\quad + H(2H-1) \int_0^T (1+s)^3 \mathrm{e}^{-G(s)} \int_0^T D_r^H \left(\int_0^s \mathrm{e}^{G(t)} \delta B_t^H \right) |s-r|^{2H-2} \mathrm{d}s\mathrm{d}r \\
&= \int_0^T (1+s)^3 \mathrm{e}^{-G(s)} \left(\int_0^s \mathrm{e}^{G(t)} \delta B_t^H \right) \delta B_s^H \\
&\quad + \alpha_H \int_0^T (1+s)^3 \mathrm{e}^{-G(s)} \int_0^s \mathrm{e}^{G(r)} (s-r)^{2H-2} \mathrm{d}s\mathrm{d}r.
\end{aligned}
$$

所以，对任意的$T \ge 0$，有

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \mathrm{e}^{G(t)} \xi_t \mathrm{d}B_t^H &= \int_0^T \mathrm{e}^{G(t)} \left(\int_0^t (1+s)^3 \mathrm{e}^{-G(s)} \mathrm{d}B_s^H \right) \mathrm{d}B_t^H \\
&= \int_0^T \mathrm{e}^{G(t)} \left(\int_0^T (1+s)^3 \mathrm{e}^{-G(s)} \mathrm{d}B_s^H \right) \mathrm{d}B_t^H - \int_0^T \mathrm{e}^{G(t)} \left(\int_t^T (1+s)^3 \mathrm{e}^{-G(s)} \mathrm{d}B_s^H \right) \mathrm{d}B_t^H \\
&= \xi_T \int_0^T \mathrm{e}^{G(t)} \mathrm{d}B_t^H - \int_0^T (1+s)^3 \mathrm{e}^{-G(s)} \left(\int_0^s \mathrm{e}^{G(t)} \mathrm{d}B_t^H \right) \mathrm{d}B_s^H \\
&= \xi_T \int_0^T \mathrm{e}^{G(t)} \mathrm{d}B_t^H - \int_0^T (1+s)^3 \mathrm{e}^{-G(s)} \left(\int_0^s \mathrm{e}^{G(t)} \delta B_t^H \right) \delta B_s^H \\
&\quad - \alpha_H \int_0^T (1+s)^3 \mathrm{e}^{-G(s)} \int_0^s \mathrm{e}^{G(r)} (s-r)^{2H-2} \mathrm{d}s\mathrm{d}r.
\end{aligned}
$$

当 T 趋向于无穷大，根据引理 4.3 和引理 4.4，方程(19)收敛以及 Slutsky 定理，有

$$
\begin{aligned}
\frac{(T+1)^{3H} \mathrm{e}^{-G(T)} \int_0^T Y_t^H \mathrm{d}B_t^H}{(T+1)^3 \mathrm{e}^{-2G(T)} \int_0^T \left(Y_t^H\right)^2 \mathrm{d}t} &= \frac{\xi_T (T+1)^{3H} \mathrm{e}^{-G(T)} \int_0^T \mathrm{e}^{G(t)} \mathrm{d}B_t^H}{(T+1)^3 \mathrm{e}^{-2G(T)} \int_0^T \left(Y_t^H\right)^2 \mathrm{d}t} \\
&\quad - \frac{(T+1)^{3H} \mathrm{e}^{-G(T)} \int_0^T (1+s)^3 \mathrm{e}^{-G(s)} \left(\int_0^s \mathrm{e}^{G(t)} \delta B_t^H \right) \delta B_s^H}{(T+1)^3 \mathrm{e}^{-2G(T)} \int_0^T \left(Y_t^H\right)^2 \mathrm{d}t} \\
&\quad - \frac{(T+1)^{3H} \mathrm{e}^{-G(T)} \alpha_H \int_0^T (1+s)^3 \mathrm{e}^{-G(s)} \int_0^s \mathrm{e}^{G(r)} (s-r)^{2H-2} \mathrm{d}s\mathrm{d}r}{(T+1)^3 \mathrm{e}^{-2G(T)} \int_0^T \left(Y_t^H\right)^2 \mathrm{d}t} \\
&\quad \to 2\theta^{1-H} \sqrt{H\Gamma(2H)} \frac{N}{\xi_\infty}
\end{aligned}
$$

需要注意的是引理 4.3 表明随机变量 N 是相互独立的，从而证明了收敛性。

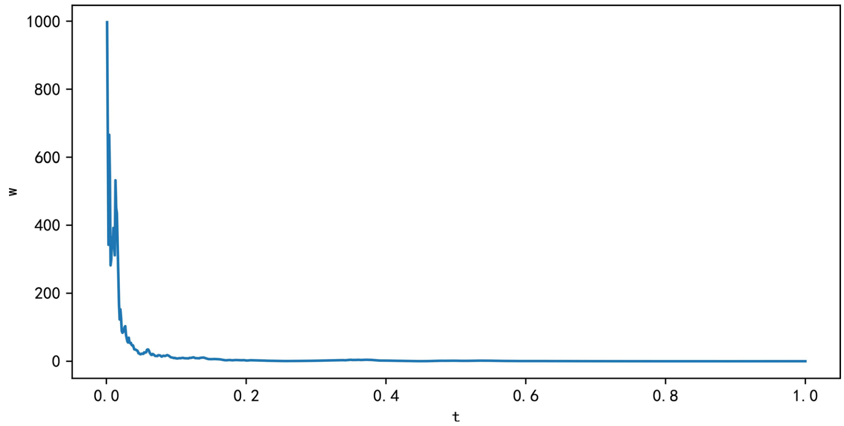

Figure 1. Numerical simulation of w tends to 0
图 1. w 趋于 0 的数值模拟

5. 数值模拟

对定理 4.1 中参数θ的估计量进行数值分析，即考虑下式

$$w := \hat{\theta} - \theta = \frac{\int_0^T Y_t^H \mathrm{d}B_t^H}{\int_0^T \left(Y_t^H\right)^2 \mathrm{d}t} \to 0$$

假设，步长数量$n = 1000$，Hurst 指数$H = 0.7$，总时间$T = 1$，时间间隔$\mathrm{d}t = 0.001$。

结果见图 1。

参考文献

[1] Durrett, R. and Rogers, L.C.G. (1992) Asymptotic Behavior of Brownian Polymer. *Probability Theory and Related Fields*, **92**, 337-349. https://doi.org/10.1007/BF01300560

[2] Pemantle, R. (1988) Phase Transition in Reinforced Random Walk and RWRE on Trees. *Annals of Probability*, **16**, 1229-1241. https://doi.org/10.1214/aop/1176991687

[3] Nualart, D. and Peccati, G. (2005) Central Limit Theorems for Sequences of Multiple Stochastic Integrals. *Annals of Probability*, **33**, 177-193. https://doi.org/10.1214/009117904000000621

[4] Benaïm, M., Ledoux, M. and Raimond, O. (2002) Self-Interacting Diffusions. *Probability Theory and Related Fields*, **122**, 1-41. https://doi.org/10.1007/s004400100161

[5] Hu, Y. and Nualart, D. (2010) Parameter Estimation for Fractional Ornstein-Uhlenbeck Processes. *Statistics & Probability Letters*, **80**, 1030-1038. https://doi.org/10.1016/j.spl.2010.02.018

[6] Yan, L., Sun, Y. and Lu, Y. (2008) On the Linear Fractional Self-Attracting Diffusion. *Journal of Theoretical Probability*, **21**, 502-516. https://doi.org/10.1007/s10959-007-0113-y