Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2013, 2, 191-193
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2013.24026 Published Online November 2013 (http://www.hanspub.org/journal/aam.html)

Symmetries of the Discrete Nonlinear Klein-Gordon Equation

Yang Pan[1], Lihua Zhang[1], Desheng Li[1], Shufeng Pan[2]

[1]School of Mathematics and System Science, Shenyang Normal University, Shenyang
[2]The Second Central Primary School of Yangdachengzi Town of Gongzhuling, Gongzhuling City

Email: 532335343@qq.com

Received: Sep. 9th, 2013; revised: Oct. 2nd, 2013; accepted: Oct. 12th, 2013

Abstract: In this paper, the discrete Lie point symmetry group analysis method is applied on the discrete nonlinear Klein-Gordon equation. Since this equation is not easy to be reduced by Lie point symmetry method, firstly, this paper introduces a similarity transformation to change this equation into a new equation which can be reduced easily by Lie point symmetry method. Then the new equation is reduced by Lie point symmetry method and its invariant solutions are obtained. Finally, the solutions of the primal discrete nonlinear Klein-Gordon equation are acquired by the similarity transformation again.

Keywords: Klein-Gordon Equation; Similarity Transformation; Invariant Solution

非线性离散的 Klein-Gordon 方程的对称约化

潘　阳[1]，张丽华[1]，李德生[1]，潘树丰[2]

[1]沈阳师范大学数学与系统科学学院，沈阳
[2]吉林省公主岭市杨大城子镇第二中心小学，公主岭市
Email: 532335343@qq.com

收稿日期：2013 年 9 月 9 日；修回日期：2013 年 10 月 2 日；录用日期：2013 年 10 月 12 日

摘　要：本文把离散的 Lie 点对称群分析方法应用于非线性离散的 Klein-Gordon 方程。由于该方程不易应用李点对称进行约化，所以本文首先引入一个相似变换将其转化为易被李点对称约化的新方程，然后用李点对称方法约化新方程得到其不变解，最后再通过相似变换得到原非线性离散的 Klein-Gordon 方程的解。

关键词：Klein-Gordon 方程；相似变换；不变解

1. 引言

非线性离散的 Klein-Gordon 方程可以写成

$$u_{tt}(n)=g(u(n))\big(u(n+1)+u(n-1)-2su(n)\big) \tag{1}$$

其中的非常数函数(区别于调和影射和线性耗散的标准模型) $g(u(n))$ 保证了该模型所描述的现象中非线性耗散现象的出现。在文献[1]中，Kevrekidis 等给出了该方程的 Compaction 解的精确形式，并进一步证明了该方程的这种类型的解没有行波性质；在文献[2]中，Dinda 和 Remoissenet 研究了非线性 Klein-Gordon 系统的呼吸

Compactons 解，在此基础上，宗智等人研究了该方程的双行波解[3]以及 A. M. Wazwaz 和 Y. Zheng、S. Lai 研究了 Klein-Gordon 方程的几个精确的行波解[4,5]。本文通过应用经典的李点对称方法来求出非线性 Klein-Gordon 方程的新的解。

2. 非线性离散的 Klein-Gordon 方程的求解

本文只对当(1)中的 $g\left(u(n)\right)=-u^2(n)$ 时的非线性离散的 Klein-Gordon 方程：

$$\Delta_n=u_{tt}(n)+u^2(n)\left(u(n+1)+u(n-1)-2su(n)\right)=0 \tag{2}$$

进行讨论，为此引入相似变换 $u(n)=\mathrm{e}^{v(n)}$，将其代入方程(2)中，于是方程(2)转化为如下形式的新方程：

$$\Delta_n=v_{tt}(n)+v_t^2(n)+\mathrm{e}^{v(n)+v(n+1)}+\mathrm{e}^{v(n)+v(n-1)}-2s\mathrm{e}^{2v(n)}=0 \tag{3}$$

设方程(3)的对称李代数的向量场为：

$$\hat{V}=\xi\left(t,v(n)\right)\partial_t+\phi\left(t,v(n)\right)\partial_{v(n)} \tag{4}$$

那么保持该方程形式不变的条件为：

$$pr^2\hat{V}\Delta_n\Big|_{\Delta_n=0}=0 \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned}pr^2\hat{V}\Delta_n=&\,\xi\left(t,v(n)\right)\partial_t+\sum_{k=n-1}^{k=n+1}\phi\left(k,t,v(k)\right)\partial_{v(k)}+\sum_{k=n-1}^{k=n+1}\phi^t\left(k,t,v(k),v_t(k)\right)\partial_{v_t(k)}\\&+\sum_{k=n-1}^{k=n+1}\phi^{tt}\left(k,t,v(k),v_t(k),v_{tt}(k)\right)\partial_{v_{tt}(k)}\end{aligned} \tag{6}$$

$$\phi^t\left(k,t,v(k),v_t(k)\right)\partial_{v_t(k)}=D_t\phi\left(k,t,v(k)\right)-\left[D_t\xi\left(t,v(k)\right)\right]v_t(k) \tag{7}$$

$$\phi^{tt}\left(k,t,v(k),v_t(k),v_{tt}(k)\right)\partial_{v_{tt}(k)}=D_t\phi^t\left(k,t,v(k),v_t(k)\right)-\left[D_t\xi\left(t,v(k)\right)\right]v_{tt}(k) \tag{8}$$

把(3)代入(5)，得到(3)的超定方程为：

$$\begin{aligned}&\phi_{tt}(n)+\left(2\phi_{tv(n)}(n)-\xi_{tt}\right)v_t(n)+\left(\phi_{v(n)v(n)}-2\xi_{tv(n)}\right)v_t^2(n)-\xi_{v(n)v(n)}v_t^3(n)\\&+\left(\phi_{v(n)}-2\xi_t-3\xi_{v(n)}v_t(n)\right)\left(-v_t^2(n)-\mathrm{e}^{v(n)+v(n+1)}-\mathrm{e}^{v(n)+v(n-1)}+2s\mathrm{e}^{2v(n)}\right)\\&+2v_t(n)\left[\phi_t+\left(\phi_{v(n)}-\xi_t\right)v_t(n)-\xi_{v(n)}v_t^2(n)\right]+\phi(n+1)\mathrm{e}^{v(n)+v(n+1)}\\&+\phi(n-1)\mathrm{e}^{v(n)+v(n-1)}+\phi(n)\left(\mathrm{e}^{v(n)+v(n+1)}+\mathrm{e}^{v(n)+v(n-1)}-4s\mathrm{e}^{2v(n)}\right)=0\end{aligned} \tag{9}$$

比较 $v_t^k(n)$，$k=0,1,2,3$ 的系数，得到如下方程组：

$$v_t^0(n):\quad \begin{aligned}&\phi_{tt}(n)+\left(\phi_{v(n)}-2\xi_t\right)\left(-\mathrm{e}^{v(n)+v(n+1)}-\mathrm{e}^{v(n)+v(n-1)}+2s\mathrm{e}^{2v(n)}\right)+\phi(n+1)\mathrm{e}^{v(n)+v(n+1)}\\&+\phi(n-1)\mathrm{e}^{v(n)+v(n-1)}+\phi(n)\left(\mathrm{e}^{v(n)+v(n+1)}+\mathrm{e}^{v(n)+v(n-1)}-4s\mathrm{e}^{2v(n)}\right)=0\end{aligned} \tag{10}$$

$$v_t(n):\quad 2\phi_{tv(n)}(n)-\xi_{tt}-3\xi_{v(n)}\left(-\mathrm{e}^{v(n)+v(n+1)}-\mathrm{e}^{v(n)+v(n-1)}+2s\mathrm{e}^{2v(n)}\right)+2\phi_t=0 \tag{11}$$

$$v_t^2(n):\quad \phi_{v(n)v(n)}-2\xi_{tv(n)}+\phi_{v(n)}=0 \tag{12}$$

$$v_t^3(n):\quad \xi_{v(n)v(n)}-\xi_{v(n)}=0 \tag{13}$$

由方程(13)，可以得到$\xi_{v(n)}=0$，进而得到$\xi=\xi(t)$，此时可以简化方程(12)为$\phi_{v(n)v(n)}+\phi_{v(n)}=0$，同理也可以得到$\phi_{v(n)}=0$，进而方程(10)和方程(11)的可以转化如下简单形式：

$$\begin{aligned}&\phi_{tt}(n)-2\xi_t\left(-\mathrm{e}^{v(n)+v(n+1)}-\mathrm{e}^{v(n)+v(n-1)}+2s\mathrm{e}^{2v(n)}\right)+\phi(n+1)\mathrm{e}^{v(n)+v(n+1)}\\&+\phi(n-1)\mathrm{e}^{v(n)+v(n-1)}+\phi(n)\left(\mathrm{e}^{v(n)+v(n+1)}+\mathrm{e}^{v(n)+v(n-1)}-4s\mathrm{e}^{2v(n)}\right)=0\end{aligned} \tag{14}$$

$$2\phi_t-\xi_{tt}=0 \tag{15}$$

由方程(14)可以得到如下方程组：

$$\mathrm{e}^{v(n)+v(n+1)}\text{：}\ 2\xi_t+\phi(n+1)+\phi(n)=0$$

$$\mathrm{e}^{v(n)+v(n-1)}\text{：}\ 2\xi_t+\phi(n-1)+\phi(n)=0$$

$$\mathrm{e}^{2v(n)}\text{：}\ s\left(\xi_t+\phi(n)\right)=0$$

由该方程组得$\phi(n-1)=\phi(n)$和$\xi_t+\phi(n)=0$，所以$\phi=\phi(t)$，从而方程组(10)~(13)等价于下面的方程组：

$$\xi=\xi(t)\text{，}\ \phi=\phi(t)\text{，}\ 2\phi_t-\xi_{tt}=0\text{，}\ \xi_t+\phi(n)=0$$

解这个方程组，可以得到$\xi=-c_1t+c_2$，$\phi=c_1$(其中c_1，c_2是任意常数)。

对算子$\hat{V}=(-c_1t+c_2)\partial_t+c_1\partial_{v(n)}$进行首次积分得：

$$v(n)=-\ln(-c_1t+c_2)$$

因为$v(n)=-\ln(-c_1t+c_2)$是方程(3)的不变解，所以代入方程(3)，就会保持方程(3)形式不变，于是可以得到：

$$s=1+c_1^2$$

进而通过相似变换$u(n)=\mathrm{e}^{v(n)}$可以得到 Klein-Gordon 方程的解：

$$u(n)=\frac{1}{-c_1t+c_2}\text{，}\ (s=1+c_1^2\text{，}\ c_1\text{，}\ c_2\text{是任意常数})\text{。}$$

3. 结语

在本文中我们通过使用一个相似变换把原来的不易使用李点对称约化的非线性离散的 Klein-Gordon 方程转化成了可以使用李点对称约化方法约化的非线性离散方程。通过对新的非线性离散方程的李点对称约化，得到了其不变解，进而也得到了原非线性离散的 Klein-Gordon 方程的一些新的解，扩充了 Klein-Gordon 方程的解的范围，使其能够更好的解决实际问题。

参考文献 (References)

[1] Kevrekidis, P.G., Rasmussen, K.O. and Bishop, A.R. (2001) The discrete nonlinear equation: a survey of recent results. *International Journal of Modern Physics B*, **15**, 2833-2900.

[2] Dinda, P. and Remoissenet, M. (1999) Breather compactons in nonlinear Klein-Gordon systems. *Physical Review E*, **60**, 6218-6221.

[3] 宗智, 邹丽, 王振 (2011) 孤立水波的解析方法. 科学出版社, 北京.

[4] Wazwaz, A.M. (2006) Compactons, solitons and periodic solutions for some forms of nonlinear Klein-Gordon equations. *Chaos, Solutions and Fractals*, **28**, 1005-1013.

[5] Zheng, Y. and Lai, S. (2009) A study on three types of Nonlinear Klein-Gordon equations. Dynamics of Continuous, *Discrete and Impulsive Systems Series B*: *Applications and Algorithms*, **16**, 271-279.