Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 69-77
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145162

Hans汉斯

图的顶点矩阵加权Zeta函数

考梦诗

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年3月11日；录用日期：2024年4月3日；发布日期：2024年5月16日

摘　要

对于一个图，定义了它的顶点矩阵加权zeta函数，并给出了相对应的行列式表达式。之后定义了图的顶点矩阵加权L-函数。然后对于二部图给出了其顶点矩阵加权zeta函数和L-函数的具体形式。最后计算了二部图zeta函数的例子。

关键词

Zeta函数，顶点矩阵加权，L-函数，二部图

A Vertex Matrix-Weighted Zeta Function of a Graph

Mengshi Kao

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 11th, 2024; accepted: Apr. 3rd, 2024; published: May 16th, 2024

Abstract

We define a vertex matrix-weighted zeta function of a graph, and give a determinant expression of it. Then we give the L-function in this weight. Furthermore, we define a vertex matrix-weighted zeta function of a bipartite graph, and give the determinant expression of zeta function and L-function of a bipartite graph. Finally, we give an example of the zeta function of a bipartite graph.

Keywords

Zeta Function, Vertex Matrix-Weight, L-Function, Bipartite Graph

---

文章引用: 考梦诗. 图的顶点矩阵加权 Zeta 函数[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 69-77.
DOI: 10.12677/pm.2024.145162

1. 简要介绍

图的 zeta 函数首先由 Ihara 提出，他对正则图定义了 Ihara zeta 函数，并证明了正则图的 Ihara zeta 函数的倒数是一个多项式。Sunada [1]得到了图的正则覆盖图的 zeta 函数和图的基本群的表示之间的联系。Hashimoto [2]将 Ihara 关于正则图的 Ihara zeta 函数的结论推广到了非正则图，并证明了它的倒数也是由一个包含边关联矩阵的行列式构成的多项式。利用非正则图的邻接矩阵，Bass [3]给出了非正则图的 Ihara zeta 函数的另一个行列式表达式。之后，Stark 和 Terras [4] [5]定义了图的边 zeta 函数和路 zeta 函数。Sato [6] [7] [8]和他的合作者定义了各种加权版本的 zeta 函数，并得到这些 zeta 函数的行列式表达式。

这里所提到的图都是有限的简单图。$G=(V(G),E(G))$ 是一个连通图，其中 $V(G)$ 是它的顶点集，$E(G)$ 是它的无向边集。uv 表示连接点 u 和 v 的一条边，弧 (u,v) 是连接从 u 到 v 一条有向边。$D(G)=\{(u,v),(v,u)\mid uv\in E(G)\}$。对于有向边 $e=(u,v)\in D(G)$，让 $u=o(e)$，$v=t(e)$。此外，$e^{-1}=(v,u)$ 表示 $e=(u,v)$ 的逆。

图 G 中长度为 n 的路 P 是一系列边 $P=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$，其中要满足 $e_i\in D(G)$，$t(e_i)=o(e_{i+1})(1\le i\le n-1)$。对于路 $P=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$，$|P|=n$，$o(P)=o(e_1)$ 并且 $t(P)=t(e_n)$，当存在 $i(1\le i\le n-1)$ 使得 $e_{i+1}^{-1}=e_i$ 时，称这条路有回溯，当 $o(P)=t(P)$ 时，称这条路是一个圈。圈 $C=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 的逆是圈 $C^{-1}=(e_n^{-1},e_{n-1}^{-1},\cdots,e_1^{-1})$。

对于两个圈 $C_1=(e_1,e_2,\cdots,e_m)$ 和 $C_2=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$ 如果存在 k 使得对于所有的 j 有 $f_j=e_{j+k}$，这里的指标都是 mod k 的，那么称这两个圈是等价的。一般而言圈 C 的逆和它本身是不等价的。$[C]$ 表示圈 C 的等价类，即所有与 C 等价的圈的集合。B^r 表示圈 B 进行 r 次循环得到的圈，这种圈称作圈 B 的幂次。如果一个圈及与它等价的圈都没有回溯，那么就称它是约化的。此外如果圈 C 不是严格比它小的一个圈的幂次，那么就称这个圈是素圈。事实上，图 G 的每个约化的素圈的等价类唯一对应图 G 在点 v 的基本群 $\pi_1(G,v)$ 的共轭类。

当 $u\in\mathbb{C}$ 充分小，图 G 的 Ihare zeta 函数定义为

$$\zeta(G,u)=\zeta_G(u)=\prod_{[C]}\left(1-u^{|C|}\right)^{-1},$$

其中，$[C]$ 跑遍 G 中约化的素圈的所有等价类[9]。

本文的主要研究内容是定义了顶点矩阵加权的 zeta 函数和 L-函数，再通过计算得到图的顶点矩阵加权 zeta 函数和 L-函数的行列式表达式。这一结果推广了文献[7]的结果，并且是文献[11]的顶点加权的类比。

2. 图的顶点矩阵加权 zeta 函数

$G=(V(G),E(G))$ 是一个有限连通图，其中 $V(G)=\{v_1,\cdots,v_n\}$，$E(G)=\{e_1,\cdots,e_m\}$ 并且 $D(G)=\{e_1,e_1^{-1},\cdots,e_m,e_m^{-1}\}$。令 $w:V(G)\to\mathbb{C}^{k\times k}$ 表示一个函数。对于 G 中的圈 $C=(e_1,e_2,\cdots,e_r)$，$W_C=w(t(e_1))\cdots w(t(e_r))$。

定义 1. 图的顶点矩阵加权 zeta 函数定义为：

$$\zeta_G(w)=\prod_{[C]}\det(I-W_C)^{-1},$$

其中，$[C]$跑遍 G 中约化的素圈的所有等价类[11]。

首先定义三个 $2mk\times 2mk$ 矩阵，$B=\left(B_{e,f}\right)_{e,f\in D(G)}$，$J_0=\left(J_{e,f}\right)_{e,f\in D(G)}$ 和 U：

$$B_{e,f}=\begin{cases} I_k & t(e)=o(f) \\ 0 & \text{其他} \end{cases},\quad J_{e,f}=\begin{cases} I_k & f=e^{-1} \\ 0 & \text{其他} \end{cases},$$

$$U=diag\left(w\left(t\left(e_1\right)\right),w\left(t\left(e_1^{-1}\right)\right),w\left(t\left(e_2\right)\right),\cdots,w\left(t\left(e_m\right)\right),w\left(t\left(e_m^{-1}\right)\right)\right)。$$

之后便可以得到如下结果：

定理 2. G 是一个 n 个点 m 条边的有限连通图。$w:V(G)\to\mathbb{C}^{k\times k}$ 表示一个函数，则图的顶点矩阵 zeta 函数的倒数可以写成：

$$\zeta_G(w)^{-1}=\prod_{[C]}\det\left(I-W_C\right)=\det\left(I_{2mk}-U\left(B-J_0\right)\right)。$$

在证明定理 2 之前，我们需要如下的预备知识。我们将利用 Amitsur 恒等式[10]给出图 G 顶点矩阵加权 zeta 函数的行列式表达。首先需要了解 Lyndon 字的定义，X 是一个有限非空集，$<$是 X 的一个全序集，X^*是 X 生成的自由幺半群。X 中的全序集$<$导出 X^*中的典序$<^*$。X 中的 Lyndon 字定义为 X^*中的一个非空素字，即对于 $r\ge 2$，不存在一个字 l，使得它等于 l^r，并且在$<^*$下的圈重排的类里是最小的。将 L 表示成 X 中所有的 Lyndon 字。

引理 3. 对于方阵 $A_1,\cdots,A_k$，$\det\left(I-\left(A_1+\cdots+A_k\right)\right)=\prod_{l\in L}\det\left(I-A_l\right)$，其中，这个运算跑遍所有 $\{1,\cdots,k\}$ 中所有的 Lyndon 字，并且对于 $l=i_1\cdots i_p$ 有 $A_l=A_{i_1}\cdots A_{i_p}$。

接下来对定理 2 进行证明：

证明. 首先定义两个矩阵 $B^w=\left(B_{e,f}^{(w)}\right)_{e,f\in D(G)}$ 和 $J^w=\left(J_{e,f}^{(w)}\right)_{e,f\in D(G)}$：

$$B_{e,f}^{(w)}=\begin{cases} w(e) & t(e)=o(f) \\ 0 & \text{其他} \end{cases},\quad J_{e,f}^{(w)}=\begin{cases} w(e) & f=e^{-1} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}。$$

令 $D(G)=\{e_1,\cdots,e_m,e_{m+1},\cdots,e_{2m}\}$ 使得 $e_{m+i}=e_i^{-1}(1\le i\le m)$，$X_{e_j}$ 是第 $k(j-1)+1,\cdots,jk$ 行等于 B^w-J^w 的第 $k(j-1)+1,\cdots,jk$ 行，其他行等于 0 的 $2mk\times 2mk$ 矩阵。令 $M=I-\sum_{e\in D(G)}X_e$，则对于弧 π 任一序列，

$$\det\left(I-X_\pi\right)=\begin{cases} \det\left(I-w(\pi)\right) & \text{若 }\pi\text{ 是约化的素圈} \\ 1 & \text{其他} \end{cases},$$

其中，对于 $\pi=\left(e_1\cdots e_r\right)$ 有 $X_\pi=X_{e_1}\cdots X_{e_r}$。

通过上面的引理可得

$$\zeta_G(w)^{-1}=\det M=\det\left(I_{2mk}-\left(B^w-J^w\right)\right)。$$

而

$$UB=B^w,\quad UJ_0=J^w。$$

因此

$$\zeta_G(w)^{-1}=\det\left(I_{2mk}-\left(B^w-J^w\right)\right)=\det\left(I_{2mk}-U_\rho\left(B-J_0\right)\right)。$$

为了进一步得到 zeta 函数的行列式表达，定义两个分块矩阵：$\tilde{A}=\tilde{A}(G)=\left(A_{xy}\right)_{x,y\in V(G)}$

$$A_{xy}=\begin{cases}\left(I_k-w(y)w(x)\right)^{-1}w(y) & (x,y)\in D(G)\\ 0 & \text{其他}\end{cases},$$

$\tilde{D}=\tilde{D}(G)=\left(D_{xy}\right)_{x,y\in V(G)}$ 是一个准对角矩阵定义为：

$$D_{xx}=\sum_{o(e)=x}\left(I_k-w(t(e))w\left(t\left(e^{-1}\right)\right)\right)^{-1}w(t(e))w\left(t\left(e^{-1}\right)\right)。$$

定理 4. G 是一个 n 个点 m 条边的有限连通图。$w:V(G)\to\mathbb{C}^{k\times k}$ 表示一个函数，并且对于所有的 $e\in D(G)$ $\det\left(I_k-w(t(e_i))w\left(t\left(e_i^{-1}\right)\right)\right)\neq 0$，则图的顶点矩阵 zeta 函数的倒数可以写成：

$$\zeta_G(w)^{-1}=\det\left(I_{nk}-\tilde{A}+\tilde{D}\right)\prod_{i=1}^{m}\det\left(I_k-w(t(e_i))w\left(t\left(e_i^{-1}\right)\right)\right)。$$

定理 4 的证明见第 3 节定理 7。

3. 图的 L-函数

定理 5. G 是一个 n 个点 m 条边的有限连通图，Γ 是一个有限群。$\alpha:D(G)\to\Gamma$ 是一个一般电压分配，$\{w(v)\,|\,v\in V(G)\}$ 是图 G 的一个顶点矩阵加权，其中 $w(v)$ 是 $k\times k$ 维矩阵。当 $C=(e_1,e_2,\cdots,e_t)$ 是 G 的一个圈时，定义 $W_C=w(t(e_1))w(t(e_2))\cdots w(t(e_t))$，对于 G 中的路 $P=(e_1,e_2,\cdots,e_r)$，令 $\alpha(P)=\alpha(e_1)\alpha(e_2)\cdots\alpha(e_r)$。$\rho$ 是 Γ 的度为 d 的一个表示。

则图 G 关于 ρ 和 α 的顶点矩阵加权 L-函数定义为：

$$\zeta_G(w,\rho,\alpha)=\prod_{[C]}\det\left(I_{dk}-\rho(\alpha(C))\otimes W_C\right)^{-1},$$

其中，$[C]$ 跑遍 G 中约化的素圈的所有等价类。

令 $D(G)=\left\{e_1,e_1^{-1},\cdots,e_m,e_m^{-1}\right\}$

$$U_\rho=diag\left(\rho(\alpha(e_1))\otimes w(t(e_1)),\rho\left(\alpha\left(e_1^{-1}\right)\right)\otimes w\left(t\left(e_1^{-1}\right)\right),\cdots,\rho\left(\alpha\left(e_m^{-1}\right)\right)\otimes w\left(t\left(e_m^{-1}\right)\right)\right)$$

$B_\rho=\left(B_{e,f}^{(\rho)}\right)_{e,f\in D(G)}$，$J_\rho=\left(J_{e,f}^{(\rho)}\right)_{e,f\in D(G)}$ 定义如下：

$$B_{e,f}^{(\rho)}=\begin{cases}I_{dk} & t(e)=o(f)\\ 0 & \text{其他}\end{cases},\quad J_{e,f}^{(\rho)}=\begin{cases}I_{dk} & f=e^{-1}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}。$$

定理 6. G 是一个 n 个点 m 条边的有限连通图，Γ 是一个有限群。$\alpha:D(G)\to\Gamma$ 是一个一般电压分配，$\{w(v)\,|\,v\in V(G)\}$ 是图 G 的一个顶点矩阵加权，其中 $w(v)$ 是 $k\times k$ 维矩阵。当 $C=(e_1,e_2,\cdots,e_t)$ 是 G 的一个圈时，定义 $W_C=w(t(e_1))w(t(e_2))\cdots w(t(e_t))$，对于 G 中的路 $P=(e_1,e_2,\cdots,e_r)$，令 $\alpha(P)=\alpha(e_1)\alpha(e_2)\cdots\alpha(e_r)$。$\rho$ 是 Γ 的度为 d 的一个表示。则图 G 关于 ρ 和 α 的顶点矩阵加权 L-函数的倒数可以写成：

$$\zeta_G(w,\rho,\alpha)^{-1}=\det\left(I_{2mkd}-U_\rho\left(B_\rho-J_\rho\right)\right)。$$

证明. 首先定义两个矩阵 $B_\rho^w=\left(B_{e,f}^{(\rho,w)}\right)_{e,f\in D(G)}$，$J_\rho^w=\left(J_{e,f}^{(\rho,w)}\right)_{e,f\in D(G)}$

$$B_{e,f}^{(\rho,w)}=\begin{cases}\rho(\alpha(e))\otimes w(e) & t(e)=o(f)\\ 0 & \text{其他}\end{cases},\quad J_{e,f}^{(\rho,w)}=\begin{cases}\rho(\alpha(e))\otimes w(e) & f=e^{-1}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}。$$

令 $D(G)=\{e_1,\cdots,e_m,e_{m+1},\cdots,e_{2m}\}$ 使得 $e_{m+i}=e_i^{-1}(1\le i\le m)$，$Y_{e_j}$ 是第 $d(j-1)k+1,\cdots,djk$ 行等于 $B_\rho^w-J_\rho^w$ 的第 $d(j-1)+1,\cdots,djk$ 行，其他行等于 0 的 $2mkd\times 2mkd$ 矩阵。令 $M=I-\sum_{e\in D(G)}Y_e$，则对于弧 π 任一序列，

$$\det(I-Y_\pi)=\begin{cases}\det\left(I-\rho(\alpha(\pi))\otimes w(\pi)\right) & \text{若}\pi\text{是约化的素圈}\\ 1 & \text{其他}\end{cases},$$

其中，对于 $\pi=(e_1\cdots e_r)$ 有 $Y_\pi=Y_{e_1}\cdots Y_{e_r}$。

通过之前的引理可得

$$\zeta_G(w,\rho,\alpha)^{-1}=\det M=\det\left(I_{2mkd}-\left(B_\rho^w-J_\rho^w\right)\right)。$$

而

$$U_\rho B_\rho=B_\rho^w，\quad U_\rho J_\rho=J_\rho^w，$$

因此

$$\zeta_G(w,\rho,\alpha)^{-1}=\det\left(I_{2mkd}-\left(B_\rho^w-J_\rho^w\right)\right)=\det\left(I_{2mkd}-U_\rho\left(B_\rho-J_\rho\right)\right)。$$

之后对于任一个 $g\in\Gamma$，定义一个 $nk\times nk$ 维矩阵 $A_g=\left(A_{xy,g}\right)_{x,y\in V(G)}$：

$$A_{xy.g}=\begin{cases}\left(I_k-w(y)w(x)\right)^{-1}w(y) & (x,y)\in D(G)\text{并且}\alpha(x,y)=g\\ 0 & \text{其他}\end{cases}。$$

定理 7. G 是一个 n 个点 m 条边的有限连通图，Γ 是一个有限群。$\alpha:D(G)\to\Gamma$ 是一个一般电压分配，$\{w(v)\mid v\in V(G)\}$ 是图 G 的一个顶点矩阵加权，其中 $w(v)$ 是 $k\times k$ 维矩阵并且对于所有 $e\in D(G)$，都有 $\det\left(I_k-w(t(e_i))w(t(e_i^{-1}))\right)\ne 0$。当 $C=(e_1,e_2,\cdots,e_t)$ 是 G 的一个圈时，定义 $W_C=w(t(e_1))w(t(e_2))\cdots w(t(e_t))$，对于 G 中的路 $P=(e_1,e_2,\cdots,e_r)$，令 $\alpha(P)=\alpha(e_1)\alpha(e_2)\cdots\alpha(e_r)$。$\rho$ 是 Γ 的度为 d 的一个表示。则图 G 关于 ρ 和 α 的顶点矩阵加权 L-函数的倒数可以写成：

$$\zeta_G(w,\rho,\alpha)^{-1}=\prod_{i=1}^m\det\left(I_k-w(t(e_i))w(t(e_i^{-1}))\right)^d\times\det\left(I_{2mkd}-\sum_{g\in\Gamma}\rho(g)\otimes A_g+I_d\otimes\tilde{D}(G)\right)。$$

证明. 首先定义两个矩阵 $M_\rho=\left(M_{e,v}^{(\rho)}\right)_{e\in D(G),v\in V(G)}$，$N_\rho=\left(N_{e,v}^{(\rho)}\right)_{e\in D(G),v\in V(G)}$：

$$M_{e,f}^{(\rho)}=\begin{cases}I_{dK} & t(e)=v\\ 0 & \text{其他}\end{cases}，\quad N_{e,f}^{(\rho)}=\begin{cases}I_{dk} & o(e)=v\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

不难得到 $B_\rho=M_\rho\left(N_\rho\right)^T$。

所以 $\zeta_G(w,\rho,\alpha)^{-1}=\det\left(I_{2mkd}-U_\rho\left(B_\rho-J_\rho\right)\right)=\det\left(I_{2mkd}-U_\rho M_\rho\left(N_\rho\right)^T+U_\rho J_\rho\right)$

$$\begin{aligned}\det\left(I_{2mkd}+U_\rho J_\rho\right)&=\sum_{i=1}^m\det\left(I_{2kd}+\begin{pmatrix}0 & \rho(\alpha(e_i))\otimes w(t(e_i))\\ \rho(\alpha(e_i^{-1}))\otimes w(t(e_i^{-1})) & 0\end{pmatrix}\right)\\&=\sum_{i=1}^m\det\left(I_{kd}-I_d\otimes w(t(e_i))w(t(e_i^{-1}))\right)\\&=\sum_{i=1}^m\det\left(I_k-w(t(e_i))w(t(e_i^{-1}))\right)^d\end{aligned}$$

由条件 $\det\left(I_k - w\left(t\left(e_i\right)\right)w\left(t\left(e_i^{-1}\right)\right)\right) \neq 0$，

所以 $I_{2mkd} + U_\rho J_\rho$ 可逆，

因此 $\zeta_G\left(w,\rho,\alpha\right)^{-1} = \det\left(I_{2mkd} + U_\rho J_\rho\right)\det\left(I_{2mkd} - \left(I_{2mkd} + U_\rho J_\rho\right)^{-1} U_\rho M_\rho \left(N_\rho\right)^T\right)$

$$\det\left(I_{2mkd} - \left(I_{2mkd} + U_\rho J_\rho\right)^{-1} U_\rho M_\rho \left(N_\rho\right)^T\right) = \det\left(I_{2mkd} - \left(N_\rho\right)^T \left(I_{2mkd} + U_\rho J_\rho\right)^{-1} U_\rho M_\rho\right)$$

令 $H_i = \begin{pmatrix} I_{kd} & \rho\left(\alpha\left(e_i\right)\right) \otimes w\left(t\left(e_i\right)\right) \\ \rho\left(\alpha\left(e_i^{-1}\right)\right) \otimes w\left(t\left(e_i^{-1}\right)\right) & I_{kd} \end{pmatrix}$，

所以 $I_{2mkd} + U_\rho J_\rho = diag\left(H_1, H_2, \cdots, H_m\right)$

又因为 $\begin{pmatrix} I & F \\ H & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \left(I - FH\right)^{-1} & -F\left(I - HF\right)^{-1} \\ -H\left(I - FH\right)^{-1} & \left(I - HF\right)^{-1} \end{pmatrix}$

令 $I_k - w\left(t\left(e_i\right)\right)w\left(t\left(e_i^{-1}\right)\right) = K_{ii^{-1}}$， $I_k - w\left(t\left(e_i^{-1}\right)\right)w\left(t\left(e_i\right)\right) = K_{i^{-1}i}$，

$$H_i^{-1} = \begin{pmatrix} \left[I_d \otimes K_{ii^{-1}}\right]^{-1} & -\rho\left(\alpha\left(e_i\right)\right) \otimes w\left(t\left(e_i\right)\right)\left[I_d \otimes K_{i^{-1}i}\right]^{-1} \\ -\rho\left(\alpha\left(e_i^{-1}\right)\right) \otimes w\left(t\left(e_i^{-1}\right)\right)\left[I_d \otimes K_{ii^{-1}}\right]^{-1} & \left[I_d \otimes K_{i^{-1}i}\right]^{-1} \end{pmatrix},$$

所以 $\left(I_{2mkd} + U_\rho J_\rho\right)^{-1} = diag\left(H_1^{-1}, H_2^{-1}, \cdots, H_m^{-1}\right)$。

对于 $e = \left(x, y\right) \in D\left(G\right)$，

$$\begin{aligned} &\left(\left(N_\rho\right)^T \left(I_{2mkd} + U_\rho J_\rho\right)^{-1} U_\rho M_\rho\right)_{xy} \\ &= \left(N_\rho\right)^T_{xe} \left[\left(I_{2mkd} + U_\rho J_\rho\right)^{-1} U_\rho\right]_{ee} \left(M_\rho\right)_{ey} \\ &= \left[I_d \otimes \left(I_k - w\left(t\left(e\right)\right)w\left(t\left(e^{-1}\right)\right)\right)\right]^{-1} \rho\left(\alpha\left(e\right)\right) \otimes w\left(t\left(e\right)\right) \\ &= I_d \otimes \left(I_k - w\left(t\left(e\right)\right)w\left(t\left(e^{-1}\right)\right)\right)^{-1} \rho\left(\alpha\left(e\right)\right) \otimes w\left(t\left(e\right)\right) \\ &= \rho\left(\alpha\left(e\right)\right) \otimes \left[\left(I_k - w\left(t\left(e\right)\right)w\left(t\left(e^{-1}\right)\right)\right)^{-1} w\left(t\left(e\right)\right)\right] \\ &= \rho\left(\alpha\left(e\right)\right) \otimes \left[\left(I_k - w\left(y\right)w\left(x\right)^{-1}\right)^{-1} w\left(y\right)\right] \end{aligned}$$

对于 $x \in V\left(G\right)$，

$$\begin{aligned} &\left(\left(N_\rho\right)^T \left(I_{2mkd} + U_\rho J_\rho\right)^{-1} U_\rho M_\rho\right)_{xx} \\ &= \sum_{e, o(e) = x} \left(N_\rho\right)^T_{xe} \left[\left(I_{2mkd} + U_\rho J_\rho\right)^{-1} U_\rho\right]_{ee^{-1}} \left(M_\rho\right)_{e^{-1}x} \\ &= -\sum_{o(e) = x} \rho\left(\alpha\left(e\right)\right) \otimes w\left(t\left(e\right)\right)\left[I_d \otimes \left(I_k - w\left(t\left(e^{-1}\right)\right)w\left(t\left(e\right)\right)\right)\right]^{-1} \rho\left(\alpha\left(e^{-1}\right)\right) \otimes w\left(t\left(e^{-1}\right)\right) \\ &= -I_d \otimes \sum_{o(e) = x} w\left(t\left(e\right)\right)\left[I_k - w\left(t\left(e^{-1}\right)\right)w\left(t\left(e\right)\right)\right]^{-1} w\left(t\left(e^{-1}\right)\right) \\ &= -I_d \otimes \sum_{o(e) = x} \left[I_k - w\left(t\left(e\right)\right)w\left(t\left(e^{-1}\right)\right)\right]^{-1} w\left(t\left(e\right)\right)w\left(t\left(e^{-1}\right)\right) \end{aligned}$$

因此，

$$\det\left(I_{2mkd}-\left(N_\rho\right)^T\left(I_{2mkd}+U_\rho J_\rho\right)^{-1}U_\rho M_\rho\right)=\det\left(I_{2mkd}-\sum_{g\in\Gamma}\rho(g)\otimes A_g+I_d\otimes\tilde{D}(G)\right)。$$

当 ρ 是平凡表示时，定理 7 中的行列式表达式就是定理 4 中要证的等式。

4. 二部图的顶点矩阵加权 Zeta 函数

4.1. 二部图的 Zeta 函数

在二部图中，顶点矩阵加权可以有稍微一般一些的形式，在这里并不要求每个矩阵都是方阵。具体地，设 $G_{X,Y}$ 是一个 n_2 个点在 X 中，n_2 个点在 Y 中并且有 m 条边的有限连通二部图，其中 $D\left(G_{X,Y}\right)=\left\{e_1,e_1^{-1},\cdots,e_m^{-1}\right\}$。$w:X\to\mathbb{C}^{x\times y},Y\to\mathbb{C}^{y\times x}$ 表示一个函数。对于 $G_{X,Y}$ 中的圈 $C=\left(e_1,e_2,\cdots,e_r\right)$，令 $W_C=w\left(t\left(e_1\right)\right)w\left(t\left(e_2\right)\right)\cdots w\left(t\left(e_r\right)\right)$。

然后定义三个矩阵 $\hat{B}=\left(\hat{B}_{e,f}\right)_{e,f\in D\left(G_{X,Y}\right)}$，$\hat{J}_0=\left(\hat{J}_{e,f}\right)_{e,f\in D(G)}$ 和 $\hat{U}$：

$$\hat{B}_{e,f}=\begin{cases}I_y & t(e)=o(f),t(e)\in X\\ I_x & t(e)=o(f),t(e)\in Y\\ 0 & \text{其他}\end{cases},\quad \hat{J}_{e,f}=\begin{cases}I_y & f=e^{-1},t(e)\in X\\ I_x & f=e^{-1},t(e)\in Y\\ 0 & \text{其他}\end{cases},$$

$$\hat{U}=diag\left(w\left(t\left(e_1\right)\right),w\left(t\left(e_1^{-1}\right)\right),w\left(t\left(e_2\right)\right),\cdots,w\left(t\left(e_m\right)\right),w\left(t\left(e_m^{-1}\right)\right)\right)。$$

之后再定义一个矩阵 $\hat{A}=\left(\hat{A}_{uv}\right)_{u,v\in X\cup Y}$ 和一个准对角矩阵 $\hat{D}=\left(\hat{D}_{uv}\right)_{u,v\in X\cup Y}$：

$$\hat{A}_{uv}=\begin{cases}\left(I-w(v)w(u)\right)^{-1}w(v) & (u,v)\in D\left(G_{X,Y}\right)\\ 0 & \text{其他}\end{cases},$$

$$\hat{D}_{uu}=\sum_{o(e)=u}\left(I-w\left(t(e)\right)w\left(t\left(e^{-1}\right)\right)\right)^{-1}w\left(t(e)\right)w\left(t\left(e^{-1}\right)\right)。$$

则可以得到如下结果：

定理 8. $G_{X,Y}$ 是一个 n_1 个点在 X 中，n_2 个点在 Y 中并且有 m 条边的有限连通二部图，其中 $D\left(G_{X,Y}\right)=\left\{e_1,e_1^{-1},\cdots,e_m^{-1}\right\}$。$w:X\to\mathbb{C}^{x\times y},Y\to\mathbb{C}^{y\times x}$ 表示一个函数，并且对于所有的 $e\in D\left(G_{X,Y}\right)$ 都有 $\det\left(I_k-w\left(t\left(e_i\right)\right)w\left(t\left(e_i^{-1}\right)\right)\right)\neq 0$。对于 $G_{X,Y}$ 中的圈 $C=\left(e_1,e_2,\cdots,e_r\right)$，令 $W_C=w\left(t\left(e_1\right)\right)w\left(t\left(e_2\right)\right)\cdots w\left(t\left(e_r\right)\right)$。则二部图 $G_{X,Y}$ 的顶点矩阵加权 zeta 函数的倒数可以写成：

$$\begin{aligned}\zeta_{G_{X,Y}}(w)^{-1}&=\prod_{[C]}\det\left(I-W_C\right)=\det\left(I_{m(x+y)}-\hat{U}\left(\hat{B}-\hat{J}_0\right)\right)\\&=\det\left(I_{n_2x+n_1y}-\hat{A}+\hat{D}\right)\prod_{i=1}^m\det\left(I-w\left(t\left(e_i\right)\right)w\left(t\left(e_i^{-1}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

该定理的证明和前面的证明类似。

4.2. 二部图的 L-函数

定理 9. $G_{X,Y}$ 是一个 n_1 个点在 X 中，n_2 个点在 Y 中并且有 m 条边的有限连通二部图。w 是 4。中定义的 $G_{X,Y}$ 的一个顶点矩阵加权。Γ 是一个 r 阶的群，$\alpha:D(G)\to\Gamma$ 是一个一般电压分配。此外，ρ 是 Γ 的一个度为 d 的表示。则图 $G_{X,Y}$ 关于 ρ 和 α 的顶点矩阵加权 L-函数的倒数可以写成：

$$\zeta_{G_{X,Y}}(w,\rho,\alpha)^{-1}=\prod_{i=1}^m\det\left(I-w\left(t\left(e_i\right)\right)w\left(t\left(e_i^{-1}\right)\right)\right)^d\times\det\left(I-\sum_{g\in\Gamma}\rho(g)\otimes\bar{A}_g+I_d\otimes\hat{D}\right),$$

其中矩阵 $\bar{A}_g=\left(\bar{A}_{uv,g}\right)_{u,v\in X\cup Y}$ 定义为：

$$\bar{A}_{uv,g}=\begin{cases}\left(I-w(v)w(u)\right)^{-1}w(v) & (u,v)\in D\left(G_{X,Y}\right)\alpha(u,v)=g\\ 0 & \text{其他}\end{cases}。$$

4.3. 例子

$G_{X,Y}=K_{2,2}$ 是一个完全二部图，其中点 $1,2\in X$ ，点 $3,4\in Y$ 。w 是 $G_{X,Y}$ 的一个顶点矩阵加权定义为：

$$w(1)=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}, w(2)=\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}, w(3)=\begin{pmatrix}p & q\end{pmatrix}, w(4)=\begin{pmatrix}r & s\end{pmatrix}.$$

很容易看出 $K_{2,2}$ 的约化的素圈的等价类是 $[C]$ 和 $\left[C^{-1}\right]$，其中 $C=(1,3,2,4)$ 。
通过 $\zeta_{K_{2,2}}(w)$ 的定义有：

$$\begin{aligned}\zeta_{K_{2,2}}(w)^{-1}&=\det\left(I_2-W(C)\right)\det\left(I_1-W\left(C^{-1}\right)\right)\\ &=\left(1-(pc+qd)(ar+bs)\right)\left(1-(pa+qb)(cr+ds)\right).\end{aligned}$$

令 $E=pa+qb, F=ar+bs, G=pc+qd, H=cr+ds$ 可以得到：

$$\hat{A}_{13}=\frac{1}{1-E}\begin{pmatrix}p & q\end{pmatrix}, \hat{A}_{14}=\frac{1}{1-F}\begin{pmatrix}r & s\end{pmatrix},$$

$$\hat{A}_{23}=\frac{1}{1-G}\begin{pmatrix}p & q\end{pmatrix}, \hat{A}_{24}=\frac{1}{1-H}\begin{pmatrix}r & s\end{pmatrix},$$

$$\hat{A}_{31}=\frac{1}{1-E}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}, \hat{A}_{41}=\frac{1}{1-F}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix},$$

$$\hat{A}_{32}=\frac{1}{1-G}\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}, \hat{A}_{42}=\frac{1}{1-H}\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}.$$

所以

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \hat{A}_{13} & \hat{A}_{14}\\ 0 & 0 & \hat{A}_{23} & \hat{A}_{24}\\ \hat{A}_{31} & \hat{A}_{32} & 0 & 0\\ \hat{A}_{41} & \hat{A}_{42} & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\hat{D}=diag\Bigg\{&\frac{E}{1-E}+\frac{F}{1-F},\frac{G}{1-G}+\frac{H}{1-H},\frac{1}{1-G}\begin{pmatrix}pc & qc\\ pd & qd\end{pmatrix}+\frac{1}{1-E}\begin{pmatrix}pa & qa\\ pb & qb\end{pmatrix},\\ &\frac{1}{1-F}\begin{pmatrix}ar & as\\ br & bs\end{pmatrix}+\frac{1}{1-H}\begin{pmatrix}cr & cs\\ dr & ds\end{pmatrix}\Bigg\}.\end{aligned}$$

通过 4.1 的定理 8 可以得到

$$\begin{aligned}\zeta_{G_{X,Y}}(w)&=\det\left(I_6-\hat{A}+\hat{D}\right)\times(1-E)(1-F)(1-G)(1-H)\\ &=(1-GF)(1-EH)\\ &=\left(1-(pc+qd)(ar+bs)\right)\left(1-(pa+qb)(cr+ds)\right).\end{aligned}$$

参考文献

[1] Kotani, M. and Sunada, T. (2000) Zeta Functions of Finite Graphs. *Journal of Mathematical Sciences-University of Tokyo*, **7**, 7-25.

[2] Hashimoto, K.-I. (1989) Zeta Functions of Finite Graphs and Representations of *p*-Adic Groups. In: Hashimoto, K. and Namikawa, Y., Eds., *Automorphic Forms and Geometry of Arithmetic Varieties*, Academic Press, Boston, 211-280. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-330580-0.50015-X

[3] Bass, H. (1992) The Ihara-Selberg Zeta Function of a Tree Lattice. *International Journal of Mathematics*, **3**, 717-797. https://doi.org/10.1142/S0129167X92000357

[4] Stark, H.M. and Terras, A.A. (1996) Zeta Functions of Finite Graphs and Coverings. *Advances in Mathematics*, **121**, 124-165. https://doi.org/10.1006/aima.1996.0050

[5] Stark, H.M. and Terras, A.A. (2000) Zeta Functions of Finite Graphs and Coverings, Part II. *Advances in Mathematics*, **154**, 132-195. https://doi.org/10.1006/aima.2000.1917

[6] Mizuno, H. and Sato, I. (2000) Zeta Functions of Graph Coverings. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **80**, 247-257. https://doi.org/10.1006/jctb.2000.1983

[7] Mizuno, H. and Sato, I. (2004) Weighted Zeta Functions of Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **91**, 169-183. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2003.12.003

[8] Sato, I., Mitsuhashi, H. and Morita, H. (2014) A Matrix-Weighted Zeta Function of a Graph. *Linear and Multilinear Algebra*, **62**, 114-125. https://doi.org/10.1080/03081087.2013.764496

[9] Ihara, Y. (1966) On Discrete Subgroups of the Two by Two Projective Linear Group over *p*-Adic Fields. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **18**, 219-235. https://doi.org/10.2969/jmsj/01830219

[10] Amitsur, S.A. (1980) On the Characteristic Polynomial of a Sum of Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, **8**, 177-182. https://doi.org/10.1080/03081088008817315

[11] Foata, D. and Zeilberger, D. (1999) A Combinatorial Proof of Bass's Evaluations of the Ihara-Selberg Zeta Function for Graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, **351**, 2257-2274. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-99-02234-5