Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2013, 2, 135-139
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2013.23017 Published Online August 2013 (http://www.hanspub.org/journal/aam.html)

Conditional Symmetries of a Toda Lattice Equation

Yang Pan*, **Lihua Zhang, Desheng Li**

School of Mathematics and System Science, Shenyang Normal University, Shenyang
Email: *532335343@qq.com

Received: Apr. 25th, 2013; revised: May 12th, 2013; accepted: May 21st, 2013

Copyright © 2013 Yang Pan et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: In this paper, the discrete Lie point symmetry group analysis method is applied on a nonlinear differential-difference Toda lattice equation (i.e. a Toda-like equation), i.e. firstly, the Toda lattice equation is reduced by using Lie point symmetry to get the overdetermined equations corresponding to this Toda lattice equation, then a conditional symmetry is introduced to solve the overdetermined equations, so the similarity reduction for the Toda lattice equation is obtained, and then the new exact solutions of this Toda lattice equation are obtained.

Keywords: Toda Lattice Equation; Conditional Symmetries; Similarity Reduction; Lie Point Symmetry

一个 Toda 晶格方程的条件对称

潘　阳*，**张丽华，李德生**

沈阳师范大学数学与系统科学学院，沈阳
Email: *532335343@qq.com

收稿日期：2013 年 4 月 25 日；修回日期：2013 年 5 月 12 日；录用日期：2013 年 5 月 21 日

摘　要：本文把离散的 Lie 点对称群分析方法应用于一个非线性微分–差分 Toda 晶格方程(即 Toda-like 晶格方程)。即首先应用 Lie 点对称方法约化 Toda 晶格方程，用以得到此方程对应的超定方程，再引入一个约化条件解超定方程，从而对该 Toda 晶格方程进行了相似约化，进而得到了其新的精确解。

关键词：Toda 晶格方程；条件对称；相似约化；Lie 点对称

1. 引言

离散系统在工程技术中有广阔的应用前景，一方面是由于很多物理，化学，生物，经济等问题的数学模型本身就是离散的；另一方面，为了利用计算机对非线性系统进行数值求解时，又必须把连续系统离散化得到差分方程或微分差分方程，所以讨论离散系统的相似约化与如何求出离散系统的精确解就有很大的理论意义和广阔的应用前景。其中的 Toda 晶格系统是少数几个完全可积的离散系统模型，因此对其解的研究就显得尤为重要[1-10]。在文献[2-5]中，沈守枫，张隽，唐晓燕，Yan Z. Y.等已经通过椭圆函数，李群点对称等方法给出了晶格系统的一些精确解。本文研究的 Toda 晶格方程(即 Toda-like 晶格方程)中包括与速度有关的外力作用项，这样的方程更符合实际的物理系统。在文章[3]中，沈守枫虽然研究了 Toda-like 晶格方程的李点对称约化解，但是他并未考虑到给出一个约束条件时，Toda-like 晶格方程是否会有新的解出现这一问题，因此本文研究了一个在某一约束条件下的 Toda 晶格方程，并求出了它的一些新的解，从而更好的解决现实中的问题。

*通讯作者。

2. 一个 Toda 晶格方程的条件对称

考虑如下形式的(1+1)维 Toda 晶格方程的离散 Lie 点对称和精确解:

$$\Delta_n = u_{tt}(n) - \left(a_1 u_t^2(n) + a_2 u_t(n) + a_3\right)\left(g\left[u(n+1)-u(n)\right] - g\left[u(n)-u(n-1)\right]\right) = 0 \tag{1}$$

设该方程的对称李代数的向量场为:

$$\hat{V} = \xi(t,u(t,n))\partial_t + \phi(t,u(t,n))\partial_{u(n)} \tag{2}$$

保持方程形式不变的条件为:

$$pr^2\hat{V}\Delta_n\Big|_{\Delta_n=0} = 0 \tag{3}$$

其中:

$$\begin{aligned} pr^2\hat{V}\Delta_n &= \xi(t,u(t,n))\partial_t + \sum_{k=n-1}^{k=n+1}\phi(k,t,u(k))\partial_{u(k)} + \sum_{k=n-1}^{k=n+1}\phi^t(k,t,u(k),u_t(k))\partial_{u_t(k)} \\ &\quad + \sum_{k=n-1}^{k=n+1}\phi^{tt}(k,t,u(k),u_t(k),u_{tt}(k))\partial_{u_{tt}(k)} \end{aligned} \tag{4}$$

$$\phi^t(k,t,u(k),u_t(k))\partial_{u_t(k)} = D_t\phi(k,t,u(k)) - \left[D_t\xi(t,u(k))\right]u_t(k) \tag{5}$$

$$\phi^{tt}(k,t,u(k),u_t(k),u_{tt}(k))\partial_{u_{tt}(k)} = D_t\phi^t(k,t,u(k),u_t(k)) - \left[D_t\xi(t,u(k))\right]u_{tt}(k) \tag{6}$$

把(1)代入(4)，得到超定方程为:

$$\begin{aligned} &\phi_{tt}(n) + \left(2\phi_{tu(n)}(n) - \xi_{tt}\right)u_t(n) + \left(\phi_{u(n)u(n)} - 2\xi_{tu(n)}\right)u_t^2(n) - \xi_{u(n)u(n)}u_t^3(n) \\ &+\left(\phi_{u(n)} - 2\xi_t - 3\xi_{u(n)}u_t(n)\right)\left(a_1u_t^2(n) + a_2u_t(n) + a_3\right)\left(g\left[u(n+1)-u(n)\right] - g\left[u(n)-u(n-1)\right]\right) \\ &-\left(2a_1u_t(n) + a_2\right)\left(g\left[u(n+1)-u(n)\right] - g\left[u(n)-u(n-1)\right]\right)\left(\phi_t(n) + \phi_{u(n)}u_t(n) - \xi_t u_t(n) - \xi_{u(n)}u_t^2(n)\right) \\ &-\left(a_1u_t^2(n) + a_2u_t(n) + a_3\right)\left(a_1g^2\left[u(n+1)-u(n)\right] + a_4g\left[u(n+1)-u(n)\right] + a_5\right) \\ &+\left(a_1u_t^2(n) + a_2u_t(n) + a_3\right)\left(a_1g^2\left[u(n)-u(n-1)\right] + a_4g\left[u(n)-u(n-1)\right] + a_5\right) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

不失一般性，我们可令 $\xi = 1$，此时超定方程可化为如下形式:

$$\begin{aligned} &\phi_{tt}(n) + 2\phi_{tu(n)}(n)u_t(n) + \phi_{u(n)u(n)}u_t^2(n) \\ &+\phi_{u(n)}\left(a_1u_t^2(n) + a_2u_t(n) + a_3\right)\left(g\left[u(n+1)-u(n)\right] - g\left[u(n)-u(n-1)\right]\right) \\ &-\left(2a_1u_t(n) + a_2\right)\left(g\left[u(n+1)-u(n)\right] - g\left[u(n)-u(n-1)\right]\right)\left(\phi_t(n) + \phi_{u(n)}u_t(n)\right) \\ &-\left(a_1u_t^2(n) + a_2u_t(n) + a_3\right)\left(a_1g^2\left[u(n+1)-u(n)\right] + a_4g\left[u(n+1)-u(n)\right] + a_5\right)\left(\phi(n+1) - \phi(n)\right) \\ &+\left(a_1u_t^2(n) + a_2u_t(n) + a_3\right)\left(a_1g^2\left[u(n)-u(n-1)\right] + a_4g\left[u(n)-u(n-1)\right] + a_5\right)\left(\phi(n) - \phi(n-1)\right) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

下面考虑(1)的条件对称，我们引入条件:

$$u_t(n) = \cos t\phi(n) \tag{9}$$

将此条件代入到方程(8)中，比较系数得:

$$g^2\left[u(n+1)-u(n)\right]: -a_1\left(a_1\cos^2 t\phi^2(n) + a_2\cos t\phi(n) + a_3\right)\left(\phi(n+1) - \phi(n)\right) = 0 \tag{10}$$

$$g^2\left[u(n)-u(n-1)\right]: -a_1\left(a_1\cos^2 t\phi^2(n) + a_2\cos t\phi(n) + a_3\right)\left(\phi(n) - \phi(n-1)\right) = 0 \tag{11}$$

Copyright © 2013 Hanspub

$$\begin{aligned} g\left[u(n+1)-u(n)\right]: &\phi_{u(n)}\left(a_1\cos^2 t\phi^2(n)+a_2\cos t\phi(n)+a_3\right)\\ &-\left(2a_1\cos t\phi(n)+a_2\right)\left(\phi_t(n)+\phi_{u(n)}\cos t\phi(n)\right)\\ &-a_4\left(a_1\cos^2 t\phi^2(n)+a_2\cos t\phi(n)+a_3\right)\left(\phi(n+1)-\phi(n)\right)=0 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} g\left[u(n)-u(n-1)\right]: &-\phi_{u(n)}\left(a_1\cos^2 t\phi^2(n)+a_2\cos t\phi(n)+a_3\right)\\ &+\left(2a_1\cos t\phi(n)+a_2\right)\left(\phi_t(n)+\phi_{u(n)}\cos t\phi(n)\right)\\ &+a_4\left(a_1\cos^2 t\phi^2(n)+a_2\cos t\phi(n)+a_3\right)\left(\phi(n)-\phi(n-1)\right)=0 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \text{常数项}: &\phi_{tt}(n)+2\phi_{tu(n)}(n)cost\phi(n)+\phi_{u(n)u(n)}cos^2t\phi^2(n)\\ &-a_5\left(a_1cos^2t\phi^2(n)+a_2cost\phi(n)+a_3\right)\left(\phi(n+1)-\phi(n)\right)\\ &+a_5\left(a_1cos^2t\phi^2(n)+a_2cost\phi(n)+a_3\right)\left(\phi(n)-\phi(n-1)\right)=0 \end{aligned} \tag{14}$$

由 $g^2\left[u(n+1)-u(n)\right]$ 的系数等于 0，可知：

情况 I： $a_1=0$ 时， $g'=a_4g+a_5$ ， $a_4\neq 0$ ， $g(u)=c\exp(a_4u)-\dfrac{a_5}{a_4}$

不失一般性，考虑 $c=1, a_4=1, a_5=0$ 。 $g(u)=\exp(u)$

此时方程(1)可转化为

$$\Delta_n=u_{tt}(n)-\left(a_2u_t(n)+a_3\right)\left(\exp\left[u(n+1)-u(n)\right]-\exp\left[u(n)-u(n-1)\right]\right)=0 \tag{15}$$

此时的方程(8)转化为：

$$\begin{aligned} &\phi_{tt}(n)+2\phi_{tu(n)}(n)\cos t\phi(n)+\phi_{u(n)u(n)}\cos^2 t\phi^2(n)+\phi_{u(n)}\left(a_2\cos t\phi(n)+a_3\right)\left(\mathrm{e}^{\left[u(n+1)-u(n)\right]}-\mathrm{e}^{\left[u(n)-u(n-1)\right]}\right)\\ &-\left(\mathrm{e}^{\left[u(n+1)-u(n)\right]}-\mathrm{e}^{\left[u(n)-u(n-1)\right]}\right)\left(\phi_t(n)+\phi_{u(n)}\cos t\phi(n)\right)-\left(a_2\cos t\phi(n)+a_3\right)\mathrm{e}^{\left[u(n+1)-u(n)\right]}\left(\phi(n+1)-\phi(n)\right)\\ &+\left(a_2\cos t\phi(n)+a_3\right)\mathrm{e}^{\left[u(n)-u(n-1)\right]}\left(\phi(n)-\phi(n-1)\right)=0 \end{aligned} \tag{16}$$

比较系数：

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\left[u(n+1)-u(n)\right]}: &\phi_{u(n)}\left(a_2\cos t\phi(n)+a_3\right)-a_2\left(\phi_t(n)+\phi_{u(n)}\cos t\phi(n)\right)\\ &-\left(a_2\cos t\phi(n)+a_3\right)\left(\phi(n+1)-\phi(n)\right)=0 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\left[u(n)-u(n-1)\right]}: &-\phi_{u(n)}\left(a_2\cos t\phi(n)+a_3\right)+a_2\left(\phi_t(n)+\phi_{u(n)}\cos t\phi(n)\right)\\ &+\left(a_2\cos t\phi(n)+a_3\right)\left(\phi(n)-\phi(n-1)\right)=0 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\text{常系数}:\phi_{tt}(n)+2\phi_{tu(n)}(n)\cos t\phi(n)+\phi_{u(n)u(n)}\cos^2 t\phi^2(n)=0 \tag{19}$$

由 $\mathrm{e}^{\left[u(n+1)-u(n)\right]}$ 和 $\mathrm{e}^{\left[u(n+1)-u(n)\right]}$ 的系数为 0 可知：

$$2\phi(n)=\phi(n+1)+\phi(n-1) \tag{20}$$

即

$$\phi(n)=\alpha(t)n+\beta(t) \tag{21}$$

再由常数项的系数为 0 可知：

$$\phi_{tt}(n)=0 \tag{22}$$

得 $\alpha''(t)=0$， $\beta''(t)=0$ 。

$$\alpha(t)=C_1t+C_2,\beta(t)=C_3t+C_4,\phi(n)=(C_1t+C_2)n+(C_3t+C_4) \tag{23}$$

由 $u_t(n)=\cos t\phi(n)$ 可得 $F(n)=u(n)-\int\cos t\phi(n)\mathrm{d}t$， 于是可把方程(15)直接约化为如下的变系数的差分方程：

$$\begin{aligned}&\exp\left[F(n+1)-F(n)\right]-\exp\left[F(n)-F(n-1)\right]\\&=\exp\left(C_1t\sin t+C_1\cos t\right)\frac{-\sin t\left(\left(C_1t+C_2\right)n+\left(C_3t+C_4\right)\right)+\left(C_1n+C_2\right)\cos t}{a_2\cos t\left(\left(C_1t+C_2\right)n+\left(C_3t+C_4\right)\right)+a_3}\end{aligned} \tag{24}$$

于是：

$$F(n)=\sum_{i=2}^{n-1}\left(\ln\left(\exp\left[F(2)-F(1)\right]\right)+\exp\left(C_1t\sin t+C_1\cos t\right)\sum_{i=2}^{j+1}\frac{-\sin t\left(\left(C_1t+C_2\right)k+\left(C_3t+C_4\right)\right)+\left(C_1k+C_2\right)\cos t}{a_2\cos t\left(\left(C_1t+C_2\right)k+\left(C_3t+C_4\right)\right)+a_3}\right) \tag{25}$$

$$\begin{aligned}u(n)&=\left(\left(C_1t+C_2\right)n+\left(C_3t+C_4\right)\right)\sin t+\left(C_1n+C_3\right)\cos t\\&+\sum_{i=2}^{n-1}\left(\ln\left(\exp\left[F(2)-F(1)\right]\right)+\exp\left(C_1t\sin t+C_1\cos t\right)\sum_{i=2}^{j+1}\frac{-\sin t\left(\left(C_1t+C_2\right)k+\left(C_3t+C_4\right)\right)+\left(C_1k+C_2\right)\cos t}{a_2\cos t\left(\left(C_1t+C_2\right)k+\left(C_3t+C_4\right)\right)+a_3}\right)\end{aligned} \tag{26}$$

在这里 C_1,C_2,C_3,C_4 都是自由变量。

情形Ⅱ： $a_1\neq 0$， $\phi(n+1)=\phi(n)$， 此时， $\phi(n)=C_1(t)$， 将其代入到 $g\left[u(n+1)-u(n)\right]$ 中可得 $\phi_t(n)=0$， $\phi(n)=C_1t+C_2$

$$F(n)=u(n)-\int\cos t\phi(n)\mathrm{d}t=u(n)-C_1(t\sin t+\cos t)-C_2\sin t \tag{27}$$

就可把方程(1)约化直接约化为如下的变系数的差分方程：

$$g\left[F(n+1)-F(n)\right]-g\left[F(n)-F(n-1)\right]=\frac{-\sin t\left(C_1t+C_2\right)+C_1\cos t}{a_1\cos^2 t\left(C_1t+C_2\right)^2+a_2\cos t\left(C_1t+C_2\right)+a_3} \tag{28}$$

在这里 C_1,C_2 都是自由变量。

情形Ⅲ： $a_1\neq 0$， $\phi(n+1)\neq\phi(n)$， $a_1\cos^2 t\phi^2(n)+a_2\cos t\phi(n)+a_3=0$

经验证在这种情况下满足方程组(10)~(14)的 $F(n)$ 是不存在。

3. 结语

在本文中我们通过引入一个条件对称得到了一个 Toda 晶格方程新的精确解，这个新的精确解是具有正余弦形式，接下来我们将要对(2 + 1)维 Toda 晶格方程的条件对称进行讨论。

参考文献 (References)

[1] 范兴华. 离散非线性微分－差分晶格系统的孤立波和局域模分析[D]. 江苏大学, 2007.

[2] 张隽, 潘祖梁. 非齐次 Toda 晶格的对称, 精确解和可积性[J]. 高校应用数学学报 A 辑, 2002, 17(2): 140-144.

[3] 沈守枫. 非线性系统若干问题研究[D].浙江大学, 2005.

[4] 张隽, 潘祖梁. 几类非线性差分方程的对称和精确解[J]. 高校应用数学学报 A 辑, 2001, 16(2): 143-146.

[5] 唐晓艳. 2 + 1 维非线性系统的局域激发和对称性研究[D]. 上海交通大学, 2004.

[6] D. Leivi, O. Ragnisco. The inhomogeneous Toda lattice: Its hierarchy and Darboux-Bäcklund transformation. Journal of Physics A: Mathe-

 Copyright © 2013 Hanspub

matical and General, 1991, 24(8): 1729-1740.

[7] P. J. Olver. Applications of Lie groups to differential equations. New York: Springer, 1986.

[8] D. Levi, P. WintIerniz. Continuous symmetries of discrete equations. Physics Letters A, 1991, 152(7): 335-338.

[9] D. Levi, P. WintIerniz. Symmetries and conditional symmetries of differential-difference equations. Journal of Mathematical Physics, 1993, 34(8): 3713-3730.

[10] Z. H. Jiang. Lie symmetries and their local determinacy for a class of differential-difference equations. Physics Letters A, 1998, 240(3): 137-143.