Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2013, 2, 165-170
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2013.24022 Published Online November 2013 (http://www.hanspub.org/journal/aam.html)

The Solitary Loop Wave Solution of a CH-KP Equation

Dexiang Zhao

Xinping Second Middle School, Yuxi
Email: xshaml@yxnu.net

Received: Aug. 12th, 2013; revised: Sep. 6th, 2013; accepted: Sep. 19th, 2013

Copyright © 2013 Dexiang Zhao. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: The solitary loop wave of a CH-DK equation is investigated by using the dynamical system theory. The existence conditions of solitary loop wave are found and the explicit parametric function expressions of solitary loop wave are given in this article.

Keywords: CH-KP Equation; Travelling Wave Equation; Equilibrium Point; Solitary Loop Wave

一个 CH-KP 方程的孤立圈波

赵德祥

新平第二中学，玉溪市
Email: xshaml@yxnu.net

收稿日期：2013 年 8 月 12 日；修回日期：2013 年 9 月 6 日；录用日期：2013 年 9 月 19 日

摘　要：用微分方程动力系统方法研究一个 CH-KP 方程发现 CH-KP 方程存在孤立圈波。给出了孤立圈波的存在条件，得到了孤立圈波的精确参数函数表达式。

关键词：CH-KP 方程；行波方程；平衡点；孤立圈波

1. 引言

文献[1]研究了 CH-KP 方程的行波结构及性质。

$$\left[u_t+2ku_x-\left(u^m\right)_{xxt}-au^nu_x\right]_x+u_{yy}=0 \tag{1}$$

在一些特定的条件下，文献[1]给出了方程(1)的一些光滑和非光滑行波解。文献[2]用拟孤立波方法得到了方程(1)的 1-孤立波解。对任意 m、n，计算方程(1)的行波很困难，因此在 $m=2$、$n=1$，和 $a<0$ 的条件下，本文用动力系统分支方法[1,3,4]研究方程(1)，发现方程(1)存在孤立圈波，并计算出孤立圈波的精确参数形式解。

2. 行波方程

$m=2,n=1$ 时，方程(1)可写为

$$\left[u_t+2ku_x-\left(u^2\right)_{xxt}-auu_x\right]_x+u_{yy}=0 \tag{2}$$

作变换 $u(x,y,t)=\varphi(\xi)$、$\xi=x+y-ct$，方程(2)变为

$$\left[\left(2k-c\right)\varphi'+c\left(\varphi^2\right)'''-a\varphi\varphi'\right]'+\varphi''=0 \tag{3}$$

对方程(3)积分两次，第一次积分取 0 为积分常数，第二次积分以 g 为积分常数，得行波方程

$$\left(2k-c+1\right)\varphi-\frac{a}{2}\varphi^2+c\left(\varphi^2\right)''=g \tag{4}$$

设 $\varphi'=z$，方程(4)变为 2 维平面系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}=z\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}=\dfrac{\dfrac{a}{2}\varphi^2-\left(2k-c+1\right)\varphi+g-2cz^2}{2c\varphi}\end{cases} \tag{5}$$

令

$$\mathrm{d}\xi=2c\varphi\mathrm{d}\tau \tag{6}$$

系统(6)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}=2c\varphi z\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}=\dfrac{a}{2}\varphi^2-\left(2k-c+1\right)\varphi+g-2cz^2\end{cases} \tag{7}$$

明显地，系统(5)和(7)有同样的首次积分

$$H\left(\varphi,z\right)=2c\varphi^2z^2-\frac{a}{4}\varphi^4+\frac{2\left(2k-c+1\right)}{3}\varphi^3-g\varphi^2=h \tag{8}$$

设

$$g_1=\frac{\left(2k-c+1\right)^2}{2a} \tag{9}$$

$$g_2=\frac{4\left(2k-c+1\right)^2}{9a} \tag{10}$$

$$\varphi_\pm=\frac{2k-c+1\pm\sqrt{\left(2k-c+1\right)^2-2ag}}{a},g>g_1\left(c\right) \tag{11}$$

根据平面微分方程动力系统关于平衡点的结论知系统(7)的平衡点有下列性质：

1) $gc>0$ 时，$\left(0,\pm\sqrt{\dfrac{g}{2c}}\right)$ 是 2 个鞍点；

2) $g=g_1$ 时，$\left(\dfrac{2k-c+1}{a},0\right)$ 是 1 个尖点；

3) $g>0,c>0$ 时，$\left(\varphi_-,0\right)$ 和 $\left(\varphi_+,0\right)$ 是 2 个中心点；

4) $\mathrm{g}>0,c<0$ 时，$\left(\varphi_-,0\right)$ 和 $\left(\varphi_+,0\right)$ 是 2 个鞍点；

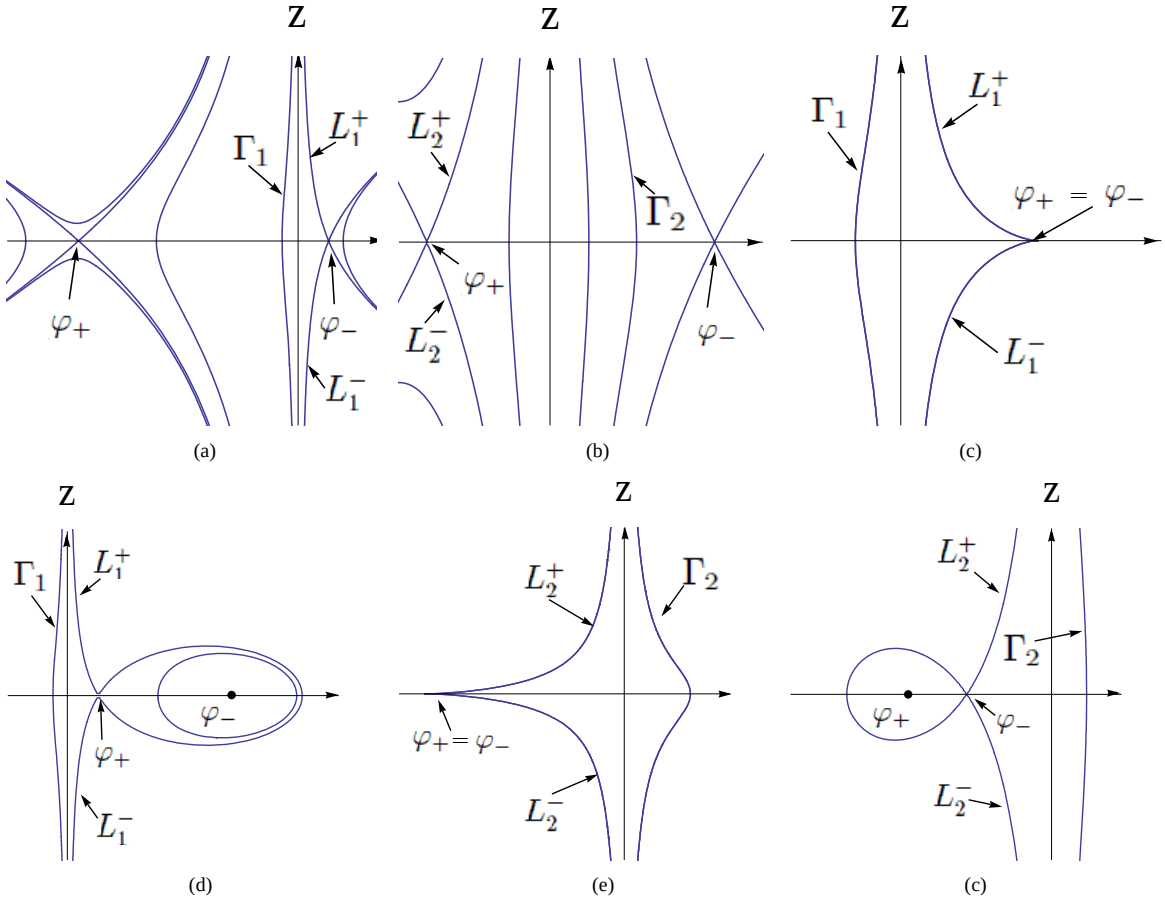
5) $g_1<g<0,c<0,2k-c+1>0$ 时，$\left(\varphi_-,0\right)$ 是 1 个中心点，$\left(\varphi_+,0\right)$ 是 1 个鞍点；

6) $g_1<g<0,c<0,2k-c+1<0$ 时，$\left(\varphi_-,0\right)$ 1 个鞍点，$\left(\varphi_+,0\right)$ 是 1 个中心点；

7) $g_1<g<0,c>0,2k-c+1>0$ 时，$\left(\varphi_-,0\right)$ 是 1 个鞍点，$\left(\varphi_+,0\right)$ 是 1 个中心点；

8) $g_1 < g < 0, c > 0, 2k - c + 1 < 0$ 时，$(\varphi_-, 0)$ 是 1 个中心点，$(\varphi_+, 0)$ 是 1 个鞍点。

基于上面的结论，在一些特定条件下，可画出系统(5)和(7)的一些相图(图 1)。



(a) $g > 0$ 时，$k \le -\frac{1}{2}, c < 2k+1$ 或 $k > -\frac{1}{2}, c < 0$；(b) $k < -\frac{1}{2}, 2k+1 < c < 0, g > 0$；(c) $g = g_1$ 时，$k > -\frac{1}{2}, c > 2k+1$ 或 $k \le -\frac{1}{2}, c > 0$；

(d) $g_1 < g < 0$ 时，$k > -\frac{1}{2}, c > 2k+1$ 或 $k \le -\frac{1}{2}, c > 0$；(e) $k > -\frac{1}{2}, 0 < c < 2k+1$，$g = g_1$；(f) $k > -\frac{1}{2}, 0 < c < 2k+1$，$g_1 < g < 0$

Figure 1. The bifurcation phase portraits of systems (5) and (6)
图 1. 系统(5)和(6)的相图分支

3. 孤立圈波解

下面的 5 个命题给出了 5 个孤立圈波的参数形式解。

命题 1：如果满足 $g > 0$ 时，$k \le -\frac{1}{2}, c < 2k+1$ 或 $k > -\frac{1}{2}, c < 0$，则方程(2)存在一个孤立圈波。且此孤立圈波的参数解为

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_- - \dfrac{2(\varphi_- - \varphi_1)(\varphi_- - \varphi_2)}{2\varphi_- - \varphi_1 - \varphi_2 + (\varphi_2 - \varphi_1)\cosh w} \\ \xi = \sqrt{\dfrac{8c}{a(\varphi_- - \varphi_1)(\varphi_- - \varphi_2)}}\left[\varphi_- w - 2\sqrt{(\varphi_- - \varphi_1)(\varphi_- - \varphi_2)}\tanh^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{\varphi_- - \varphi_2}{\varphi_- - \varphi_1}}\tanh\dfrac{w}{2}\right)\right] \end{cases} \tag{12}$$

其中 $w = \sqrt{\dfrac{ac(\varphi_- - \varphi_1)(\varphi_- - \varphi_2)}{2}}\tau$ 是参变量。

命题 2： 如果 $k<-\frac{1}{2},2k+1<c<0,g>0$，则方程(2)存在一个孤立圈波。且此孤立圈波的参数解为

$$\begin{cases}\varphi=\varphi_{+}+\dfrac{2(\varphi_1-\varphi_{+})(\varphi_2-\varphi_{+})}{\varphi_1+\varphi_2-2\varphi_{+}+(\varphi_2-\varphi_1)\cosh w}\\ \xi=\sqrt{\dfrac{8c}{a(\varphi_1-\varphi_{+})(\varphi_2-\varphi_{+})}}\left[\varphi_{+}w+2\sqrt{(\varphi_1-\varphi_{+})(\varphi_2-\varphi_{+})}\tanh^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{\varphi_1-\varphi_{+}}{\varphi_2-\varphi_{+}}}\tanh\dfrac{w}{2}\right)\right]\end{cases}\tag{13}$$

其中 $w=\sqrt{\dfrac{ac(\varphi_1-\varphi_{+})(\varphi_2-\varphi_{+})}{2}}\tau$ 参变量。

命题 3： 如果满足 $g=g_1$ 时，$k>-\frac{1}{2},c>0,c\neq 2k+1$ 或 $k\le-\frac{1}{2},c>0$；记 $\varphi_0=\dfrac{2k-c+1}{a}$，则方程(2)存在一个孤立圈波。且此孤立圈波的参数解为

$$\begin{cases}\varphi=\varphi_0-\dfrac{4(\varphi_0-\varphi_1)}{4+(\varphi_0-\varphi_1)^2w^2}\\ \xi=\sqrt{-\dfrac{8c}{a}}\left[-\varphi_0w+2\arctan\left(\dfrac{\varphi_0-\varphi_1}{2}w\right)\right]\end{cases}\tag{14}$$

其中 $w=\sqrt{-\dfrac{ac}{2}}\tau$ 是参变量。

命题 4： 如果满足 $g_1<g<0$ 时，$k>-\frac{1}{2},c>2k+1$ 或 $k\le-\frac{1}{2},c>0$，则方程(2)存在一个孤立圈波。且此孤立圈波的参数解为

$$\begin{cases}\varphi=\varphi_{+}-\dfrac{2(\varphi_{+}-\varphi_1)(\varphi_2-\varphi_{+})}{\varphi_1+\varphi_2-2\varphi_{+}+(\varphi_2-\varphi_1)\cosh w}\\ \xi=-\sqrt{\dfrac{-8c}{a(\varphi_{+}-\varphi_1)(\varphi_2-\varphi_{+})}}\left[\varphi_{+}w-2\sqrt{(\varphi_{+}-\varphi_1)(\varphi_2-\varphi_{+})}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{\varphi_{+}-\varphi_1}{\varphi_2-\varphi_{+}}}\tanh\dfrac{w}{2}\right)\right]\end{cases}\tag{15}$$

其中 $w=\sqrt{-\dfrac{ac(\varphi_{+}-\varphi_1)(\varphi_2-\varphi_{+})}{2}}\tau$ 是参变量。

命题 5： 如果 $k>-\frac{1}{2},0<c<2k+1$，$g_1<g<0$，则方程(2)存在一个孤立圈波。且此孤立圈波的参数解为

$$\begin{cases}\varphi=\varphi_{-}-\dfrac{2(\varphi_{-}-\varphi_1)(\varphi_2-\varphi_{-})}{\varphi_1+\varphi_2-2\varphi_{-}+(\varphi_2-\varphi_1)\cosh w}\\ \xi=\sqrt{\dfrac{-8c}{a(\varphi_{-}-\varphi_1)(\varphi_2-\varphi_{-})}}\left[-\varphi_{-}w+2\sqrt{(\varphi_{-}-\varphi_1)(\varphi_2-\varphi_{-})}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{\varphi_{-}-\varphi_1}{\varphi_2-\varphi_{-}}}\tanh\dfrac{w}{2}\right)\right]\end{cases}\tag{16}$$

其中 $w=\sqrt{-\dfrac{ac(\varphi_{-}-\varphi_1)(\varphi_2-\varphi_{-})}{2}}\tau$ 是参变量。

证明：只证命题 1 和命题 2，其余 3 个命题有类似的证明。

命题 1 的证明，如果满足 $g>0$ 时，$k\le-\frac{1}{2},c<2k+1$ 或 $k>-\frac{1}{2},c<0$，则过 $(\varphi_{-},0)$ 的异宿轨线 L_1^{+}、L_1^{-} 和开轨线 Γ_1 等势，且在渐近线两侧(看图 1(a))，所以方程(2)有一个孤立圈波。根据(8)式，L_1^{+}、L_1^{-} 和 Γ_1 由方程 $H(\varphi,z)=H(\varphi_{-},0)$ 所确定。于是

$$z=\pm\sqrt{\frac{\frac{a}{4}(\varphi-\varphi_{-})^2(\varphi-\varphi_1)(\varphi-\varphi_2)}{2c\varphi^2}}\tag{17}$$

其中 $\varphi_1<\varphi_2<\varphi_{-}$。

把(17)代入系统(7)的第一个方程，沿 L_1^+ 、 L_1^- 和 Γ_1 积分，得

$$\varphi=\varphi_- -\frac{2(\varphi_- -\varphi_1)(\varphi_- -\varphi_2)}{2\varphi_- -\varphi_1-\varphi_2+(\varphi_2-\varphi_1)\cosh w} \tag{18}$$

其中 $w=\sqrt{\frac{ac(\varphi_- -\varphi_1)(\varphi_- -\varphi_2)}{2}}\tau$ 是参变量。

把(18)代入系统(6)积分，得

$$\xi=\sqrt{\frac{8c}{a(\varphi_- -\varphi_1)(\varphi_- -\varphi_2)}}\left[\varphi_- w-2\sqrt{(\varphi_- -\varphi_1)(\varphi_- -\varphi_2)}\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{\varphi_- -\varphi_2}{\varphi_- -\varphi_1}}\tanh\frac{w}{2}\right)\right] \tag{19}$$

结合(18)和(19)，即得孤立圈波解(12)。

命题 2 的证明，在满足 $k<-\frac{1}{2},2k+1<c<0,g>0$ 时，过 $(\varphi_+,0)$ 的异宿轨线 L_2^+ 、 L_2^- 和开轨线 Γ_2 等势，且在渐近线两侧(看图 1(b))，所以方程(2)有一个孤立圈波。根据(8)式， L_2^+ 、 L_2^- 和 Γ_2 由方程 $H(\varphi,z)=H(\varphi_+,0)$ 所确定。于是

$$z=\pm\sqrt{\frac{\frac{a}{4}(\varphi-\varphi_+)^2(\varphi-\varphi_1)(\varphi-\varphi_2)}{2c\varphi^2}} \tag{20}$$

其中 $\varphi_+<\varphi_1<\varphi_2$ 。

把(20)代入系统(7)的第一个方程，沿 L_2^+ 、 L_2^- 和 Γ_2 积分，得

$$\varphi=\varphi_+ +\frac{2(\varphi_1-\varphi_+)(\varphi_2-\varphi_+)}{\varphi_1+\varphi_2-2\varphi_+ +(\varphi_2-\varphi_1)\cosh w} \tag{21}$$

其中 $w=\sqrt{\frac{ac(\varphi_1-\varphi_+)(\varphi_2-\varphi_+)}{2}}\tau$ 是参变量。

把(21)代入系统(6)积分，得

$$\xi=\sqrt{\frac{8c}{a(\varphi_1-\varphi_+)(\varphi_2-\varphi_+)}}\left[\varphi_+ w+2\sqrt{(\varphi_1-\varphi_+)(\varphi_2-\varphi_+)}\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{\varphi_1-\varphi_+}{\varphi_2-\varphi_+}}\tanh\frac{w}{2}\right)\right] \tag{22}$$

结合(21)和(22)，即得孤立圈波解(13)。

依据(12)和(13)，用 Mathematica 7.0 可画出两个孤立圈波的平面图图 2。

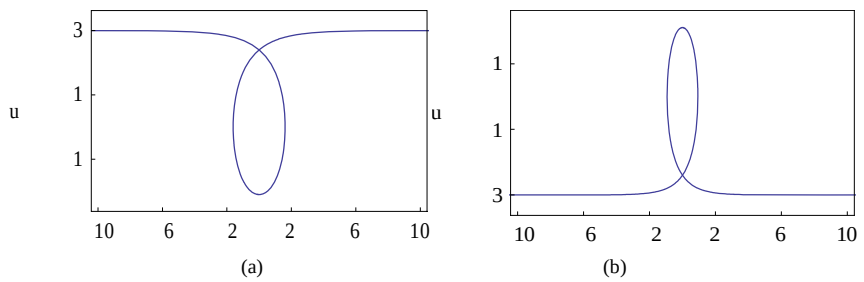


Figure 2. The solitary loop waves of Equation (2) with $a=-1,k=-1$ and $g=6$; (a) $c=-1.5$; (b) $c=-0.5$

图 2. $a=-1,k=-1$ ， $g=6$ 时，方程(2)的孤立圈波平面模拟图；(a) $c=-1.5$ ；(b) $c=-0.5$

4. 结论

在 $a<0$ 的条件下，本文用微分方程动力系统方法研究一个 CH-KP 方程。找到了孤立圈波的存在条件。计

算出了孤立圈波的精确参数函数表达式。用 Mathematica 7.0 模拟出了两个孤立圈波的平面图(看图 2)，这些结果丰富了 CH-KP 方程的研究内容。

5. 致谢

感谢谢绍龙教授在本文写作中所提的宝贵意见。

参考文献 (References)

[1] Zhang, K.L., Tang, S.Q. and Wang, Z.J. (2010) Bifurcation of travelling wave solutions for the generalized Camassa-Holm-KP equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **15**, 564-572.

[2] Biswas, A. (2009) 1-Soliton solution of the generalized Camassa-Holm Kadomtsev-Petviashvili equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14**, 2524-2527.

[3] 谢绍龙, 洪晓春 (2009) Reduced Ostrovsky 方程的周期圈波解. *湖南师范大学自然科学学报*, **32**, 3-16.

[4] Xie, S.L. and Wang, L. (2010) Compacton and generalized kink wave solutions of the CH-DP equation. *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 4028-4039.