Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 268-275
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144134

Hans汉斯

$\mathbb{E}$-三角范畴中的(n, m)-强ξ-Gorenstein投射对象

郭雯珺

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2024年2月20日；录用日期：2024年3月15日；发布日期：2024年4月28日

摘 要

设$\mathcal{C}$是一个E-三角范畴，ξ是$\mathcal{C}$中的一个E-三角真类。在$\mathcal{C}$中引入(n, m)-强ξ-Gorenstein投射对象的概念，研究了$\mathcal{C}$中的对象与其合冲的这种ξ-Gorenstein投射性质之间的联系。作为应用，证明了ξ中对象X的ξ-Gorenstein投射维数小于等于m当且仅当存在$\mathcal{C}$中的ξ-Gorenstein投射对象G，使得 $X \oplus G$ 是$(1, m)$-强ξ-Gorenstein投射的。

关键词

ξ-Gorenstein投射对象，ξ-Gorenstein投射维数，(n, m)-强ξ-Gorenstein投射对象，合冲

(n, m)-Strongly ξ-Gorenstein Projective Objects in Extriangulated Categories

Wenjun Guo

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Feb. 20th, 2024; accepted: Mar. 15th, 2024; published: Apr. 28th, 2024

Abstract

Let $\mathcal{C}$ be an extriangulated category and ξ a proper class of $\mathbb{E}$-triangles of $\mathcal{C}$. The notion of (n, m)-strongly ξ-Gorenstein projective object in $\mathcal{C}$ is introduced and the relation of such ξ-Gorenstein projectivity of an object in $\mathcal{C}$ with that of its syzygies is investigated. As a consequence, it is shown that an object X of $\mathcal{C}$ has ξ-Gorenstein projective dimension at most m if and only if $X \oplus G$ is $(1, m)$-strongly ξ-Gorenstein projective for some ξ-Gorenstein projective object of $\mathcal{C}$.

Keywords

ξ-Gorenstein Projective Objects, ξ-Gorenstein Projective Dimension, (n, m)-Strongly ξ-Gorenstein

文章引用: 郭雯珺. E-三角范畴中的(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射对象[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 268-275.
DOI: 10.12677/pm.2024.144134

Projective Objects, Syzygies

1. 引言

正合范畴和三角范畴是代数和几何中两个基本的代数结构。Nakaoka 和 Palu 在[1]中对 E-三角范畴的结构特征进行了详细的描述，它是正合范畴也是三角范畴的非平凡推广，从而保证了 E-三角范畴具有良好的同调性质，并在[1]中给出了 E-三角范畴的基本概念。Enochs 和 Jenda 于[2]中在一般环上引入了 Gorenstein 投射模的概念和模的同调维数。在 Auslander 和 Bridger [3]，Enochs 和 Jenda [4]，Beligiannis [5]与 Hu 等人[6]工作的基础上，He 在[7]中引入了 ξ-Gorenstein 投射对象及任意对象的 ξ-Gorenstein 投射分解的概念。此外，Hu 等人在[8]中讨论了 E-三角范畴中的 Gorenstein 同调维数并用导出函子给出了 Gorenstein 投射维数的一些等价刻画。

在模范畴中，Bennis 和 Mahdou 在[9] [10]中引入了强 Gorenstein 投射模以及 n-强 Gorenstein 投射模的概念。随后，Bennis 在[11]中给出了(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射模的概念$(n \geq 1, m \geq 0)$，并且研究了这类模的合冲。三角范畴和正合范畴中的很多重要理论都可以推广到 E-三角范畴[1] [6]。受常雯雯及高楠在[12]中工作的启发，在 E-三角范畴中引入(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射对象的概念$(n \geq 1, m \geq 0)$，并且讨论了他们的合冲。注意到，任意(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射对象 X 的 ξ-Gorenstein 投射维数都是小于等于 m 的。特别地，当 $1 \leq i \leq k$ 时，X 的第 i 个合冲是$(n, m\text{-}i)$-强 ξ-Gorenstein 投射对象；当 $i \geq k$ 时，X 的第 i 个合冲是$(n, 0)$-强 ξ-Gorenstein 投射对象。对任意的对象 X，证明了它的 ξ-Gorenstein 投射维数小于 m 当且仅当存在某个 ξ-Gorenstein 投射对象 G，使得 $X \oplus G$ 是$(1, m)$-强 ξ-Gorenstein 投射的。

2. 基础知识

设 $\mathcal{C}$ 是加法范畴，$\mathbb{E}$: $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{Ab}$ 是双加法函子，$\mathcal{Ab}$ 是 Abel 群范畴。Nakaoka 和 Palu 于[1]中引入了 E-三角范畴的定义，相关概念详见文献[1]。

本文总假设 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$是有足够多投射对象和内射对象的 E-三角范畴。

设 $\mathcal{C}$ 是一个 E-三角范畴。称 E-三角的真类 ξ 关于基变换封闭，如果对 ξ 中任意 E-三角 $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 和 $c \in \mathcal{C}(C', C)$，都存在 ξ 中 E-三角 $A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C' \overset{c^*\delta}{\dashrightarrow}$。称 E-三角真类 ξ 关于余基变换封闭，如果对 ξ 中任意 E-三角 $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 和 a $\in \mathcal{C}(A', A)$，都存在 ξ 中 E-三角 $A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C' \overset{a_*\delta}{\dashrightarrow}$。

称 E-三角的真类 ξ 饱和，如果在([1]，命题 3.15)中，$A_2 \xrightarrow{x_2} B_2 \xrightarrow{y_2} C \overset{\delta_2}{\dashrightarrow}$ 和 $A_1 \xrightarrow{m_1} M \xrightarrow{e_1} B_2 \overset{y_2^*\delta_1}{\dashrightarrow}$ 是 ξ 中 E-三角。

定义 1.1 ([6]，定义 3.1)设 ξ 是关于同构封闭的 E-三角类。称 ξ 是一个 E-三角真类，如果满足下述条件：

1) ξ 关于有限直和封闭，且 $\Delta_0 \subseteq \xi$ （Δ_0 表示由可裂 E-三角组成的满子范畴)；

2) ξ 关于基变换和余基变换封闭；

3) ξ 是 saturated。

假设 $\mathcal{C}$ 是 E-三角范畴。ξ 是 $\mathcal{C}$ 中 E-三角真类。在[6]中，对象 $P\in\mathcal{C}$ 称为 ξ-投射的，如果对 ξ 中任意 E-三角 $A\longrightarrow B\longrightarrow C\overset{\delta}{\dashrightarrow}$，Abel 群的序列

$$0\to\mathcal{C}(P,A)\to\mathcal{C}(P,B)\to\mathcal{C}(P,C)\to 0$$

均正合。记 $\mathcal{C}$ 中所有 ξ-投射对象构成的满子范畴为 $\mathcal{P}(\xi)$。

$\mathcal{C}$ 中对象 A 的 ξ-投射维数 ξ-pd A，定义为：当 $A=0$ 时，定义 ξ-pd$A=-1$；当 $A\in\mathcal{P}(\xi)$时，定义 ξ-pd$A$ $=0$；设 n 为正整数，如果存在 ξ 中 E-三角 $K\longrightarrow P\longrightarrow A\overset{\delta}{\dashrightarrow}$，满足 $P\in\mathcal{P}(\xi)$，ξ-pd$K\le n-1$，且 $n-1$ $\ngeq\xi$- pd$A$，定义 ξ-pd$A=n$；如果对任意的整数 $n\ge 0$，都有 ξ-pd$A$ $\neq$ n，定义 ξ-pd$A=\infty$。

以下假定 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射对象。下面的概念见[6] [7] [8] [12]

若 $K\longrightarrow P\longrightarrow C\overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 是 ξ 中的 E-三角，其中 $P\in\mathcal{P}(\xi)$，则称 K 是 C 的第 1 个合冲。归纳地，可以定义 C 的第 i 个合冲，$i\ge 2$。ξ 中任意 E-三角 $A\longrightarrow B\longrightarrow C\overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 称为 $\mathcal{C}(-,\mathcal{P}(\xi))$-正合的，如果对任意 ξ-投射对象 Q，序列

$$0\to\mathcal{C}(C,Q)\to\mathcal{C}(B,Q)\to\mathcal{C}(A,Q)\to 0$$

正合。对 $\mathcal{C}$ 中复形

$$\mathbb{X}:\ \cdots\to X_1\xrightarrow{d_1}X_2\xrightarrow{d_2}X_{-1}\to\cdots,$$

若对任意整数 n，都存在 ξ 中任意 E-三角 $K_{n+1}\xrightarrow{g_n}X_n\xrightarrow{f_n}K_n\overset{\delta_n}{\dashrightarrow}$，使得 $d_n=g_{n-1}f_n$，则称 $\mathbb{X}$ 是一个 ξ-正合复形。设 $\mathbb{X}$ 是 ξ-正合复形，满足对任意整数 n，都有 ξ 中 E-三角 $K_{n+1}\xrightarrow{g_n}X_n\xrightarrow{f_n}K_n\overset{\delta_n}{\dashrightarrow}$ 是 $\mathcal{C}(-,\mathcal{P}(\xi))$-正合的，并且 $d_n=g_{n-1}f_n$，则称 $\mathbb{X}$ 是完备 ξ-正合复形。若 $\mathcal{C}$ 中完备 ξ-正合复形

$$\mathbb{P}:\ \cdots\to P_1\xrightarrow{d_1}P_2\xrightarrow{d_2}P_{-1}\to\cdots,$$

满足对任意整数 n，P_n 都是 ξ-投射的，则称 $\mathbb{P}$ 是一个完备 ξ-投射分解。如果 $\mathbb{P}$ 是 $\mathcal{C}$ 中完备 ξ-投射分解，则对任意整数 n，都有 ξ 中 E-三角 $K_{n+1}\xrightarrow{g_n}X_n\xrightarrow{f_n}K_n\overset{\delta_n}{\dashrightarrow}$ 是 $\mathcal{C}(-,\mathcal{P}(\xi))$-正合的，那么称对象 K_n 是 ξ-Gorenstein 投射对象。

记 $\mathcal{C}$ 中所有 ξ-Gorenstein 投射对象构成的满子范畴为 $\mathcal{GP}(\xi)$。易知 $\mathcal{GP}(\xi)$对有限直和，直和项以及同构封闭。

设 $A\in\mathcal{C}$，则 A 的 ξ-Gorenstein 投射维数记为 ξ-Gpd$A$，定义为：当 $A=0$ 时，ξ-Gpd$A=-1$；当 $A\in\mathcal{GP}(\xi)$ 时，ξ-Gpd$A=0$；如果存在 ξ 中 E-三角 $K\longrightarrow P\longrightarrow A\overset{\delta}{\dashrightarrow}$，满足 $P\in\mathcal{GP}(\xi)$，ξ-Gpd$K\le n-1$，且 $n-1$ $\ngeq\xi$-pd$A$，那么 ξ-Gpd$A=n$，其中 n 是正整数；如果对任意的整数 $n\ge 0$，都有 ξ-Gpd$A\neq n$，那么 ξ-Gpd$A=\infty$。

设 n 为正整数。$\mathcal{C}$ 中对象 X 称为 n-强 ξ-Gorenstein 投射对象，若存在完备 ξ-正合复形

$$0\to X\to P_{n-1}\xrightarrow{d_{n-1}}P_{n-2}\to\cdots\to P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{d_0}X\to 0,$$

其中对任意的 $0\le i\le n-1$，$P_i\in\mathcal{P}(\xi)$。特别地，称 1-强 ξ-Gorenstein 投射对象为强 ξ-Gorenstein 投射对象。

注记 1.2 ([7]，注记 4.4 (1)])对任意整数 $n\ge 1$，$\mathcal{P}(\xi)\subseteq\mathcal{SGP}(\xi)\subseteq n\text{-}\mathcal{SGP}(\xi)\subseteq\mathcal{GP}(\xi)$。

注记 1.3 ([7]，定理 4.17])若 $\mathcal{C}$ 有可数直和，且 ξ 关于可数直和封闭，则 X 是 ξ-Gorenstein 投射对象当且仅当 X 是强 ξ-Gorenstein 投射对象的直和项。

注记 1.4 ([7]，推论 4.14]) X 是 $\mathcal{C}$ 中的 n-强 ξ-Gorenstein 投射对象，则

1) X 的第 i 个合冲是 n-强 ξ-Gorenstein 投射的；

2) 对 X 的任一完备 ξ-投射分解 $\mathbb{P}$: $\cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_2 \xrightarrow{d_2} P_{-1} \to \cdots$，每个 K_i 都是 n-强 ξ-Gorenstein 投射的。

由[4]和[5]知，一个对象 A 的任意两个 ξ-投射分解(ξ-内射余分解)是同伦等价的。

定义 1.5 ([8]，定义 3.2)设 A，$B \in \mathcal{C}$。

1) 如果 $\mathbf{P}\to A$ 是 A 的一个 ξ-投射分解，那么对任意整数 $n \geq 0$，ξ-上同调群 $\xi\mathrm{xt}^n_{P(\xi)}(A,B) = \mathrm{H}^n(\mathcal{C}(\mathbf{P}, B))$。

2) 如果 $B\to\mathbf{I}$ 是 B 的一个 ξ-内射余分解，那么对任意整数 $n \geq 0$，ξ-上同调群 $\xi\mathrm{xt}^n_{I(\xi)}(A,B) = \mathrm{H}^n(\mathcal{C}(A, \mathbf{I}))$。

由([13]定理 7.8])知 $\xi\mathrm{xt}^n_{P(\xi)}(A,B) \cong \xi\mathrm{xt}^n_{I(\xi)}(A,B)$。将其定义为 $\xi\mathrm{xt}^n_{\xi}(A,B)$。

3. 主要结果

本文主要讨论(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射对象，定义如下。

定义 2.1 设整数 $n \geq 1$，$m \geq 0$，对象 $X \in \mathcal{C}$ 称为(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射对象，若存在 $\mathcal{C}$ 中的 ξ-正合复形

$$0 \to X \to Q_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} Q_{n-2} \to \cdots \to Q_1 \xrightarrow{d_1} Q_0 \xrightarrow{d_0} X \to 0,$$

满足如下两个条件：

1) 对任意的 $0 \leq i \leq n-1$，有 $\xi\text{-pd}(Q_i) \leq m$；

2) 对任意的 ξ-投射对象 Q 且 $i > m$，$\xi\mathrm{xt}^i_{\xi}(X,Q) = 0$。

注记 2.2 $(n, 0)$-强 ξ-Gorenstein 投射对象就是[7]中的 n-强 ξ-Gorenstein 投射对象。特别地，$(1, 0)$-强 ξ-Gorenstein 投射对象就是强 ξ-Gorenstein 投射对象。

下面研究(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射对象的一些性质。

命题 2.3 设整数 $n \geq 1$，$m \geq 0$，$X \in \mathcal{C}$。

1) 若 X 是(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射的，则对任意的 $m' \geq m$，X 也是(n, m')-强 ξ-Gorenstein 投射的；

2) 若 X 是(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射的，则对任意的 $k \geq 1$，X 也是(kn, m)-强 ξ-Gorenstein 投射的。特别地，每个$(1, m)$-强 ξ-Gorenstein 投射对象也是(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射的。

证明 (1) 根据(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射对象的定义即得。

设 X 是(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射的，则存在 ξ-正合复形

$$0 \to X \to Q_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} Q_{n-2} \to \cdots \to Q_1 \xrightarrow{d_1} Q_0 \xrightarrow{d_0} X \to 0,$$

其中 $\xi\text{-pd}(Q_i) \leq m$，$0 \leq i \leq n-1$，且对任意的 ξ-投射对象 Q 和 $i > m$ 有 $\xi\mathrm{xt}^i_{\xi}(X,Q) = 0$。把 k 个这样的正合列粘合在一起，即得 X 是(kn, m)-强 ξ-Gorenstein 投射的。□

命题 2.4 设 $X_1, X_2, \cdots, X_k\ (k \geq 1)$ 是 $\mathcal{C}$ 中的(n_i, m_i)-强 ξ-Gorenstein 投射对象，则 $\oplus_{i=1}^{k} X_i$ 是(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射的，其中 $m = \max\{m_1, m_2, \cdots, m_k\}$，$n$ 是 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 的最小公倍数。特别地，(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射对象关于有限直和 c 封闭。

证明 由条件及命题 2.3 知，X_i 是(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射的 s。于是由定义知结论成立。□

定理 2.5 设整数 $n \geq 1$，$m \geq 0$，X 是(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射对象，则

1) 存在整数 $k > 0$，使得 $\xi\text{-Gpd}X = k \leq m$；

2) 当 $1 \leq i \leq k$ 时，X 的第 i 个合冲 K_i 是$(n, m\text{-}i)$-强 ξ-Gorenstein 投射的；

3) 当 $i \geq k$ 时，X 的第 i 个合冲 K_i 是$(n, 0)$-强 ξ-Gorenstein 投射的。

证明 首先证明(1)和(2)。因为 X 是(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射的，所以存在 ξ-正合复形

$$0 \to X \to Q_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} Q_{n-2} \to \cdots \to Q_1 \xrightarrow{d_1} Q_0 \xrightarrow{d_0} X \to 0,$$

其中，对任意的 $0 \le i \le n-1$，ξ-pd$(Q_i) \le m$，且对任意的 ξ-投射对象 Q 及 $i > m$，有 $\xi\text{xt}_{\xi}^{i}\left(X,Q\right)=0$。考虑 ξ 中 E-三角 $K_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow X \dashrightarrow$，其中 P_0 是 ξ-投射的。由([8]，引理 3.4)知，对任意的 $i > m-1$ 以及任意 ξ-投射对象 Q，$\xi\text{xt}_{\xi}^{i}\left(K_1,Q\right)=0$。由上述 ξ-正合复形可得 E 三角 $H_i \longrightarrow Q_{i-1} \longrightarrow H_{i-1} \dashrightarrow$，其中 $0 \le i \le n$，$H_n = X = H_0$。对于 $i=0,1,\cdots,n$，考虑 ξ 中 E-三角 $K_{i,1} \longrightarrow P_{i,0} \longrightarrow H_i \dashrightarrow$，其中 $P_{i,0}$ 是 ξ-投射的，$i=1,2,\cdots,n-1$ 且 $P_{n,0}=P_{0,0}=P_0$，$K_{n,1}=K_{0,1}=K_1$，则对任意 $i=n,n-1,\cdots,1$，可得交换图

$$\begin{tikzcd}
K_{i,1} \arrow[r] \arrow[d] & Q'_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & K_{i-1,1} \arrow[r, dotted] \arrow[d] & {} \\
P_{i,0} \arrow[r] \arrow[d] & P_{i,0} \oplus P_{i-1,0} \arrow[r] \arrow[d] & P_{i-1,0} \arrow[r, dotted] \arrow[d] & {} \\
H_i \arrow[r] \arrow[d, dotted] & Q_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & H_{i-1} \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & {} \\
{} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

把这 n 个交换图结合在一起，可得如下 ξ-正合序列交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r] \arrow[d] & Q'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & Q'_0 \arrow[r] \arrow[d] & K_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \oplus P_{n-1,0} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P_{1,0} \oplus P_0 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, dotted] & Q_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \cdots \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & X \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\
& {} & {} & & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

因为对任意的 $0 \le i \le n-1$，有 ξ-pd$\left(Q'_i\right) \le m-1$，所以由该交换图最上面一行的 ξ-正合序列可得 K_1 是$(n, m-1)$-强 ξ-Gorenstein 投射的。进一步，归纳地可得，当 $1 \le i \le m$ 时，K_i 是$(n, m-i)$-强 ξ-Gorenstein 投射的。特别地，K_m 是$(n, 0)$-强 ξ-Gorenstein 投射的。由注记 1.2 和注记 2.2 得，K_m 也是 ξ-Gorenstein 投射的。因此，存在 $k \le m$，使得 ξ-Gpd$X = k$。

再证明(3)，即证对任意 $i \ge k$，X 的第 i 个合冲是$(n, 0)$-强 ξ-Gorenstein 投射的。考虑 X 的第 k 个合冲 K_k。因为 K_k 是 ξ-Gorenstein 投射的，所以可选 K_k 的一个完备 ξ-投射分解的左半部分，则存在如下完备 ξ-正合复形

$$0 \to K'_{m-k} \to F_{m-k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow K_k \to 0。$$

由第一部分的证明可知，K'_{m-k} 是$(n, 0)$-强 ξ-Gorenstein 投射的(它是 X 的第 m 个合冲)，从而对偶于第一部分的证明可得如下的 ξ-正合复形

$$0 \to K_k \to L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow K_k \to 0,$$

其中 $L_i(0 \le i \le n-1)$是 ξ-投射的。因为 K_k 是 ξ-Gorenstein 投射的，所以对 $i > 0$ 和任意的 ξ-投射对象 Q，$\xi\text{xt}_{\xi}^{i}\left(K_k,Q\right)=0$。因此，$K_k$ 是$(n, 0)$-强 ξ-Gorenstein 投射的。故由注记 1.4 知对任意的 $i \ge k$，X 的第 i 个合冲 K_i 是$(n, 0)$-强 ξ-Gorenstein 投射的。 □

下面考虑定理 2.5 的逆是否成立，即如果对象 X 的第 i 个合冲 K_i 是(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射的，那么 X 是否为$(n, m+i)$-强 ξ-Gorenstein 投射的？当 $n = 1$ 时，问题是肯定的。为证明这个结论，先引入下面两个引理。

引理 2.6 设 X，$Y \in \mathcal{C}$，且存在 $\mathcal{C}$ 中 ξ-投射维数有限的对象 P 和 Q，使得 $X \oplus P \cong Y \oplus Q$，则对任意

正整数 $n \geq 1$ 和 $m \geq \max\{\xi\text{-pd}P, \xi\text{-pd}Q\}$，$X$ 是(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射的当且仅当 Y 是(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射的。

证明 设 X 是(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射的，则由命题 2.4 知 $X \oplus P \cong Y \oplus Q$ 也是(n, m)-强 ξ- Gorenstein 投射的。令 $H = Y \oplus Q$，则存在 ξ-正合复形

$$0 \to H \to Q_{n-1} \longrightarrow Q_{n-2} \to \cdots \to Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow H \to 0,$$

其中 ξ-pd$(Q_i) \leq m$，$i = 0,1,\cdots,n-1$，且对任意的 ξ-投射对象 L，都有 $\xi\mathrm{xt}_{\xi}^{i}(H, L) = 0 \quad (\forall i > m)$。因此，对任意投射对象 L，$\xi\mathrm{xt}_{\xi}^{i}(Y, L) = 0 \quad (\forall i > m)$。把上面的 ξ-正合复形分解成如下 ξ-正合复形和 ξ 中 $\mathbb{E}$-三角：

$$0 \to E \to Q_{n-2} \longrightarrow Q_{n-3} \to \cdots \to Q_2 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow F \to 0$$

$$H \longrightarrow Q_{n-1} \longrightarrow E \cdots >, \quad F \longrightarrow Q_0 \longrightarrow H \cdots >。$$

由 ξ 中 $\mathbb{E}$-三角 $H \longrightarrow Q_{n-1} \longrightarrow E \cdots >$ 和 $Q \longrightarrow H \longrightarrow Y \cdots >$，可得如下余基变换交换图

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & H \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r, dotted] \arrow[d] & {} \\
Q \arrow[r] & Q_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & G_{n-1} \arrow[r, dotted] \arrow[d] & {} \\
 & E \arrow[r, equal] \arrow[d, dotted] & E \arrow[d, dotted] & \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

又由 ξ 中 $\mathbb{E}$-三角 $F \longrightarrow Q_0 \longrightarrow H \cdots >$ 和 $Y \longrightarrow H \longrightarrow Q \cdots >$，可得如下基变换交换图

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, equal] \arrow[d] & F \arrow[d] & & \\
G_0 \arrow[r] \arrow[d] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r, dotted] \arrow[d, equal] & {} \\
Y \arrow[r] \arrow[d, dotted] & H \arrow[r] \arrow[d, dotted] & Q \arrow[r, dotted] & {} \\
{} & {} & &
\end{tikzcd}$$

由定理 2.5 知 H，E 和 F 的 ξ-Gorenstein 投射维数均小于等于 m，所以由上述两个交换图知，G_{n-1} 和 G_0 的 ξ-Gorenstein 投射维数小于等于 m。另一方面，由上面两个图的中间行可知，G_{n-1} 与 G_0 的 ξ-投射维数均有限。因此，由([6]，命题 5.4)知，$\xi\text{-pd}G_0 = \xi\text{-Gpd}G_0 \leq m$，$\xi\text{-pd}G_{n-1} = \xi\text{-Gpd}G_{n-1} \leq m$。最后，由 ξ-正合复形

$$0 \to E \to Q_{n-2} \longrightarrow Q_{n-3} \to \cdots \to Q_2 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow F \to 0,$$

和 ξ 中 $\mathbb{E}$-三角

$$Y \longrightarrow G_{n-1} \longrightarrow E \cdots >, \quad F \longrightarrow G_0 \longrightarrow Y \cdots >$$

可得 ξ-正合复形

$$0 \to Y \longrightarrow G_{n-1} \longrightarrow Q_{n-2} \longrightarrow Q_{n-3} \to \cdots \to Q_1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow Y \to 0。$$

因此，Y 是(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射的。反之，显然。 □

引理 2.7 设 $X \in \mathcal{C}$，整数 $n \geq 1$，$m \geq 0$。

1) 若 X 既是 ξ-Gorenstein 投射的又是(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射的，则它是 n-强 ξ-Gorenstein 投射的；

2) 若存在整数 $d \geq 1$，使得 X 的第 d 个合冲是 (n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射的，则存在正整数 k，使得 $\xi\text{-Gpd}X = k \leq d + m$ 并且对任意的 $i \geq k$，X 的第 i 个合冲是 n-强 ξ-Gorenstein 投射的。

证明 (1) 类似于定理 2.5 的最后一部分的证明可得。

设 $d \geq 1$，使得 X 的第 d 个合冲是 (n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射的，则由定理 2.5 知，存在正整数 k，使得 $\xi\text{-Gpd}X = k \leq d + m$。于是存在 ξ-正合复形

$$0 \to K_k \longrightarrow P_{k-1} \longrightarrow P_{k-2} \longrightarrow P_{k-3} \to \cdots \to P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow X \to 0,$$

其中 $P_i(0 \leq i \leq k-1)$ 是 ξ-投射的，K_k 是 ξ-Gorenstein 投射的。因为 K_k 是 ξ-Gorenstein 投射的，所以存在 ξ-正合复形

$$0 \to K_d \longrightarrow Q_{d-1} \longrightarrow Q_{d-2} \longrightarrow Q_{d-3} \to \cdots \to Q_{k+1} \longrightarrow Q_k \longrightarrow K_k \to 0,$$

其中 $Q_{k+i}(0 \leq i \leq d-k-1)$ 是 ξ-投射的，K_d 是 ξ-Gorenstein 投射的。注意到 K_d 是 X 的第 d 个合冲，所以由条件及引理 2.6 知，K_d 是 (n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射的。从而由(1)知，K_d 是 n-强 ξ-Gorenstein 投射的。故由注记 1.4 知，对任意 $i \geq k$，K_i 是 n-强 ξ-Gorenstein 投射的。 □

下面给出本文的第二个主要结果。

定理 2.8 设整数 $d \geq 1$，$m \geq 0$。若 X 的第 d 个合冲是 $(1, m)$-强 ξ-Gorenstein 投射的，则存在整数 $k > 0$，使得 $\xi\text{-Gpd}X = k \leq d + m$，并且 X 是 $(1, k)$-强 ξ-Gorenstein 投射的。

证明 由推论 2.7(2)，存在整数 $k > 0$，使得 $\xi\text{-Gpd}X = k \leq d + m$，并且对任意的 $i \geq k$，X 的第 i 个合冲是 $(1, 0)$-强 ξ-Gorenstein 投射的。特别地，存在 ξ-正合复形

$$0 \to K_k \longrightarrow P_{k-1} \longrightarrow P_{k-2} \longrightarrow P_{k-3} \to \cdots \to P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow X \to 0,$$

其中 $P_i(0 \leq i \leq k-1)$ 是 ξ-投射的，K_k 是 $(1, 0)$-强 ξ-Gorenstein 投射的。因此存在 ξ 中 $\mathbb{E}$-三角 $K_k \longrightarrow P \longrightarrow K_k \dashrightarrow$，其中 P 是 ξ-投射的。由注记 1.2 和注记 2.2 知，K_k 是 $(k, 0)$-强 ξ-Gorenstein 投射的。由([6]，命题 5.5)可得 ξ-正合复形

$$0 \longrightarrow Q_k \longrightarrow Q_{k-1} \longrightarrow Q_{k-2} \to \cdots \to Q_1 \longrightarrow G \longrightarrow X \to 0,$$

其中 $Q_k = P$，$G = K_k \oplus P_0$，$Q_i = P \oplus P_{i-1}$，$i = 1, 2, \cdots, k-1$。由 ξ 中 $\mathbb{E}$-三角 $G \longrightarrow Q \longrightarrow G \dashrightarrow$ 可知，$G = K_k \oplus P_0$ 是 $(1, 0)$-强 ξ-Gorenstein 投射的，其中 $Q = P \oplus P_0 \oplus P_0$。于是由马蹄引理([7]，引理 3.21)可得如下交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q_k \arrow[r] \arrow[d] & Q_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q'_k \arrow[r] \arrow[d] & Q_{k-1} \oplus Q_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \oplus Q_1 \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Q_k \arrow[r] \arrow[d, dotted] & Q_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & G \arrow[r] \arrow[d, dotted] & X \arrow[r] & 0 \\
 & {} & {} & & {} & {} & &
\end{tikzcd}$$

因为 Q_k 是 ξ-投射的，所以 Q'_k 也是 ξ-投射的。由上述交换图中间复形是 ξ-正合复形知，存在 ξ 中 $\mathbb{E}$-三角 $X \longrightarrow P' \longrightarrow X \dashrightarrow$，其中 $\xi\text{-pd}P' \leq k$。因此，X 是 $(1, k)$-强 ξ-Gorenstein 投射的。 □

设 $\mathcal{C}$ 有可数直和，ξ 关于可数直和封闭，则由([7]，定理 4.17)知，X 是 ξ-Gorenstein 投射的当且仅当 X 是某个强 ξ-Gorenstein 投射对象的直和项。这里我们有

定理 2.9 设 $\mathcal{C}$ 有可数直和，ξ 关于可数直和封闭，$X\in\mathcal{C}$，整数 $m\geq 0$。则 ξ-Gpd$X\leq m$ 当且仅当存在 ξ-Gorenstein 投射对象 G，使得 $X\oplus G$ 是(1, m)-强 ξ-Gorenstein 投射的。

证明 充分性) 由定理 2.5(1)和([5]，引理 5.1)可得。

必要性) 设 ξ-Gpd$X\leq m$，则存在 ξ-正合复形

$$0\to K_m\longrightarrow P_{m-1}\longrightarrow P_{m-2}\to\cdots\to P_1\longrightarrow P_0\longrightarrow X\to 0\,, \tag{1}$$

其中 P_i 是 ξ-投射的，$i=0,1,\cdots,m-1$，K_m 是 ξ-Gorenstein 投射的。由([7]，定理 4.17)和注记 2.2 知，存在 ξ-Gorenstein 投射对象 G'，使得 $K_m\oplus G'$ 是(1, 0)-强 ξ-Gorenstein 投射的。对 G'，存在 ξ-正合复形

$$0\to G'\longrightarrow Q_{m-1}\longrightarrow Q_{m-2}\to\cdots\to Q_1\longrightarrow Q_0\longrightarrow G\to 0\,, \tag{2}$$

其中 Q_i 是 ξ-投射的，$i=0,1,\cdots,m-1$，G 是 ξ-Gorenstein 投射的。将(1)和(2)做直和可得 ξ-正合复形

$$0\to K_m\oplus G'\longrightarrow P_{m-1}\oplus Q_{m-1}\to\cdots\to P_1\oplus Q_1\longrightarrow P_0\oplus Q_0\longrightarrow X\oplus G\to 0\,。$$

故 $X\oplus G$ 的第 m 个合冲 $K_m\oplus G'$ 是(1, 0)-强 ξ-Gorenstein 投射的。因此，由命题 2.3 和定理 2.8 知，$X\oplus G$ 是(1, m)-强 ξ-Gorenstein 投射的。 □

参考文献

[1] Nakaoka, H. and Palu, Y. (2019) Extriangulated Categories, Hovey Twin Cotorsion Pairs and Model Structures. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, **60**, 117-193.

[2] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (1995) Gorenstein Injective and Projective Modules. *Mathematische Zeitschrift*, **220**, 611-633. https://doi.org/10.1007/BF02572634

[3] Auslander, M. and Brider, M. (1969) Stable Module Theory. Memoirs of the American Mathematical Society. American Mathematical Society, Providence. https://doi.org/10.1090/memo/0094

[4] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (2000) Relative Homological Algebra. Walter de Gruyter Press, New York. https://doi.org/10.1515/9783110803662

[5] Beligiannis, A. (2000) Relative Homological Algebra and Parity in Triangulated Categories. *Journal of Algebra*, **227**, 268-361. https://doi.org/10.1006/jabr.1999.8237

[6] Hu, J.S., Zhang, D.D. and Zhou, P.Y. (2020) Proper Classes and Gorensteinness in Extriangulated Categories. *Journal of Algebra*, **551**, 23-60. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.12.028

[7] He, Z.G. (2021) Gorenstein Objects in Extriangulated Categories. arXiv: 2011.14552.

[8] Hu, J.S., Zhang, D.D. and Zhou, P.Y. (2021) Gorenstein Homological Dimensions for Extriangulated Categories. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **18**, 2235-2252. https://doi.org/10.1007/s40840-020-01057-9

[9] Bennis, D. and Mahdou, N. (2007) Strongly Gorenstein Projective, Injective, and Lat Modules. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **210**, 437-445. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2006.10.010

[10] Bennis, D. and Mahdou, N. (2009) A Generalization Strongly Gorenstein Projective Modules. *Journal of Algebra and Its Applications*, **8**, 219-227. https://doi.org/10.1142/S021949880900328X

[11] Bennis, D. (2009) (n; m)-Strongly Gorenstein Projective Modules. *International Electronic Journal of Algebra*, **6**, 119-133.

[12] 常雯雯, 高楠. 三角范畴中的(n, m)-强 ξ-Gorenstein 投射对象[J]. 应用数学与计算数学学报, 2014, 28(2): 166-174.

[13] Rotman, J.J. (1979) An Introduction to Homological Algebra. Academic Press, New York.