

# 具有饱和发生率的SAIRS传染病模型的定性分析

蔡钧如, 孙福芹

天津职业技术师范大学理学院, 天津

收稿日期: 2024年3月22日; 录用日期: 2024年4月20日; 发布日期: 2024年5月21日

## 摘要

本文建立了一类具有饱和发生率和无症状感染的SAIRS传染病模型。计算了模型的基本再生数 $R_0$ , 并推导出了模型的无病平衡点 $X_0$ 和地方病平衡点 $X^*$ 。进一步地, 对模型在饱和发生率的条件下平衡点的稳定性通过解得有界性和构造合适Lyapunov函数方法进行了研究。

## 关键词

饱和发生率, SAIRS模型, 稳定性

# Qualitative Analysis of the SAIRS Infectious Disease Model with Saturated Incidence

Junru Cai, Fuqin Sun

School of Sciences, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin

Received: Mar. 22<sup>nd</sup>, 2024; accepted: Apr. 20<sup>th</sup>, 2024; published: May 21<sup>st</sup>, 2024

## Abstract

We have established a class of SAIRS infectious disease models with saturated incidence and asymptomatic infection. The basic reproduction number  $R_0$  of the model has been calculated, and the disease-free equilibrium point  $X_0$  and endemic equilibrium point  $X^*$  have been derived. Furthermore, we conducted a qualitative analysis of the stability of equilibrium points under saturated incidence conditions using methods involving boundedness and constructing suitable Lyapunov functions.

\*通讯作者。

## Keywords

### Saturated Incidence, SAIRS Model, Stability

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

传染病在全球范围内一直是公共卫生的重大挑战。数学模型在理解疾病传播机制和制定控制策略方面发挥着关键作用。特别是, SAIRS 模型带有无症状感染[1] [2] [3] [4], 作为一种实用的传染病模型, 已被广泛应用于描述具有免疫的传染病的动态过程。然而, 传统的传染病模型通常假设疾病的传播率是恒定的, 这在某些情况下可能不太现实。在真实世界中, 由于行为改变、医疗资源限制等因素, 疾病的传播率往往会随着感染人数的增加而降低[5], 因此, 为了合理分析、研究传染病的传播机理, 必须选取恰当的发生率。在许多传染病模型中都是采用的线性发生率。但是, 线性发生率假设染病者的数量是按线性增长的, 这种假设对于某些传染病而言无法全面描述其传播规律。相比而言, 非线性发生率更能准确地描述传染病的发生规律, 在各种类型的非线性发生率中, 本文选取一种具有代表性的非线性发生率, 即饱和发生率[6]。引入饱和发生率来修改 SAIRS 模型, 使其能够更准确地描述疾病传播的实际情况, 是本文研究的主要目的。

本文通过引入具有饱和发生率的 SAIRS 模型, 旨在探究饱和效应对疾病传播动态的影响。通过建立一类具有无症状感染的传染病模型, 分析其在饱和发生条件下基本再生数、疾病平衡态。

## 2. 模型的建立

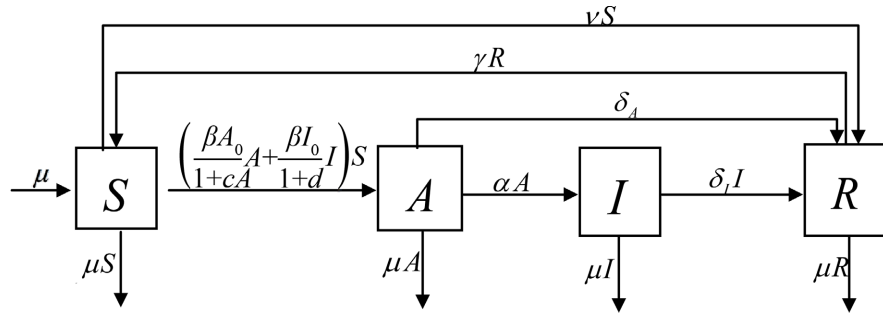
为了准确反应传染病传播过程中的影响, 我们采用饱和发生率函数  $\beta A_0/(1+cA)$  和  $\beta I_0/(1+cI)$ , 建立一如下 SAIRS 传染病模型:

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \mu - \left( \frac{\beta A_0}{1+cA} A(t) + \frac{\beta I_0}{1+cI} I(t) \right) S(t) - (\mu + \nu) S(t) + \gamma R(t) \\ \frac{dA(t)}{dt} &= \left( \frac{\beta A_0}{1+cA} A(t) + \frac{\beta I_0}{1+cI} I(t) \right) S(t) - (\alpha + \delta_A + \mu) A(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \alpha A(t) - (\delta_I + \mu) I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \delta_A A(t) + \delta_I I(t) + \nu S(t) - (\gamma + \mu) R(t) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, 将人群分为易感人群( $S$ )、无症状感染者( $A$ )、有症状感染者( $I$ )和康复人群( $R$ ), 将每一天的人数记为  $S(t)$ 、 $A(t)$ 、 $I(t)$ 、 $R(t)$ ,  $\mu$  表示出生率和死亡率, 从无症状区室, 个体可以以  $\alpha$  的速率发展为有症状感染  $I$  级, 也可以以  $\delta_A$  的速率在没有出现症状的情况下康复; 有症状的感染者可以以  $\delta_I$  的速度康复。 $\nu$  表示疫苗接种率,  $\gamma$  为恢复到易感的速率,  $c$  为正的调节系数。感染发生率为饱和发生率, 通过接触无症状感染者(比率为  $\beta A_0/(1+cA)$ )或有症状个体(比率为  $\beta I_0/(1+cI)$ )传播给易感人群[6]。该模型的初始条件为  $(S(0), A(0), I(0), R(0))$ , 并属于集合

$$D = \{(S, A, I, R) \in \mathbb{R}_+^4 \mid S(t) + A(t) + I(t) + R(t) = 1\},$$

即  $D$  为系统的有界正不变集, 系统的流程图如图 1 所示。



**Figure 1.** Flowchart of SAIRS infectious disease model  
**图 1.** SAIRS 传染病模型的流程图

由于模型中  $S(t)$ ,  $A(t)$ ,  $I(t)$  的微分方程中不包含  $R(t)$ , 因此可以只考虑以下模型:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu - \left( \frac{\beta A_0}{1+cA} A(t) + \frac{\beta I_0}{1+dI} I(t) \right) S(t) - (\mu + \nu + r) S(t) + \gamma(1 - A(t) - I(t)) \\ \frac{dA}{dt} &= \left( \frac{\beta A_0}{1+cA} A(t) + \frac{\beta I_0}{1+dI} I(t) \right) S(t) - (\alpha + \delta_A + \mu) A(t) \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha A(t) - (\delta_I + \mu) I(t) \end{aligned} \tag{2}$$

初始条件  $S(0)$ ,  $A(0)$ ,  $I(0)$  属于集合  $D = \{(S, A, I) \in \mathbb{R}_+^3 \mid S(t) + A(t) + I(t) \leq 1\}$ 。

模型(2)可由向量法[7]写为  $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$ , 其中  $x(t) = (S(t), A(t), I(t))$ ,

$$f(x(t)) = (f_1(x(t)), f_2(x(t)), f_3(x(t)))。$$

### 3. 模型的平衡点和基本再生数

考虑模型(2)的无病平衡点  $X_0 = (S_{00}, A_{00}, I_{00})$

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \mu - \left( \frac{\beta A_0}{1+cA} A(t) + \frac{\beta I_0}{1+dI} I(t) \right) S(t) - (\mu + \nu + \gamma) S(t) + \gamma(1 - A(t) - I(t)) \\ f_2(t) &= \left( \frac{\beta A_0}{1+cA} A(t) + \frac{\beta I_0}{1+dI} I(t) \right) S(t) - (\alpha + \delta_A + \mu) A(t) \\ f_3(t) &= \alpha A(t) - (\delta_I + \mu) I(t) \end{aligned} \tag{3}$$

将  $A_{00} = 0$ ,  $I_{00} = 0$  代入  $f_1(t) = 0$ , 可得

$$S_{00} = \frac{\mu + \gamma}{\mu + \nu + \gamma}$$

因此模型存在唯一无病平衡点

$$X_0 = \left( \frac{\mu + \gamma}{\mu + \nu + \gamma}, 0, 0 \right)。$$

**引理 1** 模型(2)的基本再生数  $R_0$  为

$$R_0 = \frac{((\delta_I + \mu) \beta A_0 + \alpha \beta I_0)(\mu + \gamma)}{(\delta_I + \mu)(\alpha + \delta_A + \mu)(\mu + \nu + \gamma)}。$$

**证明** 使用下一代矩阵方法求模型(2)的基本再生数, 模型(2)有两个受感染的隔间, 分别为  $A$  和  $I$ , 模型中对应的微分方程为

$$\begin{aligned}\frac{dA(t)}{dt} &= \left( \frac{\beta A_0}{1+cA} A(t) + \frac{\beta I_0}{1+cI} I(t) \right) S(t) - (\alpha + \delta_A + \mu) A(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \alpha A(t) - (\delta_I + \mu) I(t)\end{aligned}$$

将这两个微分方程改写为矩阵形式

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{F}(x) - \mathcal{V}(x).$$

则微分方程可写为以下形式:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \mathcal{F}_1(S(t), A(t), I(t)) - \mathcal{V}_1(S(t), A(t), I(t)) \\ \frac{dI}{dt} &= \mathcal{F}_2(S(t), A(t), I(t)) - \mathcal{V}_2(S(t), A(t), I(t))\end{aligned},$$

式中

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(S(t), A(t), I(t)) &= \left( \frac{\beta A_0}{1+cA} A(t) + \frac{\beta I_0}{1+cI} I(t) \right) S(t) \\ \mathcal{F}_2(S(t), A(t), I(t)) &= 0 \\ \mathcal{V}_1(S(t), A(t), I(t)) &= (\alpha + \delta_A + \mu) A(t) \\ \mathcal{V}_2(S(t), A(t), I(t)) &= -\alpha A(t) + (\delta_I + \mu) I(t)\end{aligned},$$

计算得矩阵  $\mathcal{F}(x)$  和  $\mathcal{V}(x)$  在无病平衡点  $X_0$  处的 Jacobian 矩阵分别为

$$\begin{aligned}F &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial A} & \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial I} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial A} & \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta A_0 S_{00}}{(1+cA)^2} & \frac{\beta I_0 S_{00}}{(1+cI)^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ V &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial A} & \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial I} \\ \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial A} & \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \delta_A + \mu & 0 \\ -\alpha & \delta_I + \mu \end{pmatrix},\end{aligned}$$

计算可得

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha + \delta_A + \mu} & 0 \\ \frac{\alpha}{(\alpha + \delta_A + \mu)(\delta_I + \mu)} & \frac{1}{\delta_I + \mu} \end{pmatrix},$$

利用下一代矩阵法[8]可得  $M = FV^{-1}$ , 则

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\beta A_0 S_{00}}{(1+cA)^2} & \frac{\beta I_0 S_{00}}{(1+cI)^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha + \delta_A + \mu} & 0 \\ \frac{\alpha}{(\alpha + \delta_A + \mu)(\delta_I + \mu)} & \frac{1}{\delta_I + \mu} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\beta A_0 S_{00}}{(1+cA)^2(\alpha+\delta_A+\mu)} + \frac{\alpha\beta I_0 S_{00}}{(1+cI)^2(\alpha+\delta_A+\mu)(\delta_I+\mu)} & \frac{\beta I_0 S_{00}}{(1+cI)^2(\delta_I+\mu)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

基本再生数  $R_0$  为  $M$  的谱半径, 即

$$R_0 = \frac{\beta A_0 S_{00}}{(1+cA)^2(\alpha+\delta_A+\mu)} + \frac{\alpha\beta I_0 S_{00}}{(1+cI)^2(\alpha+\delta_A+\mu)(\delta_I+\mu)},$$

式中

$$S_{00} = \frac{\mu+\gamma}{\mu+\nu+\gamma},$$

将  $S_{00}$  代入整理  $R_0$ , 得

$$R_0 = \frac{((\delta_I+\mu)\beta A_0 + \alpha\beta I_0)(\mu+\gamma)}{(\delta_I+\mu)(\alpha+\delta_A+\mu)(\mu+\nu+\gamma)}.$$

**引理 2** 当  $R_0 < 1$  时, 模型(2)只有一个无病平衡点为  $X_0$ ; 当  $R_0 > 1$  时, 除了无病平衡点  $X_0$ , 模型(2)还有一个地方病平衡点  $X^* = (S^*, A^*, I^*)$ 。

**证明** 令

$$\begin{aligned} \mu - \left( \frac{\beta A_0}{1+cA} A(t) + \frac{\beta I_0}{1+cI} I(t) \right) S(t) - (\mu+\nu+r)S(t) + \gamma(1-A(t)-I(t)) &= 0 \\ \left( \frac{\beta A_0}{1+cA} A(t) + \frac{\beta I_0}{1+cI} I(t) \right) S(t) - (\alpha+\delta_A+\mu)A(t) &= 0 \\ \alpha A(t) - (\delta_I+\mu)I(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

由方程组(4)的第三个方程, 可得

$$A^* = \frac{\delta_I+\mu}{\alpha} I^*,$$

将其替换到方程组(4)的第二个方程式, 得

$$\left( \frac{\beta A_0}{1+c\frac{\delta_I+\mu}{\alpha} I^*} \frac{\delta_I+\mu}{\alpha} I^* + \frac{\beta I_0}{1+cI^*} I^* \right) S^* - (\alpha+\delta_A+\mu) \frac{\delta_I+\mu}{\alpha} I^* = 0,$$

由于  $I^* \neq 0$ , 有

$$S^* = \frac{(\delta_I+\mu)(\alpha+\delta_A+\mu)}{\alpha \left( \frac{\beta I_0}{1+cI^*} + \frac{\beta A_0(\delta_I+\mu)}{\alpha \left( 1 + \frac{c(\delta_I+\mu)I^*}{\alpha} \right)} \right)} = \frac{(1+cI^*)(\alpha+c(\delta_I+\mu)I^*)(\alpha+\delta_A+\mu)(\delta_I+\mu)}{\alpha\beta A_0(\delta_I+\mu)(1+cI^*) + \alpha\beta I_0(\alpha+c(\delta_I+\mu)I^*)}$$

再将  $S^*, A^*$  代入方程组(3)的第一个方程, 得一元三次方程  $I^*$  的正解, 可由  $a_1 I^{*3} + a_2 I^{*2} + a_3 I^* + a_4 = 0$  表示, 其中  $a_1, a_2, a_3, a_4$  均由方程中参数表示, 由解得非负性可知, 在  $D$  中模型(2)有一个地方病平衡点  $X^* = (S^*, A^*, I^*)$ 。

## 4. 平衡点稳定性分析

下面根据解的有界性和构造合适的 Lyapunov 函数方法分析模型(2)在无病平衡点  $X_0$  和地方病平衡点  $X^*$ , 在  $R_0 > 1$  及  $R_0 < 1$  时的局部渐近稳定性和全局渐近稳定性。

### 4.1. 无病平衡点 $X_0$ 稳定性分析

**定理 1** (i) 若  $R_0 < 1$ , 则无病平衡点  $X_0$  是局部渐近稳定的;

(ii) 若  $R_0 > 1$ , 则无病平衡点  $X_0$  是不稳定的。

**引理 2** 矩阵  $(F-V)$  有实谱, 若  $\rho(FV^{-1}) < 1$ , 则  $(F-V)$  特征值为负。

**证明**

$$(F-V) = \begin{pmatrix} \frac{\beta A_0 S_{00} (\alpha + \delta_A + \mu)}{(1+cA)^2} & \frac{\beta I_0 S_{00}}{(1+cI)^2} \\ \alpha & -(\delta_I + \mu) \end{pmatrix} \quad (5)$$

由于  $(F-V)$  为  $2 \times 2$  矩阵, 其非对角线元素具有相同符号, 因此可以看出其特征值为实特征值。可设

$$N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$b, c$  同号,

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2},$$

可以看出根为两个非负值的和, 若  $\rho(FV^{-1}) = R_0 < 1$ , 则  $(F-V)$  的所有特征值是负的。由引理 1 和文献 2 中的定理可知, 模型(2)的无病平衡点  $X_0$  是局部渐近稳定的。

**定理 2** 若  $R_0 < 1$ , 则无病平衡点  $X_0$  是全局渐近稳定的。

**证明** 由于  $D$  是模型(2)的不变集, 并鉴于定理 1, 足以证明对于所有  $X(0) \in D$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S_{00},$$

$S_{00}$  如(3)中所示。根据模型(2)的第一个方程可得

$$\frac{dS(t)}{dt} \leq \mu + \gamma - (\mu + \nu + \gamma)S(t)$$

可以看出,  $S_{00}$  是比较方程的全局渐近稳定平衡点, 比较方程为

$$\frac{dy(t)}{dt} = \mu + \gamma - (\mu + \nu + \gamma)y(t)$$

由此可得, 对于  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \bar{t} > 0$ , 使得对于所有  $t \geq \bar{t}$ , 有  $S(t) \leq S_{00}(t) + \varepsilon$ 。

**证明如下**

$$S(t)' \leq \mu + \gamma - (\mu + \nu + \gamma)S(t)$$

$$S(t)' + (\mu + \nu + \gamma)S(t) \leq \mu + \gamma$$

$$(S(t)e^{(\mu+\nu+\gamma)t})' \leq (\mu + \gamma)e^{(\mu+\nu+\gamma)t}$$

$$S(t)e^{(\mu+\nu+\gamma)t} - S(0) \leq \frac{\mu+\gamma}{\mu+\nu+\gamma} (e^{(\mu+\nu+\gamma)t} - 1)$$

$$S(t) \leq S(0)e^{-(\mu+\nu+\gamma)t} + \frac{\mu+\gamma}{\mu+\nu+\gamma} (1 - e^{-(\mu+\nu+\gamma)t})$$

可得  $S(t) \leq S_{00}(t) + \varepsilon$ , 证毕。

因此

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} S(t) \leq S_{00} \tag{6}$$

由(6)和模型(2)可得  $t \geq \bar{t}$  时, 有

$$\frac{dA(t)}{dt} \leq \left( \frac{\beta A_0}{1+cA} A(t) + \frac{\beta I_0}{1+cI} I(t) \right) (S_{00} + \varepsilon) - (\alpha + \delta_A + \mu) A(t)$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha A(t) - (\delta_I + \mu) I(t)$$

考虑比较系统

$$\frac{dw_1(t)}{dt} = \left( \frac{\beta A_0}{1+cw_1} w_1(t) + \frac{\beta I_0}{1+cw_2} w_2(t) \right) (S_{00} + \varepsilon) - (\alpha + \delta_A + \mu) w_1(t)$$

$$\frac{dw_2(t)}{dt} = \alpha w_1(t) - (\delta_I + \mu) w_2(t)$$

$$w_1(\bar{t}) = A(\bar{t}), \quad w_2(\bar{t}) = I(\bar{t})$$

则可将比较系统重写为以下形式

$$\frac{dw(t)}{dt} = (F_\varepsilon - V_\varepsilon)w(t)$$

其中  $w(t) = (w_1(t), w_2(t))^T$ ,  $(F_\varepsilon - V_\varepsilon)$  是矩阵(8)中的矩阵, 将  $X_0(\varepsilon) = (S_{00} + \varepsilon, 0, 0)$  带入计算。我们可以看出若  $R_0 = \rho(FV^{-1}) < 1$ , 我们可以选择一个足够小的  $\varepsilon > 0$ , 使得  $\rho(F_\varepsilon - V_\varepsilon) < 1$ 。然后, 将引理 1 应用于  $(F_\varepsilon - V_\varepsilon)$ , 能够的到  $(F_\varepsilon - V_\varepsilon)$  有一个实谱, 并且它的所有特征值为负的。无论初始值为何值均遵循  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$ , 从中有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$$

对于  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists t_1$ , 使得对于  $\forall t \geq \bar{t}_1$ , 有  $A(t) < \varepsilon$ ,  $I(t) < \varepsilon$ , 因此对  $t \geq \bar{t}_1$  有

$$\frac{dS(t)}{dt} \geq \mu - \varepsilon \left( \frac{\beta A_0}{1+c\varepsilon} + \frac{\beta I_0}{1+c\varepsilon} \right) S(t) - (\mu + \nu + \gamma) S(t) + \gamma(1 - 2\varepsilon)$$

可以看出  $\frac{\mu + \gamma(1 - 2\varepsilon)}{\frac{\varepsilon}{1+c\varepsilon}(\beta A_0 + \beta I_0) + (\mu + \nu + \gamma)}$  是比较方程的全局渐近稳定平衡点, 比较方程为

$$\frac{dy(t)}{dt} = \mu - \frac{\varepsilon}{1+c\varepsilon}(\beta A_0 + \beta I_0) S(t) - (\mu + \nu + \gamma) S(t) + \gamma(1 - 2\varepsilon)$$

由此可得对于  $\forall \xi > 0$ ,  $\exists \bar{t}_2 > 0$ , 使得对于所有  $t \geq \bar{t}_2$  有

$$S(t) \geq \frac{\mu + \gamma(1 - 2\varepsilon)}{\frac{\varepsilon}{1+c\varepsilon}(\beta A_0 + \beta I_0) + (\mu + \nu + \gamma)} - \xi$$

证明如下

$$\begin{aligned}
 S(t)' &\geq \mu - \varepsilon \left( \frac{\beta A_0}{1+c\varepsilon} + \frac{\beta I_0}{1+c\varepsilon} \right) S(t) - (\mu + \nu + \gamma) S(t) + \gamma(1-2\varepsilon) \\
 S(t)' + \left( \frac{\varepsilon}{1+c\varepsilon} (\beta A_0 + \beta I_0) + (\mu + \nu + \gamma) \right) S(t) &\geq \mu + \gamma(1-2\varepsilon) \\
 \left( S(t) e^{\left( \frac{\varepsilon}{1+c\varepsilon} (\beta A_0 + \beta I_0) + (\mu + \nu + \gamma) \right) t} \right)' &\geq \mu + \gamma(1-2\varepsilon) e^{\left( \frac{\varepsilon}{1+c\varepsilon} (\beta A_0 + \beta I_0) + (\mu + \nu + \gamma) \right) t} \\
 S(t) e^{\left( \frac{\varepsilon}{1+c\varepsilon} (\beta A_0 + \beta I_0) + (\mu + \nu + \gamma) \right) t} - S(0) &\geq \frac{\mu + \gamma(1-2\varepsilon)}{\frac{\varepsilon}{1+c\varepsilon} (\beta A_0 + \beta I_0) + (\mu + \nu + \gamma)} \left( e^{\left( \frac{\varepsilon}{1+c\varepsilon} (\beta A_0 + \beta I_0) + (\mu + \nu + \gamma) \right) t} - 1 \right) \\
 S(t) &\geq S(0) e^{-\left( \frac{\varepsilon}{1+c\varepsilon} (\beta A_0 + \beta I_0) + (\mu + \nu + \gamma) \right) t} + \frac{\mu + \gamma(1-2\varepsilon)}{\frac{\varepsilon}{1+c\varepsilon} (\beta A_0 + \beta I_0) + (\mu + \nu + \gamma)} \left( 1 - e^{-\left( \frac{\varepsilon}{1+c\varepsilon} (\beta A_0 + \beta I_0) + (\mu + \nu + \gamma) \right) t} \right)
 \end{aligned}$$

由此可得

$$S(t) \geq \frac{\mu + \gamma(1-2\varepsilon)}{\frac{\varepsilon}{1+c\varepsilon} (\beta A_0 + \beta I_0) + (\mu + \nu + \gamma)} - \xi,$$

对  $\forall \varepsilon > 0$ , 有  $\liminf_{t \rightarrow \infty} S(t) \geq \frac{\mu + \gamma(1-2\varepsilon)}{\frac{\varepsilon}{1+c\varepsilon} (\beta A_0 + \beta I_0) + (\mu + \nu + \gamma)}$ , 使  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 则有  $\liminf_{t \rightarrow \infty} S(t) \geq S_{00}$ , 结合

(6)我们可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S_{00}$$

因此, 当  $R_0 < 1$ , 模型(2)的无病平衡点  $X_0$  是全局渐近稳定的。

## 4.2. 地方病平衡点 $X^*$ 稳定性分析

在本节中分析 SAIR 模型的地方病的全局渐近稳定性, 为了简化分析, 这里我们引入了一种具有永久免疫的传染病模型, 即  $\gamma = 0$  的模型(2)的全局渐近稳定性, 这类 SAIR 模型的动力学为以下方程组:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \mu - \left( \frac{\beta A_0}{1+cA} A(t) + \frac{\beta I_0}{1+cI} I(t) \right) S(t) - (\mu + \nu) S(t) \\
 \frac{dA}{dt} &= \left( \frac{\beta A_0}{1+cA} A(t) + \frac{\beta I_0}{1+cI} I(t) \right) S(t) - (\alpha + \delta_A + \mu) A(t) \\
 \frac{dI}{dt} &= \alpha A(t) - (\delta_I + \mu) I(t)
 \end{aligned} \tag{7}$$

基本再生数

$$R_0 = \frac{\beta A_0 (\delta_I + \mu) + \alpha \beta I_0}{(\delta_I + \mu) (\alpha + \delta_A + \mu)}.$$

**定理 3** 当  $R_0 > 1$  时, 模型(3)的地方病平衡点  $X^*$  是全局渐近稳定的。

**证明** 地方病平衡点  $X^* = (S^*, A^*, I^*)$  满足方程



$$\begin{aligned} \mu &= \left( \frac{\beta A_0}{1+cA^*} A^*(t) + \frac{\beta I_0}{1+cI^*} I^*(t) \right) S^*(t) + (\mu + \nu) S^*(t) \\ (\alpha + \delta_A + \mu) A^*(t) &= \left( \frac{\beta A_0}{1+cA^*} A^*(t) + \frac{\beta I_0}{1+cI^*} I^*(t) \right) S^*(t) \\ \alpha A^*(t) &= (\delta_I + \mu) I^*(t) \end{aligned}$$

为了方便记法, 可省略对  $t$  的依赖, 考虑和函数  $V = c_1 V_1 + c_2 V_2 + V_3$ , 其中  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$ ,

$$V_1 = S^* g\left(\frac{S}{S^*}\right), \quad V_2 = A^* g\left(\frac{A}{A^*}\right), \quad V_3 = I^* g\left(\frac{I}{I^*}\right),$$

设  $g(x) = x - 1 - \ln x (x > 0)$ , 则  $g(x) = x - 1 - \ln x \geq g(1) = 0$ 。对  $\forall x > 0$ , 有

$$u = \frac{S}{S^*}, \quad y = \frac{A}{A^*}, \quad z = \frac{I}{I^*} \tag{8}$$

由方程组(7)中的第一个方程, 可得

$$c_1 \frac{dV_1}{dt} = c_1 \left( 1 - \frac{S^*}{S} \right) \left( \mu - \left( \frac{\beta A_0}{1+cA} A + \frac{\beta I_0}{1+cI} I \right) S - (\mu + \nu) S \right),$$

将  $\mu = \left( \frac{\beta A_0}{1+cA^*} A^*(t) + \frac{\beta I_0}{1+cI^*} I^*(t) \right) S^*(t) + (\mu + \nu) S^*(t)$  带入, 得

$$c_1 \frac{dV_1}{dt} = c_1 \left( 1 - \frac{S^*}{S} \right) \left( (\mu + \nu) (S^* - S) + \frac{\beta A_0}{1+cA^*} A^* S^* - \frac{\beta A_0}{1+cA} AS + \frac{\beta I_0}{1+cI^*} I^* S^* - \frac{\beta I_0}{1+cI} IS \right)$$

将(8)代入化简该方程, 得

$$c_1 \frac{dV_1}{dt} = c_1 \left( 1 - \frac{1}{u} \right) \left( (\mu + \nu) S^* (1 - u) + \frac{\beta A_0}{1+cA^*} A^* S^* - \frac{\beta A_0}{1+cyA^*} u y A^* S^* + \frac{\beta I_0}{1+cI^*} I^* S^* - \frac{\beta I_0}{1+czI^*} u z I^* S^* \right)$$

由方程组(7)中的第二个方程, 可得

$$c_2 \frac{dV_2}{dt} = c_2 \left( 1 - \frac{A^*}{A} \right) \left( \left( \frac{\beta A_0}{1+cA} A + \frac{\beta I_0}{1+cI} I \right) S - (\alpha + \delta_A + \mu) A \right)$$

将(8)代入化简该方程, 得

$$c_2 \frac{dV_2}{dt} = c_2 \left( 1 - \frac{1}{y} \right) \left( \frac{\beta A_0}{1+cyA^*} u y A^* S^* - \frac{\beta A_0}{1+cA^*} y A^* S^* + \frac{\beta I_0}{1+czI^*} u z I^* S^* - \frac{\beta I_0}{1+cI^*} y I^* S^* \right)$$

由方程组(7)中的第三个方程, 可得

$$\frac{dV_3}{dt} = \left( 1 - \frac{I^*}{I} \right) (\alpha A - (\delta_I + \mu) I)$$

$$\frac{dV_3}{dt} = \left( 1 - \frac{I^*}{I} \right) \left( \alpha A - \frac{\alpha I A^*}{I^*} \right)$$

$$\frac{dV_3}{dt} = \alpha A^* \left( 1 + \frac{A}{A^*} - \frac{I}{I^*} - \frac{AI^*}{A^* I} \right) \leq \alpha A^* (-\ln y + y - z + \ln z) = \alpha A^* (g(y) - g(z)).$$

则由上述三个方程相加得  $\frac{dV}{dt}$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= c_1 \left(1 - \frac{1}{u}\right) \left( (\mu + \nu) S^* (1-u) + \frac{\beta A_0}{1+cA^*} A^* S^* - \frac{\beta A_0}{1+cyA^*} uyA^* S^* + \frac{\beta I_0}{1+cI^*} I^* S^* - \frac{\beta I_0}{1+czI^*} uzI^* S^* \right) \\ &\quad + c_2 \left(1 - \frac{1}{y}\right) \left( \frac{\beta A_0}{1+cyA^*} uyA^* S^* - \frac{\beta A_0}{1+cA^*} yA^* S^* + \frac{\beta I_0}{1+czI^*} uzI^* S^* - \frac{\beta I_0}{1+cI^*} yI^* S^* \right) + \alpha A^* (g(y) - g(z)) \\ \frac{dV}{dt} &= c_1 \left(1 - \frac{1}{u}\right) (\mu + \nu) S^* (1-u) + c_1 \left(1 - \frac{1}{u}\right) \frac{\beta A_0}{1+cA^*} A^* S^* - c_1 \left(1 - \frac{1}{u}\right) \frac{\beta A_0}{1+cyA^*} uyA^* S^* + c_1 \left(1 - \frac{1}{u}\right) \frac{\beta I_0}{1+cI^*} I^* S^* \\ &\quad - c_1 \left(1 - \frac{1}{u}\right) \frac{\beta I_0}{1+czI^*} uzI^* S^* + c_2 \left(1 - \frac{1}{y}\right) \frac{\beta A_0}{1+cyA^*} uyA^* S^* - c_2 \left(1 - \frac{1}{y}\right) \frac{\beta A_0}{1+cA^*} yA^* S^* \\ &\quad + c_2 \left(1 - \frac{1}{y}\right) \frac{\beta I_0}{1+czI^*} uzI^* S^* - c_2 \left(1 - \frac{1}{y}\right) \frac{\beta I_0}{1+cI^*} yI^* S^* + \alpha A^* (g(y) - g(z)) \\ \frac{dV}{dt} &= -c_1 \left(1 - \frac{1}{u}\right) (\mu + \nu) S^* (u-1) - c_1 \left( \left(1 - \frac{1}{u}\right) uy - \frac{c_2}{c_1} \left(1 - \frac{1}{y}\right) uy \right) \frac{\beta A_0}{1+cyA^*} A^* S^* \\ &\quad + c_1 \left( \left(1 - \frac{1}{u}\right) - \frac{c_2}{c_1} \left(1 - \frac{1}{y}\right) y \right) \frac{\beta A_0}{1+cA^*} A^* S^* - c_1 \left( \left(1 - \frac{1}{u}\right) uz - \frac{c_2}{c_1} \left(1 - \frac{1}{y}\right) uz \right) \frac{\beta I_0}{1+czI^*} I^* S^* \\ &\quad + c_1 \left( \left(1 - \frac{1}{u}\right) - \frac{c_2}{c_1} \left(1 - \frac{1}{y}\right) y \right) \frac{\beta I_0}{1+cI^*} I^* S^* + \alpha A^* (g(y) - g(z)) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{1}{u}\right) uy - \frac{c_2}{c_1} \left(1 - \frac{1}{y}\right) uy = uy - y - \frac{c_2}{c_1} uy + \frac{c_2}{c_1} u \\ &= \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) uy - y + \frac{c_2}{c_1} u = \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) g(uy) - g(y) + \frac{c_2}{c_1} g(u) \\ &\left(1 - \frac{1}{u}\right) - \frac{c_2}{c_1} \left(1 - \frac{1}{y}\right) y = 1 - \frac{1}{u} - \frac{c_2}{c_1} y + \frac{c_2}{c_1} \\ &= \left(1 + \frac{c_2}{c_1}\right) - \frac{1}{u} - \frac{c_2}{c_1} y = -g\left(\frac{1}{u}\right) - \frac{c_2}{c_1} g(y) \\ &\left(1 - \frac{1}{u}\right) uz - \frac{c_2}{c_1} \left(1 - \frac{1}{y}\right) uz = uz - z - \frac{c_2}{c_1} uz + \frac{c_2}{c_1} \frac{uz}{y} \\ &= \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) uz - z + \frac{c_2}{c_1} \frac{uz}{y} = \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) g(uz) - g(z) + \frac{c_2}{c_1} g\left(\frac{uz}{y}\right) \\ &\left(1 - \frac{1}{u}\right) - \frac{c_2}{c_1} \left(1 - \frac{1}{y}\right) y = 1 - \frac{1}{u} - \frac{c_2}{c_1} y - \frac{c_2}{c_1} \\ &= \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) - \frac{1}{u} - \frac{c_2}{c_1} y = -g\left(\frac{1}{u}\right) - \frac{c_2}{c_1} g(y) \end{aligned}$$

整理代入  $\frac{dV}{dt}$ , 得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & -c_1 \left(1 - \frac{1}{u}\right) (\mu + \nu) S^* (u-1) - c_1 \left( \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) g(uy) - g(y) + \frac{c_2}{c_1} g(u) \right) \frac{\beta A_0}{1 + cyA^*} A^* S^* \\ & - c_1 \left( g\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{c_2}{c_1} g(y) \right) \frac{\beta A_0}{1 + cA^*} A^* S^* - c_1 \left( \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) g(uz) - g(z) + \frac{c_2}{c_1} g\left(\frac{uz}{y}\right) \right) \frac{\beta I_0}{1 + czI^*} I^* S^* \\ & - c_1 \left( g\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{c_2}{c_1} g(y) \right) \frac{\beta I_0}{1 + cI^*} I^* S^* + \alpha A^* (g(y) - g(z)) \end{aligned}$$

对方程进行放缩

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \leq & -c_1 \left(1 - \frac{1}{u}\right) (\mu + \nu) S^* (u-1) - c_1 \left( \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) g(uy) - g(y) + \frac{c_2}{c_1} g(u) \right) \frac{\beta A_0}{1 + cg(y)A^*} A^* S^* \\ & - c_1 \left( g\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{c_2}{c_1} g(y) \right) \frac{\beta A_0}{1 + cg(y)A^*} A^* S^* - c_1 \left( \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) g(uz) - g(z) + \frac{c_2}{c_1} g\left(\frac{uz}{y}\right) \right) \frac{\beta I_0}{1 + cg(z)I^*} I^* S^* \\ & - c_1 \left( g\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{c_2}{c_1} g(y) \right) \frac{\beta I_0}{1 + cg(z)I^*} I^* S^* + \alpha A^* (g(y) - g(z)) \end{aligned}$$

整理右式, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \leq & -c_1 \left(1 - \frac{1}{u}\right) (\mu + \nu) S^* (u-1) - c_1 \left( \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) g(uy) - g(y) + \frac{c_2}{c_1} g(u) + g\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{c_2}{c_1} g(y) \right) \frac{\beta A_0}{1 + cg(y)A^*} A^* S^* \\ & - c_1 \left( \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) g(uz) - g(z) + \frac{c_2}{c_1} g\left(\frac{uz}{y}\right) + g\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{c_2}{c_1} g(y) \right) \frac{\beta I_0}{1 + cg(z)I^*} I^* S^* + \alpha A^* (g(y) - g(z)) \end{aligned}$$

令

$$c_1 = c_2 = \frac{\alpha A^* (1 + cg(z)I^*)}{I^* S^* \beta I_0},$$

则

$$\frac{dV}{dt} \leq -c_1 \frac{(u-1)^2 (\mu + \nu) S^*}{u} - c_1 \left( g(u) + g\left(\frac{1}{u}\right) \right) \frac{\beta A_0}{1 + cg(y)A^*} A^* S^* - c_1 \left( g\left(\frac{uz}{y}\right) + g\left(\frac{1}{u}\right) \right) \frac{\beta I_0}{1 + cg(z)I^*} I^* S^*$$

因此, 当  $R_0 > 1$  时, 有

$$\frac{dV}{dt} \leq 0.$$

且考虑

$$\frac{dV}{dt} \leq 0$$

当且仅当

$$H = \left\{ (S, A, I) \mid S = S^*, I = \frac{AI^*}{A^*} \right\},$$

故

$$\left\{ (S, A, I) \mid \frac{dV}{dt} = 0 \right\}$$

的最大不变集为单点集  $\{X^*\}$ 。由 Lasalle 不变集原理, 以及  $X^*$  的局部渐近稳定性可知, 当  $R_0 > 1$  时, 模型 (8) 的地方病平衡点  $X^*$  是全局渐近稳定的。

## 5. 结语

本文基于具有无病感染者的 SAIRS 传染病模型, 考虑了带有饱和发生率的情形, 探究了饱和效应对疾病传播动态的影响, 首先通过下一代矩阵法计算了模型的基本再生数  $R_0$ , 并求得了模型的无病平衡点  $X_0$  和地方病平衡点  $X^*$ 。接着, 运用解得有界性以及构造适当的 Lyapunov 函数对 SAIRS 传染病模型的无病平衡点  $X_0$  和地方病平衡点  $X^*$  的稳定性进行了分析, 证明了当基本再生数  $R_0 < 1$  时, 传染病模型的无病平衡点  $X_0$  是局部渐近稳定, 并且全局渐近稳定; 而当基本再生数  $R_0 > 1$  时, 对于简化的传染病模型的地方病平衡点  $X^*$  是全局渐近稳定的, 通过对具有饱和发生率的 SAIRS 传染病模型稳定性的深入分析, 有助于为未来对具有饱和发生率模型的分支问题提供有益的理论支持。

## 参考文献

- [1] Mizumoto, K., Kagaya, K., Zarebski, A. and Chowell, G. (2020) Estimating the Asymptomatic Proportion of Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) Cases on Board the Diamond Princess Cruise Ship, Yokohama, Japan, 2020. *Euro-surveillance*, **25**, 2000180. <https://doi.org/10.2807/1560-7917.ES.2020.25.10.2000180>
- [2] Oran, D.P. and Topol, E.J. (2020) Prevalence of Asymptomatic SARS-CoV-2 Infection: A Narrative Review. *Annals of Internal Medicine*, **173**, 362-367. <https://doi.org/10.7326/M20-3012>
- [3] Robinson, M. and Stilianakis, N.I. (2013) A Model for the Emergence of Drug Resistance in the Presence of Asymptomatic Infections. *Mathematical Biosciences*, **243**, 163-177. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2013.03.003>
- [4] Day, M. (2020) Covid-19: Identifying and Isolating Asymptomatic People Helped Eliminate Virus in Italian Village. *BMJ*, **368**, m1165. <https://doi.org/10.1136/bmj.m1165>
- [5] 曹虹. 随机传染病模型的动力学行为[D]: [硕士学位论文]. 乌鲁木齐: 新疆大学, 2014.
- [6] 张馨予. 几类具有饱和发生率的 HIV 模型的动力学分析[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 兰州交通大学, 2023. <https://doi.org/10.27205/d.cnki.gltcc.2023.000164>
- [7] Stefania, O., Mattia, S. and Sara, S. (2022) Global Stability of SAIRS Epidemic Models. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **65**, 103501. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2021.103501>
- [8] 侯琪. 几类种群模型的基本再生数的研究[D]: [硕士学位论文]. 烟台: 鲁东大学, 2020. <https://doi.org/10.27216/d.cnki.gysfc.2020.000368>