Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 257-268
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145183

Hans汉斯

三维可压缩液晶流模型解的整体存在唯一性

谢婵鑫

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年3月22日；录用日期：2024年4月28日；发布日期：2024年5月29日

摘　要

本文主要研究三维可压缩液晶流方程的解，建立了在$H^2\left(R^3\right)$中关于整体解的存在性理论。主要利用能量方法，推导出了解的先验估计，再利用连续性技巧将局部解延拓到整体。

关键词

可压缩液晶流，整体存在性

Global Existence and Uniqueness of a 3D Compressible Nematic Liquid Crystal Flow

Chanxin Xie

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 22nd, 2024; accepted: Apr. 28th, 2024; published: May 29th, 2024

Abstract

This paper mainly studies the solution of compressible nematic liquid crystal flow in R^3, the existence theory of the global solution to the system is established in H^2-framework. The energy method is used to derive the desired a priori estimates and hence the global existence by using the standard continuity method.

Keywords

Compressible Nematic Liquid Crystal Flow, Global Existence

文章引用: 谢婵鑫. 三维可压缩液晶流模型解的整体存在唯一性[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 257-268.
DOI: 10.12677/pm.2024.145183

1. 引言

液晶相介于液相和晶相之间，它的性质涉及到化学、物理、生物学、电子学、材料学等多学科，其在基础理论得到了广泛的研究，尤其是在显示应用中获得了巨大的成功。液晶是一门方兴未艾的交叉前沿学科[1]。关于液晶流的理论最初是由 Erickse [2]和 Leslie [3]提出的。当流体是可压缩时，液晶系统会变得更加复杂，研究结果相对来说比较少，因此本文考虑三维可压缩的简化的液晶流模型，其形式如下：

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ (\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla P(\rho) = \mathcal{L}u - \nabla d \cdot \Delta d, \\ d_t + u \cdot \nabla d = \Delta d + |\nabla d|^2 d, \end{cases} \tag{1}$$

模型的初始值为

$$\rho(x,0) = \rho_0(x), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad d(x,0) = d_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{2}$$

其中 $\rho(x,t): \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^1$ 和 $u(x,t): \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ 分别为流体的密度和速度。$m = \rho u$ 为动量，$P = P(\rho)$ 是压力函数的表达式。液晶流的光轴矢量是一个单位向量，表达式为 $d(x,t): \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \to S^2$，即 $d = 1$。$\mathcal{L}$ 为 *Lamé* 算子，

$$\mathcal{L}u = \mu \Delta u + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u.$$

μ 和 λ 为剪切黏度和体积黏度，满足

$$\mu > 0, \quad 2\mu + 3\lambda \geq 0.$$

我们现在只回顾一些以前密切相关的结果。许多作者对不可压缩液晶流动进行了研究，如[4]-[9]和其中的参考文献。对于可压缩模型(1)，最近也有很多重要的进展。Hu 和 Wu [10]研究了小初值条件下模型(1)强解的整体适定性。Ding *et al.* [11]和 Huang *et al.* [12]分别在 1 维和 3 维上获得了非负初始密度的初值问题和初值问题的局部时强解。在[13] [14]中，作者建立了强解的爆破判据。对于 R^3 上任意有界光滑区域，Wang [15]建立了以真空为远场密度的二维或三维强解的全局适定性。Li *et al.* [16]在初始数据足够光滑且在某能量范数上适当小的条件下，得到了三维经典解的全局适定性。Huang *et al.* [17]证明了强解的全局适定性，并得到了初始数据为 H^2 范数稳态附近的小扰动时的 $L^p\left(p \in [1,6]\right)$ 估计。

Hieber 和 Prüss [18]证明了一个强解的局部适定性，当初始数据接近平衡点时，该强解扩展为全局解。在[19]中得到了非等温模式[20]的正则性判据。对于具有真空的可压缩非等温模型，Zhong [21]在二维无热传导的情况下得到了(1)的局部强解，而 Liu 和 Zhong [22]研究了三维在小条件下强解的全局适定性。Wu [23]利用标准的能量估计，研究了高维(3 维及以上)的液晶流方程组小初值经典解的整体存在性以及运用 Green 函数方法，得到奇数维情形(3 维及以上)该解的逐点估计。本文基于上述基础上，主要考虑三维液晶流模型(1)解在 Sobolev 空间 $H^2\left(R^3\right)$ 中的整体存在性，由于在 H^2 框架下，二阶导数的估计需要更加精细的能量估计。下面是本文的符号说明和一些引理。

2. 符号说明和一些引理

在本文中，C 表示一般的正常数。对于整数 $m \geq 0$，Sobolev 空间 $H^m\left(R^3\right)$ 中的范数表示为 $\|\cdot\|_{H^m}$。特

别地，当 $m=0$ 时，我们将简单地使用 $\|\bullet\|$。同通常一样，$\langle\bullet,\bullet\rangle$ 表示 $L^2\left(R^3\right)$ 中的内积。梯度表示为 $\nabla=\left(\partial_1,\partial_2,\partial_3\right)$，$\partial_i=\partial_{x_i}$，$i=1,2,3$。对于任意整数 $l\ge 0$，$\nabla^l f$ 表示函数 f 的所有 l 阶导数。

为了后续证明主要结论的需要，下面介绍两个相关引理。

首先，列出一些 Sobolev 空间中的基本不等式。

引理 2.1 令 $f\in H^2\left(\mathbb{R}^3\right)$，有

(i) $\|f\|_{L^\infty}\le C\|\nabla f\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla f\|_{H^1}^{1/2}\le C\|\nabla f\|_{H^1}$；

(ii) $\|f\|_{L^6}\le C\|\nabla f\|_{L^2}$；

(iii) $\|f\|_{L^q}\le C\|f\|_{H^1}, 2\le q\le 6$。

引理 2.2 令 $s>0$ 和 $m\ge 1$ 是整数，有

$$\left\|\nabla^s(fg)\right\|_{L^p}\le C\|f\|_{L^{p_1}}\left\|\nabla^s g\right\|_{L^{p_2}}+C\left\|\nabla^s f\right\|_{L^{p_3}}\|g\|_{L^{p_4}},$$

和

$$\left\|\nabla^m(fg)-f\nabla^m g\right\|_{L^p}\le C\|\nabla f\|_{L^{p_1}}\left\|\nabla^{m-1}g\right\|_{L^{p_2}}+C\left\|\nabla^m f\right\|_{L^{p_3}}\|g\|_{L^{p_4}},$$

这里 $p,p_1,p_2,p_3,p_4\in[1,\infty]$，且

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p_3}+\frac{1}{p_4}.$$

3. 主要结果

在本节，我们给出了本文主要结果。

定理 3.1 假设 $\left(\rho_0-\bar{\rho},u_0\right)\in H^2\left(\mathbb{R}^3\right)$，$\nabla d_0\in H^1\left(\mathbb{R}^3\right)$，$\bar{\rho}>0$，则存在一个足够小的常数 $\varepsilon>0$，使得如果

$$\left\|\left(\rho_0-\bar{\rho},u_0\right)\right\|_{H^2\left(\mathbb{R}^3\right)}+\left\|\nabla d_0\right\|_{H^1\left(\mathbb{R}^3\right)}\le\varepsilon,$$

那么整体存在唯一的光滑解满足

$$\left(\rho-\bar{\rho},u,\nabla d\right)\in C\left([0,\infty);H^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right).$$

4. 整体存在性

在本节中，我们研究模型(1)解的局部存在性理论和一些能量估计。将局部存在性结果与一些先验估计相结合，然后使用标准连续性论证，得到模型解的整体存在性。

定理 4.1 假设 $\left(\rho_0-\bar{\rho},u_0\right)\in H^2\left(\mathbb{R}^3\right)$，$\nabla d_0\in H^1\left(\mathbb{R}^3\right)$，$\bar{\rho}>0$，则存在一个大于 0 的常数 T_1，使得系统(8)在 $\mathbb{R}^3\times\left[0,T_1\right]$ 上有一个唯一的整体解 (ρ,u,d) 满足

$$(\rho,u,d)\in C\left(\left[0,T_1\right];H^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right),$$

证明：利用收缩映射定理的标准论证可以证明这一点。例如，参考文献[24] [25]对局部存在结果的研究。我们在这里省略了证明。

首先，我们用能量法给出了一些解的先验估计。在本节中，我们用能量法给出了一些解的先验估计。由定理 4.1 可知，存在时间 $T'>0$，解存在于 $\mathbb{R}^3\times\left[0,T'\right]$ 中。如定理 4.1 所述，假设对于任意 $T\in\left(0,T'\right]$，解存在于 $\mathbb{R}^3\times[0,T]$ 上，我们需要一些关于时间的一致估计来证明定理 3.1。为此，我们首先做一个先验假设，当 $\delta>0,\delta_1>0$ 足够小的时候，有

$$\begin{cases} \sup\limits_{0\le t\le T}\left\{\left\|\left(\rho-\bar{\rho},u\right)(\cdot,t)\right\|_{H^2}\right\}\le\delta, \\ \sup\limits_{0\le t\le T}\left\{\left\|\nabla d(\cdot,t)\right\|_{H^1}\right\}\le\delta_1. \end{cases} \tag{3}$$

那么，模型(1)的解(ρ,u,d)存在并且满足

$$\begin{aligned} &\left\{\left\|\left(\rho-\bar{\rho},u\right)\right\|_{H^2}^2+\left\|\nabla d\right\|_{H^1}^2\right\}+\int_0^t\left[\left\|\nabla\rho\right\|_{H^1}^2+\left\|\left(\nabla u,\nabla d\right)\right\|_{H^2}^2\right](\cdot,s)\mathrm{d}s \\ &\le C_1\left\{\left\|\left(\rho_0-\bar{\rho},u_0\right)\right\|_{H^2}^2+\left\|\nabla d_0\right\|_{H^1}^2\right\}. \end{aligned} \tag{4}$$

通过(3)和 sobolev 不等式，我们得到

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left|\left(\rho-\bar{\rho},u,\nabla d\right)(t)\right|\le C\left(\delta+\delta_1\right), \tag{5}$$

其次，我们对方程做一个变形。我们定义函数$h(\rho)$满足$h'(\rho)=\frac{1}{\rho}P'(\rho)$，通过先验假设(3)和 Sobolev 不等式可知，存在正常数 C_0，C_1 和 C_2 使得

$$0<C_0\le h'(\rho)\le C_1\le\infty,\quad \left|h''(\rho)\right|\le C_2.$$

做变换$\rho\to\bar{\rho}+\rho$，令$\bar{\rho}=1,\mu=1,\lambda=0$。则方程可以写成

$$\begin{cases} \rho_t+\operatorname{div}\left[(1+\rho)u\right]=0, \\ u_t+u\cdot\nabla u+\nabla\left[h(1+\rho)-h(1)\right]=\frac{1}{1+\rho}\left(\Delta u+\nabla\operatorname{div}u\right)-\frac{1}{1+\rho}\nabla d\cdot\Delta d, \\ d_t-\Delta d=-u\cdot\nabla d+\left|\nabla d\right|^2 d, \end{cases} \tag{6}$$

初值条件满足

$$\left(\rho,u,d\right)(x,0)=\left(\rho_0,u_0,d_0\right)(x). \tag{7}$$

同时为了计算方便，我们对(6)做进一步的简化，可以得到

$$\begin{cases} \rho_t+\operatorname{div}u=-\operatorname{div}(\rho u), \\ u_t-\Delta u-\nabla\operatorname{div}u+\nabla\rho=-u\cdot\nabla u-l(\rho)\left[\Delta u+\nabla\operatorname{div}u\right]-f(\rho)\nabla\rho-\frac{1}{1+\rho}\nabla d\cdot\Delta d, \\ d_t-\Delta d=-u\cdot\nabla d+\left|\nabla d\right|^2 d, \end{cases} \tag{8}$$

其中$l(\rho)=\frac{\rho}{1+\rho}$，$f(\rho)=\frac{P'(1+\rho)}{1+\rho}-1$。通过先验假设(3)直接计算可以得到

$$\left|l(\rho)\right|,\left|f(\rho)\right|\le C|\rho|,\quad \left|l^{(k)}(\rho)\right|,\left|f^{(k)}(\rho)\right|\le C,\quad k\ge1. \tag{9}$$

这些不等式在后面将会用到。

能量估计

接下来，我们将给出解(ρ,u,d)的能量估计。类似于[23]的做法，我们给出 L^2 和一阶导数的 L^2 估计，但由于我们在 H^2 框架下，二阶导数的估计需要更加精细的能量估计。

引理 4.1 有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left\|\left(\rho\nabla\rho,u,\nabla d\right)\right\|_{L^2}^2\right\}+C\left(\gamma_0,\gamma_1\right)\left\|\left(\nabla\rho,\nabla u,\nabla^2 d\right)\right\|^2\le0.$$

证明：将 ∇^k 分别作用于$(8)_1$ 和$(8)_2$，同时用 $\nabla^k\rho,\nabla^k u$ 分别乘以$(8)_1$ 和$(8)_2$，在 R^3 上积分得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\nabla^k\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^k u\right\|_{L^2}^2\right)+\left\|\nabla^{k+1}u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^k \mathrm{div}u\right\|_{L^2}^2\\
&=-\left\langle\nabla^k\rho,\nabla^k\,\mathrm{div}\left(\rho u\right)\right\rangle-\left\langle\nabla^k u,\nabla^k\left(u\cdot\nabla u\right)\right\rangle-\left\langle\nabla^k u,\nabla^k\left(l\left(\rho\right)\Delta u+l\left(\rho\right)\nabla\,\mathrm{div}\,u\right)\right\rangle\\
&\quad-\left\langle\nabla^k u,\nabla^k\left(f\left(\rho\right)\nabla\rho\right)\right\rangle-\left\langle\nabla^k u,\nabla^k\left(\frac{1}{1+\rho}\nabla d\cdot\Delta d\right)\right\rangle\\
&:=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

现在对(10)右边的项进行估计，对于 $k=0$，可以得到

$$
\begin{aligned}
I_1&=-\int_{\mathbb{R}^3}\rho\,\mathrm{div}\left(\rho u\right)\mathrm{d}x\\
&\le C\left\|\rho\right\|_{L^3}\left\|\rho\right\|_{L^6}\left\|\nabla u\right\|_{L^2}+\left\|\nabla\rho\right\|_{L^2}\left\|u\right\|_{L^3}\left\|\rho\right\|_{L^6}\\
&\le C\delta\left(\left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\rho\right\|_{L^2}^2\right),
\end{aligned}
$$

通过 Sobolev 不等式和(9)，我们有

$$
I_3=\int_{\mathbb{R}^3}u\left(l\left(\rho\right)\left|\nabla u\right|^2+l\left(\rho\right)\left|\nabla\cdot u\right|^2\right)\mathrm{d}x\le C\delta\left(\left\|\nabla\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2\right),
$$

$$
I_4=-\int_{\mathbb{R}^3}u\cdot\left(f\left(\rho\right)\nabla\rho\right)\mathrm{d}x\le C\delta\left(\left\|\nabla\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2\right),
$$

其中对向量 $u,v\in\mathbb{R}^3$， $u\otimes v=\left(u_i v_j\right)_{3\times3}$，对于矩阵 $U,V\in\mathbb{R}^{3\times3}$， $U:V=u_{ij}v_{ij}$。那么对于 I_2 和 I_5 可以得到

$$
I_2=\int\left(u\cdot\nabla u\right)\cdot u\mathrm{d}x\le C\left\|u\right\|_{L^3}\left\|\nabla u\right\|_{L^2}\left\|u\right\|_{L^6}\le C\delta\left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2,
$$

$$
\begin{aligned}
I_5&=-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\rho+1}\left[\mathrm{div}\left(\frac{1}{2}\left|\nabla d\right|_{3\times3}^2-\nabla d\otimes\nabla d\right)\right]\cdot u\mathrm{d}x\\
&=\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\left(\frac{1}{\rho+1}\right)\cdot\left[\frac{1}{2}\left|\nabla d\right|^2 I_{3\times3}-\nabla d\otimes\nabla d\right]\cdot u\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\rho+1}\left[\left(\frac{1}{2}\left|\nabla d\right|^2 I_{3\times3}-\nabla d\otimes\nabla d\right)\cdot\nabla\right]\cdot u\mathrm{d}x\\
&\le C\left\|\nabla\right\|_{L^2}\left\|\nabla d\right\|_{L^6}^2\left\|u\right\|_{L^6}+C\left\|\nabla d\right\|_{L^3}\left\|\nabla d\right\|_{L^6}\left\|\nabla u\right\|_{L^2}\\
&\le C\delta\left(\left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 d\right\|_{L^2}^2\right),
\end{aligned}
$$

那么，可以得到

$$
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|u\right\|_{L^2}^2\right)+\left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2+\left\|\mathrm{div}u\right\|_{L^2}^2\le C\delta\left(\left\|\nabla\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 d\right\|_{L^2}^2\right).
\tag{11}
$$

接下来，对 $\left\|\nabla^2 d\right\|_{L^2}^2$ 和 $\left\|\nabla\rho\right\|_{L^2}$ 做估计，将 ∇ 作用到$(8)_3$，将所得的等式乘以 $\left\|\nabla d\right\|_{L^2}$ 在 R^3 上积分，利用分部积分和 Young 不等式可以得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla d\right\|^2+\left\|\nabla^2 d\right\|^2\\
&=-\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\left(u\cdot\nabla d\right)\cdot\nabla d\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\left(\left|\nabla d\right|^2 d\right)\cdot\nabla d\mathrm{d}x\\
&\le\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla d\right|\left|\nabla u\right|\left|\nabla d\right|\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla d\right|^2\left|\nabla^2 d\right|\left|d\right|\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla d\right|^4\mathrm{d}x\\
&\le\left(\left\|\nabla d\right\|_{L^6}\left\|\nabla u\right\|_{L^2}+\left\|\nabla^2 d\right\|_{L^2}\left\|u\right\|_{L^6}+\left\|\nabla^2 d\right\|_{L^2}\left\|\nabla d\right\|_{L^6}\right)\left\|\nabla d\right\|_{L^3}+\left\|\nabla d\right\|_{L^2}\left\|\nabla d\right\|_{L^6}^3\\
&\le C\left(\delta+\delta_1\right)\left(\left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 d\right\|_{L^2}^2\right).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

将(11)和(12)相加，可以得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\rho\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^2}^2+\|\nabla d\|_{L^2}^2\right)+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 d\right\|_{L^2}^2\\
&\le C\left(\delta+\delta_1\right)\left(\|\nabla\rho\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 d\right\|_{L^2}^2\right).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

为了得到$\|\nabla\rho\|_{L^2}$的估计，我们先引入两个关系式，

$$
\nabla\rho\cdot\left(\nabla^2\rho\cdot u\right)=\nabla\frac{|\nabla\rho|^2}{2}\cdot u,\quad \int_{\mathbb{R}^3}(\rho+1)\nabla\rho\cdot(\Delta u-\nabla\operatorname{div}u)\mathrm{d}x=0,
$$

定义以下运算

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\left[\frac{1}{2}|\nabla\rho|^2+\frac{(\rho+1)^2}{2}\nabla\rho\cdot u\right]\mathrm{d}x\\
&=\int_{\mathbb{R}^3}\left[\nabla\rho\cdot\nabla\rho_t+(\rho+1)\rho_t\nabla\rho\cdot u+\frac{(\rho+1)^2}{2}\nabla\rho_t\cdot u+\frac{(\rho+1)^2}{2}\nabla\rho\cdot u_t\right]\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

那么通过 Hölder 不等式和 Cauchy 不等式，则可以得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3}\left[\nabla\rho\cdot\nabla\rho_t+\frac{(\rho+1)^2}{2}\nabla\rho\cdot u_t\right]\mathrm{d}x\\
&=-\int_{\mathbb{R}^3}\left[\nabla\rho\cdot\nabla\operatorname{div}\left[(\rho+1)u\right]-\frac{(\rho+1)^2}{2}\nabla\rho\cdot u_t\right]\mathrm{d}x\\
&=-\int_{\mathbb{R}^3}\left[\nabla\rho\cdot\left(\nabla^2\rho\cdot u\right)+\nabla\rho\cdot(\nabla\rho\cdot\nabla u)+|\nabla\rho|^2\operatorname{div}u+(\rho+1)\nabla\rho\cdot\nabla\operatorname{div}u\right]\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(\rho+1)^2}{2}\nabla\rho\left\{-\frac{1}{\rho+1}\nabla d\cdot\Delta d-u\cdot\nabla u-\nabla\left[h(\rho+1)-h(1)\right]+\frac{1}{\rho+1}\Delta u+\frac{1}{\rho+1}\nabla\operatorname{div}u\right\}\mathrm{d}x\\
&\le C\left(\delta+\delta_1\right)\left\|\left(\nabla\rho,\nabla u,\nabla^2 d\right)\right\|^2-\int_{\mathbb{R}^3}(\rho+1)\nabla\rho\cdot\nabla\operatorname{div}u\mathrm{d}x\\
&\quad-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(\rho+1)^2}{2}h'(\rho+1)|\nabla\rho|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho+1}{2}\nabla\rho\cdot(\Delta u+\nabla\operatorname{div}u)\mathrm{d}x\\
&=C\left(\delta+\delta_1\right)\left\|\left(\nabla\rho,\nabla u,\nabla^2 d\right)\right\|^2-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(\rho+1)^2}{2}h'(\rho+1)|\nabla\rho|^2\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

剩下的两项估计如下：

$$
\int_{\mathbb{R}^3}(\rho+1)\rho_t\nabla\rho\cdot u\mathrm{d}x\le\delta\left\|\left(\rho_t,\nabla\rho\right)\right\|_{L^2}^2\le C\delta\left\|(\nabla\rho,\nabla u)\right\|_{L^2}^2
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(\rho+1)^2}{2}\nabla\rho_t\cdot u\mathrm{d}x=-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(\rho+1)^2}{2}u\cdot\nabla\operatorname{div}\left[(\rho+1)u\right]\mathrm{d}x\\
&=-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(\rho+1)^2}{2}u\cdot\nabla(\nabla\rho\cdot u)+\frac{(\rho+1)^2}{2}u\cdot\left[\operatorname{div}u\nabla\rho+(\rho+1)\nabla\operatorname{div}u\right]\mathrm{d}x\\
&\le C\delta\left\|(\nabla\rho,\nabla u)\right\|_{L^2}^2+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(\rho+1)^3}{2}(\operatorname{div}u)^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

因此，我们可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\rho\|_{L^2}^2+C\|\nabla\rho\|_{L^2}^2+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(\rho+1)^2}{2}\nabla\rho\cdot u\mathrm{d}x\\&\le\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(\rho+1)^3}{2}(\mathrm{div}u)^2\mathrm{d}x+C(\delta+\delta_1)\left\|(\nabla u,\nabla^2 d)\right\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{15}$$

用两个足够小的数γ_0,γ_1分别与(13)和(15)相乘之后相加，则可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|(\rho\nabla\rho,u,\nabla d)\|_{L^2}^2+\gamma_0\left\|(\nabla u,\nabla^2 d)\right\|_{L^2}^2+C\gamma_1\|\nabla\rho\|_{L^2}^2+\gamma_1\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(\rho+1)^2}{2}\nabla\rho\cdot u\mathrm{d}x\\&\le C\gamma_0(\delta+\delta_1)\|\nabla\rho\|_{L^2}^2+C(\delta+\delta_1)(\gamma_0+\gamma_1)\left\|(\nabla u,\nabla^2 d)\right\|_{L^2}^2+\gamma_1\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(\rho+1)^3}{2}(\mathrm{div}u)^2\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{16}$$

则有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\|(\rho\nabla\rho,u,\nabla d)\|_{L^2}^2\right\}+C(\gamma_0,\gamma_1)\left\|(\nabla\rho,\nabla u,\nabla^2 d)\right\|^2\le 0.\tag{17}$$

引理 4.1 证毕。

引理 4.2 有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla\rho\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 d\right\|_{L^2}^2\right)+\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2+\|\nabla\mathrm{div}u\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3 d\right\|_{L^2}^2\\&\le C(\delta+\delta_1)\left(\|\nabla d\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3 d\right\|_{L^2}^2+\|\nabla\rho\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)+C\delta\left(\|\nabla\rho\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\right).\end{aligned}\tag{18}$$

证明： 将∇^k分别作用于$(8)_1$和$(8)_2$，同时用$\nabla^k\rho,\nabla^k u$分别乘以$(8)_1$和$(8)_2$，在R^3上积分得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\nabla^k\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^k u\right\|_{L^2}^2\right)+\left\|\nabla^{k+1}u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^k\mathrm{div}u\right\|_{L^2}^2\\&=-\left\langle\nabla^k\rho,\nabla^k\mathrm{div}(\rho u)\right\rangle-\left\langle\nabla^k u,\nabla^k(u\cdot\nabla u)\right\rangle-\left\langle\nabla^k u,\nabla^k\left(l(\rho)\Delta u+l(\rho)\nabla\mathrm{div}u\right)\right\rangle\\&\quad-\left\langle\nabla^k u,\nabla^k\left(f(\rho)\nabla\rho\right)\right\rangle-\left\langle\nabla^k u,\nabla^k\left(\frac{1}{1+\rho}\nabla d\cdot\Delta d\right)\right\rangle\\&:=J_1+J_2+J_3+J_4+J_5.\end{aligned}$$

对于$k=1$，则有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla\rho\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)+\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2+\|\nabla\mathrm{div}u\|_{L^2}^2\\&=-\left\langle\nabla\rho,\nabla\mathrm{div}(\rho u)\right\rangle-\left\langle\nabla u,\nabla(u\cdot\nabla u)\right\rangle-\left\langle\nabla u,\nabla\left(l(\rho)\Delta u+l(\rho)\nabla\mathrm{div}u\right)\right\rangle\\&\quad-\left\langle\nabla u,\nabla\left(f(\rho)\nabla\rho\right)\right\rangle-\left\langle\nabla u,\nabla\left(\frac{1}{1+\rho}\nabla d\cdot\Delta d\right)\right\rangle\\&:=J_1+J_2+J_3+J_4+J_5.\end{aligned}$$

对于上述的项，易得

$$\begin{aligned}J_1&=\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^2\rho\,\mathrm{div}(\rho u)\mathrm{d}x\\&\le C\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}\left[\|\nabla\rho u\|_{L^2}+\|\rho\nabla u\|_{L^2}\right]\\&\le C\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}\left[\|\nabla\rho\|_{L^3}\|u\|_{L^6}+\|\rho\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^2}\right]\\&\le C\delta\left(\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
J_2 &= -\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \cdot \nabla (u \cdot \nabla u) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla) \nabla u \cdot \nabla u \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} \left[\nabla (u \cdot \nabla u) - (u \cdot \nabla) \nabla u \right] \cdot \nabla u \mathrm{d}x \\
&\le C\delta \|\nabla u\|_{H^1}^2 .
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
J_3 &= -\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \cdot \nabla \big(l(\rho) \Delta u + l(\rho) \nabla \operatorname{div} u \big) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 u \cdot \big(l(\rho) \Delta u + l(\rho) \nabla \operatorname{div} u \big) \mathrm{d}x \le C\delta \|\nabla^2 u\|_{L^2}^2 ,
\end{aligned}
$$

$$
J_4 = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 u \cdot \big(f(\rho) \nabla \rho \big) \mathrm{d}x \le C\delta \left(\|\nabla \rho\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2 u\|_{L^2}^2 \right).
$$

同样的，对于 J_5，

$$
\begin{aligned}
J_5 &= -\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \cdot \nabla \left(\frac{1}{1+\rho} \nabla d \cdot \Delta d \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \cdot \left[\nabla \left(\frac{1}{1+\rho} \right) (\nabla d \cdot \Delta d) + \frac{1}{1+\rho} \nabla (\nabla d \cdot \Delta d) \right] \mathrm{d}x \\
&\le C(\delta + \delta_1) \left(\|\nabla d\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2 d\|_{L^2}^2 + \|\nabla^3 d\|_{L^2}^2 + \|\nabla \rho\|_{L^2}^2 \right).
\end{aligned}
$$

综上可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\|\nabla \rho\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \right) + \|\nabla^2 u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \operatorname{div} u\|_{L^2}^2 \\
&\le C(\delta + \delta_1) \left(\|\nabla d\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2 d\|_{L^2}^2 + \|\nabla^3 d\|_{L^2}^2 + \|\nabla \rho\|_{L^2}^2 \right) \\
&\quad + C\delta \left(\|\nabla \rho\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2 \rho\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2 u\|_{L^2}^2 \right).
\end{aligned} \tag{19}
$$

接下来，我们要给出 $\|\nabla^2 d\|_{L^2}^2$ 的估计，将 ∇^2 作用到(18)$_3$，再对得到的等式乘以 $\nabla^2 d$ 并在 R^3 上积分可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\nabla^2 d\|^2 + \|\nabla^3 d\|_{L^2}^2 \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 (u \cdot \nabla d) \cdot \nabla^2 d \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 \left(|\nabla d|^2 d \right) \cdot \nabla^2 d \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla (u \cdot \nabla d) \cdot \nabla^3 d \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \left(|\nabla d|^2 d \right) \cdot \nabla^3 d \mathrm{d}x \\
&\le C(\delta + \delta_1) \left(\|\nabla d\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2 d\|_{L^2}^2 + \|\nabla^3 d\|_{L^2}^2 \right).
\end{aligned} \tag{20}
$$

将(19)和(20)相加，得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\|\nabla \rho\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2 d\|_{L^2}^2 \right) + \|\nabla^2 u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \operatorname{div} u\|_{L^2}^2 + \|\nabla^3 d\|_{L^2}^2 \\
&\le C(\delta + \delta_1) \left(\|\nabla d\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2 d\|_{L^2}^2 + \|\nabla^3 d\|_{L^2}^2 + \|\nabla \rho\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \right) \\
&\quad + C\delta \left(\|\nabla \rho\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2 \rho\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2 u\|_{L^2}^2 \right).
\end{aligned} \tag{21}
$$

引理 4.2 证毕。

引理 4.3 对于整数 $k = 2$，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\right)+\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2\mathrm{div}u\right\|_{L^2}^2\\&\le C\left(\delta+\delta_1\right)\left(\left\|\nabla d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3 d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2\right)+C\delta\left(\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\right).\end{aligned}\tag{22}$$

证明： 将 ∇^k 分别作用于$(8)_1$和$(8)_2$，同时用 $\nabla^k\rho,\nabla^k u$ 分别乘以$(8)_1$和$(8)_2$，在 R^3 上积分得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\right)+\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2\mathrm{div}u\right\|_{L^2}^2\\&=-\left\langle\nabla^2\rho,\nabla^2\,\mathrm{div}\left(\rho u\right)\right\rangle-\left\langle\nabla^2 u,\nabla^2\left(u\cdot\nabla u\right)\right\rangle-\left\langle\nabla^2 u,\nabla^2\left(l\left(\rho\right)\Delta u+l\left(\rho\right)\nabla\,\mathrm{div}\,u\right)\right\rangle\\&\quad-\left\langle\nabla^2 u,\nabla^2\left(f\left(\rho\right)\nabla\rho\right)\right\rangle-\left\langle\nabla^2 u,\nabla^2\left(\frac{1}{1+\rho}\nabla d\cdot\Delta d\right)\right\rangle\\&:=K_1+K_2+K_3+K_4+K_5.\end{aligned}\tag{23}$$

对于 K_1，由分部积分、Sobolev 不等式和先验假设可知

$$\begin{aligned}K_1&=\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^2\rho\nabla^2\,\mathrm{div}\left(\rho u\right)\mathrm{d}x\\&\le C\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}\left[\left\|\nabla^2\rho\nabla u\right\|_{L^2}+\left\|\nabla\rho\nabla^2 u\right\|_{L^2}+\left\|\rho\nabla^3 u\right\|_{L^2}\right]\\&\le C\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}\left[\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}\left\|\nabla u\right\|_{L^\infty}+\left\|\nabla\rho\right\|_{L^3}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^6}+\left\|\rho\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}\right]\\&\le C\delta\left(\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_2&=\left|\left\langle\nabla^2 u,\nabla^2(u\cdot\nabla u)\right\rangle\right|\\&=\int_{\mathbb{R}^3}u\cdot\nabla\nabla^2 u\nabla^2 u\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\left[\nabla^2\left(u\cdot\nabla u\right)-u\cdot\nabla\nabla^2 u\right]\nabla^2 u\mathrm{d}x\\&\le C\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\left\|\mathrm{div}u\right\|_{L^\infty}+C\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}\left(\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}\left\|\nabla u\right\|_{L^\infty}+\left\|\nabla u\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}\right)\\&\le C\delta\left(\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2\right).\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}K_3&=-\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^2 u\cdot\nabla^2\left(l\left(\rho\right)\Delta u+l\left(\rho\right)\nabla\,\mathrm{div}\,u\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^3 u\cdot\left[l'\left(\rho\right)\nabla\rho\Delta u+l\left(\rho\right)\nabla\Delta u\right]\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^3 u\cdot\left[l'\left(\rho\right)\nabla\rho\nabla\,\mathrm{div}\,u+l\left(\rho\right)\nabla^2\,\mathrm{div}\,u\right]\mathrm{d}x\\&\le C\delta\left(\left\|\nabla\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2\right),\end{aligned}$$

$$K_4=\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^2 u\cdot\nabla^2\left(f\left(\rho\right)\nabla\rho\right)\mathrm{d}x\le C\delta\left(\left\|\nabla\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2\right).$$

同样的，对于 K_5，

$$\begin{aligned}K_5&=-\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^2 u\cdot\nabla^2\left(\frac{1}{1+\rho}\nabla d\cdot\Delta d\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^3 u\cdot\left[\nabla\left(\frac{1}{1+\rho}\right)\left(\nabla d\cdot\Delta d\right)+\frac{1}{1+\rho}\nabla\left(\nabla d\cdot\Delta d\right)\right]\mathrm{d}x\\&\le C\left(\delta+\delta_1\right)\left(\left\|\nabla d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3 d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2\right).\end{aligned}$$

最后，综上所得，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2u\right\|_{L^2}^2\right)+\left\|\nabla^3u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2\mathrm{div}u\right\|_{L^2}^2\\&\le C\left(\delta+\delta_1\right)\left(\left\|\nabla d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3u\right\|_{L^2}^2\right)+C\delta\left(\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2u\right\|_{L^2}^2\right).\end{aligned}\tag{24}$$

由引理 4.1 和引理 4.2 可得，我们需要给出 $\nabla^2\rho$ 的 L^2 估计。由 $(1.8)_2$ 知道

$$\nabla\rho=-\frac{1}{\rho+1}\nabla d\cdot\Delta d-u\cdot\nabla u+\frac{1}{\rho+1}\Delta u+\frac{1}{\rho+1}\nabla\,\mathrm{div}\,u-u_t,\tag{25}$$

将 ∇ 作用到上式，再对得到的等式乘以 $\nabla^2\rho$，然后在 R^3 上积分可得

$$\begin{aligned}&\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2+\int\nabla^2\rho\cdot\nabla u_t\mathrm{d}x\\&=-\int\nabla^2\rho\cdot\nabla\left(u\cdot\nabla u\right)\mathrm{d}x-\int\nabla^2\rho\cdot\nabla\left(\frac{1}{1+\rho}\nabla d\cdot\Delta d\right)\mathrm{d}x\\&\quad+\int\left[\nabla^2\rho\cdot\nabla\left(\frac{1}{1+\rho}\Delta u\right)+\nabla^2\rho\cdot\nabla\left(\frac{1}{1+\rho}\nabla\,\mathrm{div}\,u\right)\right]\mathrm{d}x\\&:=Q_1+Q_2+Q_3.\end{aligned}\tag{26}$$

利用 Hölder 不等式、Sobolev 不等式(5)和(9)可得

$$Q_1=-\int\nabla^2\rho\cdot\nabla\left(u\cdot\nabla u\right)\le C\delta\left(\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2u\right\|_{L^2}^2\right),$$

和

$$Q_3=\int\left[\nabla^2\rho\cdot\nabla\left(\frac{1}{1+\rho}\Delta u\right)+\nabla^2\rho\cdot\nabla\left(\frac{1}{1+\rho}\nabla\,\mathrm{div}\,u\right)\right]\mathrm{d}x\le C\delta\left\|\nabla^3u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2\Big),$$

类似地，有

$$\begin{aligned}Q_2&=-\int\nabla^2\rho\cdot\nabla\left(\frac{1}{1+\rho}\nabla d\cdot\Delta d\right)\mathrm{d}x\\&\le\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}\int\left(\nabla\left(\frac{1}{1+\rho}\right)\nabla d\cdot\Delta d+\frac{1}{1+\rho}\nabla\left(\nabla d\cdot\Delta d\right)\right)\mathrm{d}x\\&\le\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}\left\|\nabla\left(\frac{1}{1+\rho}\right)\right\|_{L^6}\left\|\nabla d\right\|_{L^6}\left\|\Delta d\right\|_{L^6}+C\left(\left\|\Delta d\right\|_{L^4}^2+\left\|\nabla d\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla\Delta d\right\|_{L^2}\right)\\&\le C\left(\delta+\delta_1\right)\left(\left\|\nabla^2d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2\right).\end{aligned}$$

下面对(25)左边的式子进行估计

$$\begin{aligned}\int\nabla^2\rho\cdot\nabla u_t&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\nabla u\cdot\nabla^2\rho\mathrm{d}x-\int\nabla u\cdot\nabla^2\rho_t\mathrm{d}x\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\nabla u\cdot\nabla^2\rho\mathrm{d}x-\int\left(\nabla\,\mathrm{div}\,u\right)^2\mathrm{d}x-\int\nabla u\nabla^2\,\mathrm{div}\left(\rho u\right)\mathrm{d}x\\&\ge\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\nabla u\cdot\nabla^2\rho\mathrm{d}x-\int\left(\nabla\,\mathrm{div}\,u\right)^2\mathrm{d}x-C\delta\left(\left\|\nabla^3u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2\right).\end{aligned}$$

现在利用插值不等式，可以得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left\|\nabla^2(\rho,u)\right\|_{L^2}^2-\gamma_2\int\nabla u\cdot\nabla^2\rho\mathrm{d}x\right\}+\left(\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2\right)\\
&\le C(\delta+\delta_1)\left(\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3 d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2\right).
\end{aligned}
\tag{27}
$$

通过利用 γ_2 和 δ,δ_1 的小性、引理 4.1 和引理 4.2 以及(28)可得

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left\|(\rho,u)\right\|_{H^2}^2+\left\|\nabla d\right\|_{H^1}^2\right\}+\left\|\nabla\rho\right\|_{H^1}^2+\left\|(\nabla u,\nabla d)\right\|_{H^2}^2\le 0.
\tag{28}
$$

最后对(28)关于时间 t 积分得到了定理 3.1 的结果。证毕。

参考文献

[1] 刘兰明. 液晶动力学方程数学研究[D]: [博士学位论文]. 上海: 复旦大学, 2012.

[2] Ericksen, J.L. (1962) Hydrostatic Theory of Liquid Crystal. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **9**, 371-378. https://doi.org/10.1007/BF00253358

[3] Leslie, F.M. (1968) Some Constitutive Equations for Liquid Crystals. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **28**, 265-283. https://doi.org/10.1007/BF00251810

[4] Gong, H.J., Huang, T. and Li, J.K. (2017) Nonuniqueness of Nematic Liquid Crystal Flows in Dimension Three. *Journal of Differential Equations*, **263**, 8630-8648. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.08.052

[5] Gong, H.J., Li, J.K. and Xu, C. (2016) Local Well-Posedness of Strong Solutions to Density Liquid Crystal System. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **147**, 26-44. https://doi.org/10.1016/j.na.2016.08.014

[6] Hong, M.C. and Xin, Z.P. (2012) Global Existence of Solutions of the Liquid Crystal Flow for the Oseen-Frank Model in R^2. *Advances in Mathematics*, **231**, 1364-1400. https://doi.org/10.1016/j.aim.2012.06.009

[7] Lin, F.H., Lin, J. and Wang, C.Y. (2010) Liquid Crystal Flows in Two Dimensions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **197**, 297-336. https://doi.org/10.1007/s00205-009-0278-x

[8] Lin, F.H. and Liu, C. (1995) Nonparabolic Dissipative Systems Modeling the Flow of Liquid Crystals. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **48**, 501-537. https://doi.org/10.1002/cpa.3160480503

[9] Lin, F.H. and Liu, C. (1996) Partial Regularity of the Dynamic System Modeling the Flow of Liquid Crystals. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **2**, 1-22. https://doi.org/10.3934/dcds.1996.2.1

[10] Hu, X.P. and Wu, H. (2013) Global Solution to the Three-Dimensional Compressible Flow of Liquid Crystals. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **45**, 2678-2699. https://doi.org/10.1137/120898814

[11] Ding, S.J., Lin, J.Y., Wang, C.Y. and Wen, H.Y. (2012) Compressible Hydrodynamic Flow of Liquid Crystals in 1-D, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **32**, 539-563. https://doi.org/10.3934/dcds.2012.32.539

[12] Huang, T., Wang, C.Y. and Wen, H.Y. (2012) Strong Solutions of the Compressible Nematic Liquid Crystal Flow. *Journal of Differential Equations*, **252**, 2222-2265. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.07.036

[13] Huang, T. and Wang, C.Y. (2012) Blow Up Criterion for Nematic Liquid Crystal Flows. *Communications in Partial Differential Equations*, **37**, 875-884. https://doi.org/10.1080/03605302.2012.659366

[14] Huang, T., Wang, C.Y. and Wen, H. (2012) Blow up Criterion for Compressible Nematic Liquid Crystal Flows in Dimension Three. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **204**, 285-311. https://doi.org/10.1007/s00205-011-0476-1

[15] Wang, T. (2016) Global Existence and Large Time Behavior of Strong Solutions to the 2-D Compressible Nematic Liquid Crystalflows with Vacuum, *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **18**, 539-569. https://doi.org/10.1007/s00021-016-0251-z

[16] Li, J.K., Xu, Z.H. and Zhang, J.W. (2018) Global Existence of Classical Solutions with Large Oscillations and Vacuum to the Three Dimensional Compressible Nematic Liquid Crystal Flows. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **20**, 2015-2145. https://doi.org/10.1007/s00021-018-0400-7

[17] Huang, J.R., Wang, W.J. and Wen, H.Y. (2020) On L^p Estimates for a Simplified Ericksen-Leslie System. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **19**, 1485-1507. https://doi.org/10.3934/cpaa.2020075

[18] Hieber, M. and Prüss, J. (2017) Dynamics of the Ericksen-Leslie Equations with General Leslie Stress I: The Incompressible Isotropic Case. *Mathematische Annalen*, **369**, 977-996. https://doi.org/10.1007/s00208-016-1453-7

[19] Gu, W., Fan, J. and Zhou, Y. (2016) Regularity Criteria for Some Simplified Non-Isothermal Models for Nematic Liquid Crystals. *Computers & Mathematics with Applications*, **72**, 2839-2853.

https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.10.006

[20] Feireisl, E., Fŕemond, M., Rocca, E. and Schimperna, G. (2012) A New Approach to Non-Isothermal Models for Nematic Liquid Crystals. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **205**, 651-672. https://doi.org/10.1007/s00205-012-0517-4

[21] Zhong, X. (2020) Strong Solutions to the Cauchy Problem of the Two-Dimensional Compressible Non-Isothermal Nematic Liquid Crystal Flows with Vacuum and Zero Heat Conduction. *Journal of Mathematical Physics*, **61**, Article ID: 011508 https://doi.org/10.1063/1.5109901

[22] Liu, Y. and Zhong, X. (2021) Global Well-Posedness to the 3D Cauchy Problem of Compressible Non-Isothermal Nematic Liquid Crystal Flows with Vacuum. Nonlinear Anal. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **58**, Article ID: 103219. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2020.103219

[23] Wu, Z.G. (2013) Pointwise Estimates of Solution to Compressible Nematic Liquid Crystal Flow in Odd Dimensions. *Scientia Sinica Mathematica*, **43**, 807-823. (In Chinese) https://doi.org/10.1360/012013-122

[24] Matsumura, A. and Nishida, T. (1983) Initial Boundary Value Problems for the Equations of Motion of Compressible Viscous and Heat-Conductive Fluids. *Communications in Mathematical Physics*, **89**, 445-464. https://doi.org/10.1007/BF01214738

[25] Kawashima, S. (1983) Systems of a Hyperbolic-Parabolic Composite Type, with Applications to the Equations of Magne-to-Hydrodynamics. Ph.D. Thesis, Kyoto University, Kyoto.