Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 200-205
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145177

Hans汉斯

稀疏过程在常利率环境下的广义Poisson风险模型中的应用

马丽娟

昆明冶金高等专科学校通识与素质教育学院数学教研室，云南 昆明

收稿日期：2024年3月1日；录用日期：2024年4月16日；发布日期：2024年5月28日

摘 要

风险理论是连接数学与金融问题的一座桥梁，它是保险精算学(即实际寿险精算)的重要组成部分，是保险精算人员对保险业务进行风险管理的重要理论工具，同时也是保险公司发展业务进行有效营运的理论保证。破产概率是风险理论研究的核心问题，而利息是影响破产概率的重要因素。本文讨论了常利率环境下离散时间风险模型的破产概率，给出了模型的破产概率的上界。首先构造了风险模型，通过鞅方法得到模型的破产概率满足的Lundberg不等式和相关公式；然后给出了离散时间情形下的双险种风险模型，得到了与破产相关的一些变量的表达式和性质。

关键词

利率，Poisson风险模型，破产概率，调节系数

Application of Sparse Process in Generalized Poisson Risk Model under Constant Interest Rate Environment

Lijuan Ma

Department of Mathematics, School of General and Quality-Oriented Education, Kunming Metallurgy College, Kunming Yunnan

Received: Mar. 1st, 2024; accepted: Apr. 16th, 2024; published: May 28th, 2024

Abstract

Risk theory is a bridge connecting mathematics and financial problems, it is an important compo-

文章引用: 马丽娟. 稀疏过程在常利率环境下的广义 Poisson 风险模型中的应用[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 200-205.
DOI: 10.12677/pm.2024.145177

nent of insurance actuarial science, it is an important theoretical tool for insurance actuaries to manage risks in insurance business, and also a theoretical guarantee for insurance companies to develop and operate effectively .Bankruptcy probability is a core issue in risk theory research, and interest is an important factor affecting bankruptcy probability. In this paper, the ruin probability of discrete time risk model under constant interest rate is discussed, and the upper bound of bankruptcy probability is given. Firstly, the risk model is established, and the Lundberg inequality and general formula of ruin probability are given by using martingale method. Secondly, the risk model of double insurance in the situation of discrete time is established, and the distribution of surplus before bankruptcy and the recursion formula of the distribution of bankruptcy duration are obtained.

Keywords

Interest, Poisson Risk Model, Ruin Probability, Adjustment Coefficient

1. 引言

本文讨论的是稀疏过程在常利率环境下的广义 Poisson 风险模型中的应用问题。经典风险模型为我们提供了深入理解风险管理的数学框架，通过对现金流入和流出的概率建模和计算，我们可以得到关于破产风险的定量信息，为保险公司提供风险管理的依据。同时，经典风险模型的研究还具有重要的实践价值，为风险管理领域的实际应用提供了理论支持和实践指导。但是经典风险模型存在一定的局限性，不能全面反映保险公司经营的实际情况。首先破产风险受到多种因素的影响，包括市场环境、政策变化、企业运营策略等；其次客户投保后，由于某种不确定的原因，可能会退保。因此，在应用经典风险模型的研究成果时，我们需要综合考虑各种因素，制定更加全面和有效的风险管理策略。所以，在本文中我们把模型推广到双险种的情形，同时，把影响破产概率的利息因素考虑进去，建立了常利率环境下离散时间风险模型，给出了模型的破产概率的上界。

2. 模型的建立

定义 1：齐次泊松过程 $\{M(t), t \ge 0\}$ 成为广义齐次泊松过程，若它的概率母函数

$$G_{M(t)}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p(M(t)=k)s^k = e^{\lambda t(G(s)-1)}$$

其中 $\lambda \ge 0$ 是一常数，$G(s)$ 是某一正整数值随机变量的概率母函数，即

$$G(s) = \sum_{k=1}^{n} p_k s^k \quad \left(p_k \ge 0 \text{且} \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1\right)$$

因为上面的 $G_{M(t)}(s)$ 可由在齐次泊松过程的概率母函数 $e^{\lambda t(G(s)-1)}$ 中用 $G(s)$ 替换 s 而得，故可以设想广义齐次泊松过程经由以下两步产生：首先，以给定的 λ 作强度确定一齐次泊松过程 $\{M(t), t \ge 0\}$；然后由这一过程确定广义泊松过程 $\{M(t), t \ge 0\}$ 的点(亦即跳跃)发生时刻，在每一个这样的时刻有 k 个点(即跃度为 k 的跳跃)的概率是 $p_k\ (k=1,2,3\cdots)$ 而且各个时刻发生的点数是相互独立的。广义 Poisson 过程有如下的分解表示：

$$M(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k\mu^{k}(t)\ (t\ge 0)$$

其中$\{\mu^{k}(t),t\ge 0\}(k=1,2,3\cdots)$是强度为$\lambda p_k$的相互独立的齐次泊松过程。

引理 1：对于给定的λ和p_k，广义齐次泊松过程$\{M(t),t\ge 0\}$为一复合 Poisson 过程，且

$$M(t)=\sum_{j=1}^{m(t)}X_j$$

其中：1) X_j为M上的离散随机变量，且$P(X_j=k)=p_k$，

2) $m(t)$是强度为λ的齐次 Poisson 过程。

令$E[X_j]=\alpha$，则有：

引理 2：$E[M(t)]=\alpha\lambda t$

证明：$E[M(t)]=G_t'(s)\big|_{s=1}=\lambda t e^{\lambda t(G(s)-1)}G(s)\big|_{s=1}=\lambda tE[X_j]=\alpha\lambda t$

定义 2：设$u>0,i>o,c>0,c_0>0$，给定概率空间$(\Omega,F,P),t\ge 0$，令

$$U(t)=(1+i)(u+cM(t))-c_0R(t)-\sum_{j=1}^{N(t)}Z_j \tag{1}$$

$$S(t)=(1+i)cM(t)-c_0R(t)-\sum_{j=1}^{N(t)}Z_j \tag{2}$$

其中：1) u表示保险公司的初始资本；i为市场利率；c表示每张保单的平均保费；c_0为每张保单退保时的平均给付额，且有$c_0<c$；

2) $M(t)$表示$(0,t)$内收到的保单数，服从参数为$\alpha\lambda$的广义齐次 Poisson 分布(且$M(t)=0$)；

3) $R(t)$表示$(0,t)$内发生退保的次数，$R(t)$是过程$M(t)$的p-稀疏过程，即$R(t)$是参数为$p\alpha\lambda$的 Poisson 过程，且$0<p<1$；

4) $N(t)$表示$(0,t)$内索赔发生的次数，$N(t)$是过程$M(t)$的q-稀疏过程，

即$N(t)$是参数为$q\alpha\lambda$的 Poisson 过程，且$0<q<1$；

5) Z_j表示每张保单的理赔额，且$E[Z_j]=\mu$；

6) 假定$p+q<1$。

过程(1)称为常利率环境下的广义齐次 Poisson 风险模型[1]。

记$T_u=\inf\{t;t>0且U(t)<0\}$，表示$(0,t)$内保险公司破产发生的时刻(对$T=\infty$，可认为对任意$t\ge 0$均有$U(t)\ge 0$，即破产不会发生)，则在初始资本为u的条件下，定义保险公司的最终破产概率为$\psi(u)=P\{T_u<\infty|U(0)=u\}$。

令$\theta=\dfrac{c(1+r)}{pc_0+q\mu}-1$，称$\theta$为安全负荷。显然当时，$\psi(u)=1$，破产必然发生。以下我们假定$\theta>0$。

p 的实际意义如下：每张保单的持有者可能退保，也可能不退保。假设每份保单的持有者是否退保与其他保单的持有者是否退保无关，且每份保单发生退保的可能性大小近似看作相同，即在“退保流”中每份保单被随机选取的概率为p，于是在$(0,t)$内保单到达数$M(t)$是参数为$\alpha\lambda$的广义齐次 Poisson 过程，那么在$(0,t)$内退保发生的次数即为$M(t)$的p-稀疏过程。对于q也可以做类似的解释。$R(t)$与$M(t)$的关系如图 1 所示。

在t轴上，记录了每张保单到达的时刻，分别为$T_1,T_2,T_3,T_4,T_5,T_6\cdots$ 在t^*上保留了退保发生的点。比如第一张保单不会发生退保，则剔除该点；第二张保单发生退保，保留该点，并记为T_1^*，以此类推。这也可从点过程理论知识得知[1]。由此亦可知$R(t)$完全由$M(t)$和p来确定。

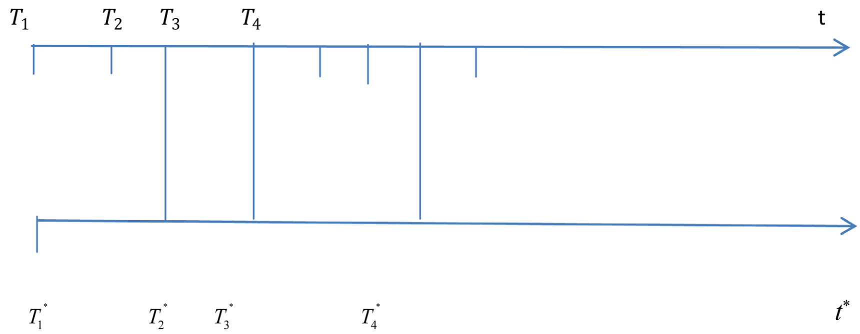

Figure 1. The relationship between $R(t)$ and $M(t)$

图 1. 过程 $R(t)$ 与 $M(t)$ 的关系图

在(2)中，$M(t)$ 与 $R(t)$ 一般不独立，$M(t)$ 与 $N(t)$ 一般也不独立，但是 $\{Z_j\}$ 与 $\{M(t)\}$ 独立，由点过程理论知 $R(t)$ 与 $N(t)$ 是相互独立的[2]。

3. 破产概率的 Gramer-Lundberg 近似及其上界

定理 1： 盈利过程 $\{S(t), t \ge 0\}$ 是一个右连续随机过程，且具备下列性质：

(1) $E[S(t)] = [c(1+i)\alpha\lambda - p\alpha\lambda c_0 - q\alpha\lambda E[Z_j]]t$；

(2) 具有平稳独立增量；

(3) 存在正数 r，使得 $E[e^{-rS(t)}] < \infty$。

引理 3： 对于盈利过程 $\{S(t), t \ge 0\}$，存在函数 $g(r)$，使得 $E[e^{-rS(t)}] = e^{tg(r)}$。

证明：

$$E[e^{-rS(t)}] = E\left[\exp\{-r(1+i)\}cM(t) + rc_0R(t) + r\sum_{j=1}^{N(t)} Z_j\right]$$

$$= E[\exp\{-r(1+i)\}cM(t)]E[\exp(rc_0R(t))]E\left[\exp\left(r\sum_{j=1}^{N(t)} Z_j\right)\right]$$

$$= \exp\left\{\alpha\lambda\left[e^{-cr(1+i)} + qh(r) + pe^{rc_0} - p - 1\right]t\right\} = \exp[tg(r)],$$

引理 4： 方程 $g(r) = 0$ 存在唯一的正解 R，称之为调节系数。

证明：$g(0) = 0$，

$$\frac{dg(r)}{dr} = \alpha\lambda\left[-c(1+i)e^{-rc(1+i)} + q\int_0^\infty ze^{rz}dF(z) + c_0pe^{rc_0}\right],$$

$$\left.\frac{dg(r)}{dr}\right|_{r=0} = \alpha\lambda[-c(1+i) + q\mu + c_0p] < 0,$$

$$\frac{d^2g(r)}{dr^2} = \alpha\lambda\left[c^2(1+i)^2e^{-rc(1+i)} + q\int_0^\infty z^2e^{rz}dF(z) + c_0^2pe^{rc_0}\right] > 0,$$

$$\lim_{r\to\infty} g(r) = \infty$$

所以 $g(r)$ 在 $(0,\infty)$ 上凹，故存在 $R \in (0,\infty)$，使得 $g(R) = 0$，即方程 $g(r) = 0$ 存在唯一的正根。

定理 2： $\{M_u(t) | F_t^s, t \ge 0\}$ 是鞅，$M_u(t) = \dfrac{\exp[-rU(t)]}{\exp[tg(r)]}$。

证明：对于 $v \le t$，运用引理 4 得：

$$E\left[M_u(t)\backslash F_v^s\right] = E\left[\frac{\exp\left\{-r\left[u(1+i)+s(t)\right]\right\}}{\exp\left[tg(r)\right]}\backslash F_v^s\right]$$

$$= E\left[\frac{\exp\left\{-r\left[u(1+i)+s(v)\right]\right\}}{\exp\left[vg(r)\right]}\cdot\frac{\exp\left[-r\left(s(t)-s(v)\right)\right]}{\exp\left[(t-v)g(r)\right]}\backslash F_v^s\right]$$

$$= M_u(v)$$

定理 3： 常利率下单险种的广义齐次 Poisson 风险模型 $\{U(t);t\ge 0\}$ 的最终破产概率为

$$\psi(u) = \frac{\mathrm{e}^{-R(1+i)u}}{E\left[\mathrm{e}^{-RU(T_u)}\backslash T_u<\infty\right]},$$

其中 R 为调节系数。

证明：因为 T_u 是 F^s 停时，选取 $t_0<\infty$，易知 $T_u \wedge t_0$ 是停时，根据定理 2 及可选停时定理有

$$\mathrm{e}^{-R(1+i)u} = M_u(0) = E\left[M_u(T_u\wedge t_0)\right]$$

$$= E\left[M_u(T_u\wedge t_0\backslash T_u\le t_0)\right]P\{T_u\le t_0\} + E\left[M_u(T_u\wedge t_0\backslash T_u>t_0)\right]P\{T_u>t_0\}$$

$$= E\left[M_u((T_u)\backslash T_u\le t_0)\right]P\{T_u\le t_0\} + E\left[M_u((T_u)\backslash T_u>t_0)\right]P\{T_u>t_0\}$$

注意到 $t_0<T_u$ 时，$U(t_0)\ge 0$，所以有 $M_u(t_0)=\exp\{-RU(t_0)\}\le 1,$

又 $\{M_u(t_0);t_0\ge 0\}$ 是非负鞅，故

$$\lim_{t_0\to\infty} M_u(t_0) = M_u(\infty) < +\infty$$

又根据单调收敛定理和勒贝格控制收敛定理，在两端令 $t_0\to\infty$ 取极限得

$$\mathrm{e}^{-R(1+i)u} = E\left[M_u(T_u)\backslash T_u<\infty\right]P\{T_u<\infty\} + E\left[M_u(T_u)\backslash T_u=\infty\right]P\{T_u=\infty\}$$

又由 $E\left[S(t)\right]>0$ 及引理 1 得 $\lim_{t_0\to\infty} U(t_0)=+\infty, a.s.$ 故有 $M_u(\infty)=0, a.s.$ 从而有

$$\mathrm{e}^{-R(1+i)u} = E\left[M_u(T_u)\backslash T_u<\infty\right]P\{T_u<\infty\}$$

由此得到

$$\psi(u) = \frac{\mathrm{e}^{-R(1+i)u}}{E\left[M_u(T_u)\backslash T_u<\infty\right]} = \frac{\mathrm{e}^{-R(1+i)u}}{E\left[\mathrm{e}^{-RU(T_u)}\backslash T_u<\infty\right]},$$

定理 4：常利率下单险种得广义齐次 Poisson 风险模型 $\{U(t),t\ge 0\}$ 的最终破产概率仍满足 Lundberg 不等式

$$\psi(u) \le \mathrm{e}^{-R(1+i)u}$$

证明：由定理 1 可知，当 $T_u<\infty$ 时，$U(T_u)<0$，则 $E\left[\mathrm{e}^{-RU(T_u)}\backslash T_u<\infty\right]>1$，所以 $\psi(u)\le \mathrm{e}^{-R(1+i)u}$。

4. 模型的推广

接下来，我们把模型(3.1)推广到双险种的情形[3]。

定义 3：设 $u>0, i>0, c_j>0, c_{j,0}>0, (j=1,2)$ 给定概率空间 $(\Omega,F,P), t\ge 0$，令

$$U(t)=(1+i)\left[u+c_1M_1(t)+c_2M_2(t)\right]-\left[c_{1,0}R_1(t)+c_{2,0}R_2(t)\right]-\sum_{j=1}^{N_1(t)}Z_j^{(1)}-\sum_{j=1}^{N_2(t)}Z_j^{(2)} \tag{3}$$

$$S(t)=(1+i)\left[c_1M_1(t)+c_2M_2(t)\right]-\left[c_{1,0}R_1(t)+c_{2,0}R_2(t)\right]-\sum_{j=1}^{N_1(t)}Z_j^{(1)}-\sum_{j=1}^{N_2(t)}Z_j^{(2)} \tag{4}$$

过程(3)称为常利率环境下双险种的广义齐次 Poisson 风险模型。

模型(3)中各变量的意义与(1)中的相同，角标 $j\left(j=1,2\right)$ 表示第 j 个险种。

令 $h_1(r)=\int_0^{+\infty}\exp(rz_1)\mathrm{d}F(z_1)-1, h_2(r)=\int_0^{+\infty}\exp(rz_2)\mathrm{d}F(z_2)-1$

要求 $E\left[S(t)\right]>0$, 即

$$(c_1\alpha_1\lambda_1+c_2\alpha_2\lambda_2)(1+i)-(c_{1,0}p_1\alpha_1\lambda_1+c_{2,0}p_2\alpha_2\lambda_2)-(q_1\alpha_1\lambda_1\mu_1+q_2\alpha_2\lambda_2\mu_2)>0$$

定理 5：盈余过程 $\left\{S(t),t\geq 0\right\}$ 是一个右连续随机过程，且具备下列性质[4]：

1) $E\left[S(t)\right]=\left[(c_1\alpha_1\lambda_1+c_2\alpha_2\lambda_2)(1+i)-(c_{1,0}p_1\alpha_1\lambda_1+c_{2,0}p_2\alpha_2\lambda_2)-(q_1\alpha_1\lambda_1\mu_1+q_2\alpha_2\lambda_2\mu_2)\right]t$；

2) 具有平稳独立增量；

3) 存在正数 r，使得 $E\left[\mathrm{e}^{-rS(t)}\right]<\infty$。

其中

$$g(r)=\alpha_1\lambda_1\left[\mathrm{e}^{-r(1+i)c_1}+p_1\mathrm{e}^{rc_{1,0}}+q_1h_1(r)-p_1-1\right]+\alpha_2\lambda_2\left[\mathrm{e}^{-r(1+i)c_2}+p_2\mathrm{e}^{rc_{2,0}}+q_2h_2(r)-p_2-1\right]$$

类似的，对于双险种模型，下列结论同样成立：

定理 6：模型(3)的破产概率满足：

1) $\psi(u)\leq \mathrm{e}^{-R(1+i)u}$；

2) $\psi(u)=\dfrac{\mathrm{e}^{-R(1+i)u}}{E\left[\mathrm{e}^{-RU(T_u)}\setminus T_u<\infty\right]}$。

其中，R 为调节系数。

本文主要是对经典风险模型进行了以下几个方面得推广：一是把模型放在常利率环境下来考虑；二是考虑到同一时刻有两张以上保单同时到达得情形，把 Poisson 过程推广为广义 Poisson 过程；三是把退保这一情况考虑进去，并把退保过程和理赔计数过程看作是保单到达过程的稀疏过程。

参考文献

[1] 刘博, 刘鑫. 几类风险模型下保险公司的破产概率[J]. 金融理论与教学, 2021(6): 32-34+58.

[2] 黄俊. 保险风险模型破产概率若干问题研究[D]: [硕士学位论文]. 岳阳: 湖南理工学院, 2022.

[3] 钱敏平, 龚光鲁. 随机过程论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1997.

[4] Hans Gerber, 著. 数学风险论导引[M]. 成世学, 严颖, 译. 北京: 世界图书出版社, 1997.