

Upper Bound for the Number of Vertices of Color-Critical Graphs on Surfaces

Qingqing Li, Fugang Chao, Weihua Lu, Han Ren

Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai
Email: chaofugang@126.com, hren@math.ecnu.edu.cn

Received: Mar. 18th, 2014; revised: Apr. 16th, 2014; accepted: Apr. 22nd, 2014

Copyright © 2014 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

Dirac observed that, for each fixed surface and each natural number $k \geq 8$, there are only finitely many k -color-critical graphs on S . Mohar and Thomassen proved that for a surface S of genus $g \geq 2$, every 7-color-critical graph on S has less than $138(g - 1)$ vertices. Using Euler formula and the critical-graphs methods of Gallai, we improve this result and give a simple proof that the number of 7-color-critical graphs is finite. We also give unified expression for an upper bound of vertices of k -color-critical graphs ($k \geq 7$) on surfaces.

Keywords

Embedding, Genus, Coloring, Color-Critical Graph

曲面上色临界图点数的上界

李青青, 晁福刚, 路伟华, 任 韩

华东师范大学数学系, 上海

Email: chaofugang@126.com, hren@math.ecnu.edu.cn

收稿日期: 2014年3月18日; 修回日期: 2014年4月16日; 录用日期: 2014年4月22日

摘 要

Dirac观察到: 对每个固定的曲面 S 和每个固定的自然数 $k \geq 8$, 曲面 S 上仅有有限多个 k -色临界图。Mohar

和Thomassen证明了：对于亏格 $g \geq 2$ 的曲面 S ，曲面 S 上的7-色临界图的点数少于 $138(g-1)$ 。我们借助于Euler公式和Gallai所发展起来的研究色临界图的方法，改进了这个结果，给出了曲面 S 上的7-色临界图的个数是有限的的一个比较简洁的证明。除此以外，我们还给出曲面 S 上的每一个 k -色临界图($k \geq 7$)的点数上界的一个统一的表达式。

关键词

嵌入，亏格，着色，色临界图

1. 引言

图 G 是由有限的点集 $V(G)$ 和称之为边的无序的点对的集合 $E(G)$ 构成。如果边 xy 表现，我们称 x 和 y 相邻或者相连， x 和 y 是邻点。点 x 的度是指其邻点的数目，记作 $d(x)$ 。如果所有的点的度数都是 r ，那么 G 是 r -正则的。如果 H 是 G 的一个子图，称 $G(H)$ 是 H 的诱导子图，它是由 H 及 G 中连接 H 的两个点的所有边组成。我们定义 $G-H = G(V(G)-V(H))$ 。如果 v 是图 G 中的一个点，那么 $N(v)$ 是 G 的由 v 的邻点诱导的子图。 K_n 是 n 个点的完全图；也就是说， K_n 的所有点的度数都是 $n-1$ 。

曲面 S 是一个没有边界的、紧的、连通的2-维流形。曲面分类定理告诉我们：每个曲面或者同胚于 S_g ，添加了 g 个手柄的球，或者同胚于 N_k ，添加了 k 个叉帽的球。这个定理是由Möbius[1]和Jordan[2]最早提出的。Thomassen[3]给出了它的一个简单而又严格的证明。令 S_g 和 N_k 表示亏格为 g (或叉帽数为 k)的可定向(或不可定向)曲面。一个图 G 的亏格 $g(G)$ (或不可定向亏格 G)，也称叉帽数)是最小的整数 g (或 k)，使得 G ，可以嵌入到 S_g (或 N_k)上，且边为两两不交的简单闭曲线。 G 在 $S_{g(G)}$ 上的嵌入总是2-胞腔嵌入(见[3])。当 $S = S_g$ 时，曲面 S 的Euler亏格为 $\gamma = 2g$ ，当 $S = N_k$ 时，曲面 S 的Euler亏格为 $\gamma = k$ 。特别地， $S_0 = N_0$ 是球， S_1 是环面， N_1 是射影平面， N_2 是Klein瓶。

记 n, e, f 分别为图 G 的边数、点数和面数。经典的Euler公式[4]告诉我们： $n - e + f = 2 - \gamma$ ，其中 γ 为图 G 的Euler亏格。更一般地，我们可以分成可定向和不可定向曲面来考虑。设一个连通图 G 是曲面 S 上的一个2-胞腔嵌入，其中 $S = S_g$ 或 $S = N_k$ 。称一个面的边界为一条面迹。分别记面的数目为 f ， $|V(G)| = n$ 和 $|E(G)| = e$ ，Euler公式可以写成如下形式： $n - e + f$ 等于 $2 - 2g$ (当 $S = S_g$)或 $2 - k$ (当 $S = N_k$)。

图 G 的一个嵌入是一个有序对 $\Pi = (\pi, \lambda)$ ，其中 $\pi = \{\pi_v | v \in V(G)\}$ 是一个旋转系统(这意味着，对每个点 v ， π_v 是与 v 关联的边的一个轮换)， λ 是分配给每条边 $e \in E(G)$ 一个符号 $\lambda(e) \in \{-1, 1\}$ 的一个符号映射。给定 G 的一个嵌入 Π ，我们说 G 是 Π -嵌入的。Edmonds[5]和Heffter[6]的结果表明：图 G 在某个曲面 S 上一个嵌入是由它的旋转系统确定。

图 G 的一个 k -着色是一个映射 $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ ，(称 $1, 2, \dots, k$ 为颜色)，使得任意两个相邻的顶点都分配到不同的颜色。称图 G 是可 k -着色的，如果 G 有一个 k -着色。图 G 的色数，记作 $\chi(G)$ ，是最小的数 k ，使得 G 有一个 k -着色，但没有 $(k-1)$ -着色。曲面嵌入图的色数，是指嵌入到某个表面上的图的最大色数。在研究曲面嵌入图的着色问题时，色临界图起着重要的作用。称一个图 G 为 k -色临界的，如果 G 不是 $(k-1)$ -色的，但它的每个真子图都是 $(k-1)$ -色的。

当研究曲面嵌入图的着色问题时，因为许多的信息隐藏在了亏格的后面，所以问题就变得有些扑朔迷离。在平面图的四色猜想还未解决的时候，数学家为了研究这个猜想，对曲面嵌入图的色数进行了探究。Heawood[7]证明了：如果 S 不是球，那么嵌入到 S 上的每个图至多使用 $h(\gamma) = \frac{1}{2}(7 + \sqrt{1 + 49\gamma})$

种不同的颜色，其中 g 为 S 的亏格。Ringel 和 Youngs[8]证明了这个结果对除了 Klein 瓶以外的所有曲面都是最好可能的。嵌入到 Klein 瓶上的图仅需 6 种颜色，而 Heawood 的界告诉我们 Klein 瓶上的嵌入图的最大色数为 7，这个结果是由 Franklin[9]得到的。Dirac[10]，Albertson 和 Hutchinson[11]证明了：曲面 S 上的一个图可以用少于 $h(\gamma)$ 种颜色着色，除非它包含一个 $h(\gamma)$ 个点的完全图作为子图。

研究曲面上的色临界图，既要探讨它的组合特征，又要考虑它在曲面上的嵌入行为，所以有一定的难度。1997 年，Gimbel 和 Thomassen[12]提出了曲面色临界图猜想：令 S 是任意一个固定的曲面，令 k, q 是两个 >2 的固定的自然数，曲面 S 上是否存在无限多围长为 q 的 k -色临界图。这是一个富有创造力的设想。Erdős 关于大围长同时有大色数的存在性结果为这个想法提供了基本依据。

如果在上述的猜想中，令 $q=3$ ，我们可以得到一个弱版本的曲面色临界图猜想：曲面 S 上是否存在无限多的 k -色临界图。这个问题是由 Dirac[13]最先开始研究的。他观察到：对每个固定的曲面 S ，和每个固定的自然数 $k \geq 8$ ，曲面 S 上仅有有限多个 k -色临界图。Mohar 和 Thomassen[14]证明了：对于亏格 $g \geq 2$ 的曲面 S ，曲面 S 上的 7-色临界图的点数少于 $138(g-1)$ 。Gallai[15]给出了 k -色临界图中所有度数为 $k-1$ 的点诱导子图的一个优美的刻画： k -色临界图中所有度数为 $k-1$ 的点诱导出一个子图，它的块或者是奇圈或者是完全图。我们借助于 Euler 公式和 Gallai 所发展起来的研究色临界图的方法，改进了 Mohar 和 Thomassen 的这个结果，给出了曲面 S 上的 7-色临界图的个数是有限的的一个比较简洁的证明。除此以外，我们还给出曲面 S 上的每一个 k -色临界图 ($k \geq 7$) 的点数上界的一个统一的表达式。

2. 主要定理及其证明

定理 1.1: 曲面 S 上的 7-色临界图 G 的点数至多为 $120(g-1)$ ，其中 $g \geq 2$ 。

证明: 反证法。假定曲面 S 上的 7-色临界图 G 有多于 $120(g-1)$ 个点。Euler 公式结合平均度的方法，可以推出对固定的曲面 S 和嵌入到 S 上一个足够大的图 G ， G 一定有一个度数至多为 6 的点。事实上，由 Euler 公式可知，曲面嵌入图的边数 $e \leq 3n + 6(g-1)$ ，进而 $2e/n \leq 6 + 12(g-1)/n$ ，曲面 S 上的 7-色临界图有多于 $120(g-1)$ 个点，所以 G 一定有一个度数至多为 6 的点。

下证曲面 S 上的 7-色临界图 G 有多于 $120(g-1)$ 个点时，一定有一个 6 度点，使得这个 6 度点的 6 个邻点全是 6 度点且这个 6 度点关联的面全是三角形。

令 v, e, f 分别表示图 G 的点数、边数和面数， v_i 表示度数为 i 的点数， f_i 表示度数为 i 的面数。我们有 $v = \sum_i v_i$ ， $f = \sum_i f_i$ 和 $2e = \sum_i i v_i = \sum_i f_i$ 成立。由 Euler 公式， $v - e + f = 2 - 2g$ 得

$$6(2-2g) = 6v - 6e + 6f = (6v - 2e) + (6f - 4e) = \sum_{i \geq 6} (i-6)v_i + \sum_{i \geq 4} (i-3)f_i。$$

又因为曲面 S 上的 7-色临界图 G 的所有点的度数均 ≥ 6 。上式可以变形为

$$\sum_{i \geq 7} (i-6)v_i + 2\sum_{i \geq 4} (i-3)f_i = 12(g-1)$$

这个等式左边的两项均是非负的，有 $\sum_{i \geq 7} (i-6)v_i \leq 12(g-1)$ 和 $\sum_{i \geq 4} (i-3)f_i \leq 6(g-1)$ 成立。

先考查 $\sum_{i \geq 7} (i-6)v_i \leq 12(g-1)$ ，将其展开，即

$$v_7 + 2v_8 + 3v_9 + 4v_{10} + \cdots \leq 12(g-1)。$$

注意到

$$v_7 + v_8 + v_9 + v_{10} \leq v_7 + 2v_8 + 3v_9 + 4v_{10} + \cdots \leq 12(g-1)。$$

等号成立当且仅当 $v_8 = v_9 = v_{10} = \cdots = 0$ ，即不存在 8 度及其以上的点。

由以上的分析知，

$$(v_7 + 2v_8 + 3v_9 + 4v_{10} + \cdots) + 7(v_7 + v_8 + v_9 + v_{10} + \cdots) = 8v_7 + 9v_8 + 10v_9 + 11v_{10} + \cdots \leq 96(g-1)$$

这个式子告诉我们，在曲面 S 上的 7-色临界图 G 中所有的 7 度以上的点及其关联的点数至多为 $96(g-1)$ 。而总点数 $>120(g-1)$ ，所以一定存在一个 6 度点，使得这个 6 度点的 6 个邻点全是 6 度点。再考查 $\sum_{i \geq 4} (i-3)f_i \leq 6(g-1)$ ，将其展开，即

$$f_4 + 2f_5 + 3f_6 + 4f_7 + \cdots \leq 6(g-1).$$

注意到

$$f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + \cdots \leq f_4 + 2f_5 + 3f_6 + 4f_7 + \cdots \leq 6(g-1).$$

等号成立当且仅当 $f_5 = f_6 = f_7 = \cdots = 0$ ，即不存在包含 5 个点以上的面。由以上的分析知，

$$(f_4 + 2f_5 + 3f_6 + 4f_7 + \cdots) + 3(f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + \cdots) = 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + 7f_7 + \cdots \leq 24(g-1).$$

这个式子告诉我们，在曲面 S 上的 7-色临界图 G 中所有的 4 度以上的面所覆盖的点至多为 $24(g-1)$ 。而总点数 $>120(g-1) = 96(g-1) + 24(g-1)$ ，所以一定有一个 6 度点，使得这个 6 度点的 6 个邻点全是 6 度点且这个 6 度点关联的面全是三角形。

因此 v 及其邻点属于由度数为 6 的点诱导子图中的一个块。因为这个块不是一个奇圈，所以它是一个完全图。进而 G 包含 K_7 ，矛盾。这是因为一个 7-色临界图不包含一个 7-色临界图作为其真子图。证毕。

曲面 S 上的 7-色临界图有至多 $120(g-1)$ 个点，也就是说曲面 S 上的 7-色临界图的个数是有限的。因此理论上我们可以设计一个多项式算法，来检验一个给定的曲面嵌入图是否有 6-着色。对于一般可定向曲面上的 k -色临界图，我们下面的定理给出了曲面 S_g 上的每一个 k -色临界图 ($k \geq 7$) 的点数上界的一个统一的表达式。

定理 1.2: 曲面 S_g 上的每一个 k -色临界图的点数不超过 $12(k+3)(g-1)$ ，其中 $k \geq 7$ ， $g > 2$ 。

证明: 记 n, e, f 分别为图 G 的边数、点数和面数， v_k 为度数为 k 的点数，由 Euler 公式 $n - e + f = 2 - 2g$ ，有

$$v_k + v_{k+1} + \cdots \leq (k-6)v_k + (k-5)v_{k+1} + \cdots \leq 12(g-1),$$

进而

$$k(v_k + v_{k+1} + \cdots) \leq 12(g-1).$$

由

$$v_k + 2v_{k+1} + \cdots \leq (k-6)v_k + (k-5)v_{k+1} + \cdots \leq 12(g-1),$$

得，

$$(k+1)v_k + (k+2)v_{k+1} + \cdots \leq 12(k+1)(g-1),$$

进而，

$$kv_k + v_{k+1} + \cdots \leq 12(g-1) - (v_k + v_{k+1} + \cdots).$$

由以上的分析知，图 G 中所有度数大于 k 的点和它们的邻域中的点数总和至多是 $12(k+1)(g-1)$ 。

如果设图的点数上界为 $M(g-1)$ ，即，有一个 S_g 上的 k -临界图的点数超过 $M(g-1)$ 。那么重复前面关于面的处理过程后可知：图中被度数大于 3 的面所覆盖的点数至多是 $24(g-1)$ 。于是，图中被三角形所覆盖(同时没有被面数大于 3 的面所覆盖)的点集合 B 的阶数大于 $(M-1) - 24(g-1)$ 。所以，图 G 当中所有度数为 $k-1$ ，且其邻域的点(没有被度数大于 $k-1$ 的点及其邻域覆盖)的全体 A 的阶数大于 $M(g-1) - 96(g-1) = (M-96)(g-1)$ 。只要 M 适当地大，即 $M > 24 + 12(k+1)$ ，那么这两个集合 A, B 的交集 $A \cap B \neq \emptyset$ 。于是存在一点 $x \in A \cap B$ ，使得 $d(x) = k-1$ ，而且 x 被三角形所覆盖，同时其邻域中的点都是 $k-1$ 度点： x_1, x_2, \dots, x_{k-1} 。不妨设这个次序就是它们在嵌入方案中的局部旋转次序。容易看出，

这 k 个点 x_1, x_2, \dots, x_{k-1} 诱导出图的一个完全子图 K_k ，它是图 G 的一个真子图。这与 G 是 k -色临界图相违背。证毕。

图 G 和图 H 的联图 $G+H$ 是由图 $G \cup H$ 添加图 G 和图 H 的所有点之间的边得到的图。如果 G_1 和 G_2 是有公共点 v_0 ，和 G_1 中的一条边 v_0v_1 和 G_2 中的一条边 v_0v_2 的图，由这两个图经过 Hajós 构造得到的图是指是具有顶点集 $V(G_1) \cup V(G_2)$ 和边集 $E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{v_1v_2\} \setminus \{v_0v_1, v_0v_2\}$ 的图。Thomassen[16]证明了：环面上的嵌入图是可 5-着色的，除非它包含 K_6 ，六个点的完全图，或者 $C_3 + C_5$ ，长度为 3 和 5 的两个圈的联图，或者 $K_2 + H_7$ ， K_2 和 H_7 的联图，其中 H_7 是由在 K_4 的两个拷贝上应用 Hajós 构造得到的，或者环面上有 11 个点的三角剖分图 T_{11} ，它是由长度为 11 的圈添加圈上的距离为 2 和 3 点之间的边得到的图。Chenette, Postle, Streib, Thomas 和 Yerger[17]使用上述 Thomassen 所发展起来的方法，给出了 Klein 瓶上的 6-色临界图完全列表。Kawarabayashi, Král, Kynčl 和 Lidický[18]借助于计算机也得到了 Klein 瓶上的 6-色临界图完全列表。

使用 Hajós 构造，我们可以很容易地找到某个固定曲面上的一些 k -色临界图。但是要找到某个固定曲面上的所有的色临界图是一件很困难的事。到目前为止，仅知道射影平面、环面和 Klein 瓶这三个小亏格曲面上 6-色临界图的确切数目。

项目基金

国家自然科学基金项目(11171114)。

参考文献 (References)

- [1] Möbius, A.F. (1861) Zur theorie der polyëder und elementarverwandtschaft. *Qeuvres Complètes*, **2**, 519-559.
- [2] Jordan, C. (1866) Sur la déformation des surfaces. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **11**, 105-109.
- [3] Thomassen, C. (1992) The Jordan-Schönflies theorem and the classification of surfaces. *The American Mathematical Monthly*, **99**, 116-130.
- [4] Euler, L. (1752) Elementa doctrinae solidorum. Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum. *Novi Comment Acad. Sc. Imp. Petropol.*, **4**, 109-160.
- [5] Edmonds, J.R. (1960) A combinatorial representation for polyhedral surfaces. *Notices of the AMS—American Mathematical Society*, **7**, 646.
- [6] Heffter, L. (1891) Über das problem der nachbargebiete. *Mathematische Annalen*, **38**, 477-508.
- [7] Heawood, P.J. (1890) Map colour theorem. *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, **24**, 332-338.
- [8] Ringel, G. and Youngs, J.W.T. (1968) Solution of the Heawood map-coloring problem. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, **60**, 438-455.
- [9] Franklin, P. (1934) A six color problem. *Journal of Mathematical Physics*, **13**, 363-369.
- [10] Dirac, G.A. (1952) Map color theorem. *Canadian Journal of Mathematics*, **4**, 480-490.
- [11] Albertson, M.O. and Hutchinson, J.P. (1977) The independence ratio and genus of a graph. *Transactions of the American Mathematical Society*, **226**, 161-173.
- [12] Gimbel, J. and Thomassen, C. (1997) Coloring graphs with fixed genus and girth. *Transactions of the American Mathematical Society*, **349**, 4555-4564.
- [13] Dirac, G.A. (1953) The coloring of maps. *Journal of the London Mathematical Society*, **28**, 476-480.
- [14] Mohar, B. and Thomassen, C. (2001) *Graphs on surfaces*. Johns Hopkins University Press, London.
- [15] Gallai, T. (1963) Kritische graphen I, II. *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, **8**, 165-192, 373-395.
- [16] Thomassen, C. (1994) Five-coloring graphs on the torus. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **62**, 11-33.
- [17] Chenette, N., Postle, L., Streib, N. and Thomas, R. (2012) Five-colorings graphs on the Klein bottle. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **102**, 1067-1098.
- [18] Kawarabayashi, K.I., Král, D., Kynčl, J. and Lidický, B. (2009) 6-critical graphs on the Klein bottle. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **23**, 372-383.