Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2014, 3, 177-183**
Published Online November 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2014.34026

Multidimensional Hyper Geometric Distribution of High Order Mixed Moment Algorithm

Fang Wang

China University of Mine and Technology, Beijing
Email: 1456199678@qq.com

Received: Aug. 12th, 2014; revised: Sep. 14th, 2014; accepted: Sep. 22nd, 2014

Abstract

Considering the complexity of computing the multidimensional hyper geometric distribution of high order mixed moments with definition directly, we use the relationship between marginal distribution and joint distribution in multidimensional marginal distribution, to give the simple algorithm and recursive formulas for multi-dimensional hypergeometric distribution of high order mixed moment.

Keywords

Multivariate Hypergeometric Distribution [1], High Order Mixed Moments, Recurrence

多维超几何分布高阶混合矩的算法

汪　芳

中国矿业大学，北京
Email: 1456199678@qq.com

收稿日期：2014年8月12日；修回日期：2014年9月14日；录用日期：2014年9月22日

摘　要

考虑到直接用定义计算多维超几何分布高阶混合矩的复杂性，利用多维超几何分布的边际分布与联合分

布的关系，给出了多维超几何分布高阶混合矩的简单算法及递推公式。

关键词

多维超几何分布[1]，高阶混合矩，递推

1. 引言

在抽样调查中，我们经常遇到定性资料问题，为此有人曾探讨过“多维超几何分布协方差阵的简单求法[2]”，下面我们就以抽样调查为背景来研究如何计算多维超几何分布高阶混合矩。假设总体含有 N 个个体，其中一等品有 N_1 个，二等品有 N_2 个，……，r 等品有 N_r 个。从总体中不放回地抽取容量为 n 的样本，其中获得一等品 X_1 个，二等品 X_2 个，……，r 等品 X_r 个。那么，$(X_1,X_2,\cdots,X_r)$ 服从多维超几何分布，记为 $(X_1,X_2,\cdots,X_r)\sim H(N_1,N_2,\cdots,N_r,N,n)$，即有，

$$P(X_1=n_1,X_2=n_2,\cdots,X_r=n_r)=\frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}\cdots\binom{N_r}{n_r}}{\binom{N}{n}}$$

其中 $N_1+N_2+\cdots+N_r=N$，$n_1+n_2+\cdots+n_r=n$。

2. 预备知识

引理 1[3] 设 X_i 服从超几何分布，记为 $X_i\sim H(N-N_i,N_i,N,n)$，则

$$EX_i=n\frac{N_i}{N},\quad DX_i=n\frac{N_i(N-N_i)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

引理 2[4] 设离散型随机变量 X_i 服从超几何分布，记为 $(X_1,X_2)\sim H(N_1,N_2,N,n)$，则 X_i 的 k 阶原点矩可由公式

$$EX_i^k=\sum_{l=0}^{k}S(k,l)\frac{[N_i]_l[n]_l}{[N]_l}\quad(i=1,2)$$

计算得出。

其中 $S(k,l)$ 为组合数学中的第二类 Stirling 数[5]，其初始值为：

$$S(k,0)=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k\ge 1\end{cases}$$

$$S(k,k)=1,\quad k\ge 1$$

$$S(0,l)=1,\quad l\le 0$$

$[n]_l$ 为 n 的下阶层，并且

$$[n]_l=\begin{cases}1, & l=0\\ \binom{n}{l}l!, & 1\le l\le n\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

引理 3 设离散型随机变量 X 服从多维超几何分布，记为 $(X_1,X_2,\cdots,X_r)\sim H(N_1,N_2,\cdots,N_r,N,n)$，为求 X_i 的 k 阶原点矩，可将其视为两类 X_i 与 X_j $(j\neq i)$，则根据引理 2 所述，X_i 的 k 阶原点矩仍可由公式

$$EX_i^k=\sum_{l=0}^{k}S(k,l)\frac{[N_i]_l[n]_l}{[N]_l}\quad(i=1,2)$$

计算得出。

引理 4[6] 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_r)$ 服从多维超几何分布，$(X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_t})$ 是其中任意 t $(1\le t\le r)$ 个分量，则 $(X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_t})$ 仍然服从超几何分布。

3. 高阶混合矩的算法

$r=2$ 时，$(X_1,X_2)\sim H(N_1,N_2,N,n)$，即等价为一维超几何分布，由引理 2 知

$$EX_2=\frac{[N_2]_1[n]_1}{[N]_1}=n\frac{N_2}{N},$$

$$EX_2^2=\frac{[N_2]_1[n]_1}{[N]_1}+\frac{[N_2]_2[n]_2}{[N]_2}=n\frac{N_2}{N}+\frac{N_2(N_2-1)n(n-1)}{N(N-1)},$$

$$EX_2^3=\frac{[N_2]_1[n]_1}{[N]_1}+3\frac{[N_2]_2[n]_2}{[N]_2}+\frac{[N_2]_3[n]_3}{[N]_3}.$$

从而

$$\begin{aligned}E(X_1X_2)&=E\left[(n-X_2)X_2\right]=nEX_2-EX_2^2=n\frac{[N_2]_1[n]_1}{[N]_1}-\left(\frac{[N_2]_1[n]_1}{[N]_1}+\frac{[N_2]_2[n]_2}{[N]_2}\right)\\&=(n-1)\frac{[N_2]_1[n]_1}{[N]_1}-\frac{[N_2]_2[n]_2}{[N]_2}=(n-1)\frac{N_2}{N}-\frac{N_2(N_2-1)n(n-1)}{N(N-1)}\\&=\frac{nN_2(n-1)(N-1-N_2)}{N(N-1)}.\end{aligned}$$

记为 $E(X_1X_2)\sim f_2^{11}(n_2,N_2,n,N)$

$$\begin{aligned}E\left(X_1X_2^2\right)&=E\left[(n-X_2)X_2^2\right]=nE\left(X_2^2\right)-E\left(X_2^3\right)=n\left(\frac{[N_2]_1[n]_1}{[N]_1}+\frac{[N_2]_2[n]_2}{[N]_2}\right)\\&\quad-\left(\frac{[N_2]_1[n]_1}{[N]_1}+3\frac{[N_2]_2[n]_2}{[N]_2}+\frac{[N_2]_3[n]_3}{[N]_3}\right)\\&=(n-1)\frac{[N_2]_1[n]_1}{[N]_1}+(n-3)\frac{[N_2]_2[n]_2}{[N]_2}-\frac{[N_2]_3[n]_3}{[N]_3}.\end{aligned}$$

记为 $E\left(X_1X_2^2\right)\sim f_2^{12}(n_2,N_2,n,N)$

$$\begin{aligned}E\left(X_1^2X_2\right)&=E\left[(n-X_2)^2X_2\right]=n^2EX_2-2nEX_2^2+EX_2^3\\&=n^2\frac{[N_2]_1[n]_1}{[N]_1}-2n\left(\frac{[N_2]_1[n]_1}{[N]_1}+\frac{[N_2]_2[n]_2}{[N]_2}\right)+\left(\frac{[N_2]_1[n]_1}{[N]_1}+3\frac{[N_2]_2[n]_2}{[N]_2}+\frac{[N_2]_3[n]_3}{[N]_3}\right)\\&=(n-1)^2\frac{[N_2]_1[n]_1}{[N]_1}-(2n-3)\frac{[N_2]_2[n]_2}{[N]_2}+\frac{[N_2]_3[n]_3}{[N]_3}.\end{aligned}$$

记为 $E\left(X_1^2X_2\right)\sim f_2^{21}\left(n_2,N_2,n,N\right)$。

推广到 $r=2$ 时超几何分布任意高阶混合矩：

$$\begin{aligned}E\left(X_1^{k_{21}}X_2^{k_{22}}\right)&=E\left[X_1^{k_{21}}\left(n-X_1\right)^{k_{22}}\right]\\&=E\left[\sum_{i_{21}=0}^{k_{22}}C_{k_{22}}^{i_{21}}\left(-n\right)^{k_{22}-i_{21}}X_1^{k_{21}+i_{21}}\right]\\&=\sum_{i_{21}=0}^{k_{22}}\left(-1\right)^{k_{22}}C_{k_{22}}^{i_{21}}\left(-n\right)^{k_{22}-i_{21}}EX_1^{k_{21}+i_{21}}\\&=\sum_{i_{21}=0}^{k_{22}}\left(-1\right)^{k_{22}}C_{k_{22}}^{i_{21}}\left(-n\right)^{k_{22}-i_{21}}\sum_{l=0}^{k_{21}+i_{21}}S\left(k_{21}+i_{21},l\right)\frac{\left[N_1\right]_l\left[n\right]_l}{\left[N\right]_l}.\end{aligned}$$

记为 $E\left(X_1^{k_{21}}X_2^{k_{22}}\right)\sim f_2^{k_{21}k_{22}}\left(n_2,N_2,n,N\right)$。

$r=3$ 时，$\left(X_1,X_2,X_3\right)\sim H\left(N_1,N_2,N_3,N,n\right)$，同样地我们有，

$$E\left(X_1X_2X_3\right)=E\left[X_1X_2\left(n-X_1-X_2\right)\right]=nE\left(X_1X_2\right)-E\left(X_1X_2^2\right)-E\left(X_1^2X_2\right)\qquad(*)$$

由引理 3 我们知道，

$E\left(X_1X_2\right)\sim f_2^{11}\left(n_2,N_2,n-n_3,N-N_3\right)$ ①

$E\left(X_1^2X_2\right)\sim f_2^{21}\left(n_2,N_2,n-n_3,N-N_3\right)$ ②

$E\left(X_1X_2^2\right)\sim f_2^{12}\left(n_2,N_2,n-n_3,N-N_3\right)$ ③

从而将①②③式代入到(*)式中得：

$$\begin{aligned}E\left(X_1X_2X_3\right)=&\,n\left(\left(n-n_3-1\right)\frac{\left[N_2\right]_1\left[n-n_3\right]_1}{\left[N-N_3\right]_1}-\frac{\left[N_2\right]_2\left[n-n_3\right]_2}{\left[N-N_3\right]_2}\right)\\&-\left(\left(n-n_3-1\right)\frac{\left[N_2\right]_1\left[n-n_3\right]_1}{\left[N-N_3\right]_1}+\left(n-n_3-3\right)\frac{\left[N_2\right]_2\left[n-n_3\right]_2}{\left[N-N_3\right]_2}-\frac{\left[N_2\right]_3\left[n-n_3\right]_3}{\left[N-N_3\right]_3}\right)\\&-\left(\left(n-n_3-1\right)^2\frac{\left[N_2\right]_1\left[n-n_3\right]_1}{\left[N-N_3\right]_1}-\left(2n-2n_3-3\right)\frac{\left[N_2\right]_2\left[n-n_3\right]_2}{\left[N-N_3\right]_2}+\frac{\left[N_2\right]_3\left[n-n_3\right]_3}{\left[N-N_3\right]_3}\right)\\=&\left(n-n_3-1\right)n_3\frac{\left[N_2\right]_1\left[n-n_3\right]_1}{\left[N-N_3\right]_1}-n_3\frac{\left[N_2\right]_2\left[n-n_3\right]_2}{\left[N-N_3\right]_2}.\end{aligned}$$

记为 $E\left(X_1X_2X_3\right)\sim f_3^{111}\left(n_2,N_2,n_3,N_3,n,N\right)$。

同理，我们将之推广到 $r=3$ 时超几何分布任意高阶混合矩：

$$\begin{aligned}E\left(X_1^{k_{31}}X_2^{k_{32}}X_3^{k_{33}}\right)&=E\left[X_1^{k_{31}}X_2^{k_{32}}\left(n-X_1-X_2\right)^{k_{33}}\right]\\&=E\left[X_1^{k_{31}}X_2^{k_{32}}\left(-1\right)^{k_{33}}\sum_{i_{31}=0}^{k_{33}}C_{k_{33}}^{i_{31}}\left(-n\right)^{k_{33}-i_{31}}\sum_{i_{32}=0}^{i_{31}}C_{i_{31}}^{i_{32}}X_1^{i_{31}-i_{32}}X_2^{i_{32}}\right]\\&=\left(-1\right)^{k_{33}}\sum_{i_{31}=0}^{k_{33}}C_{k_{33}}^{i_{31}}\left(-n\right)^{k_{33}-i_{31}}\sum_{i_{32}=0}^{i_{31}}C_{i_{31}}^{i_{32}}E\left(X_1^{k_{31}+i_{31}-i_{32}}X_2^{k_{32}+i_{32}}\right).\end{aligned}$$

同样，由引理 3 我们知道

$$E\left(X_1^{k_{31}+i_{31}-i_{32}}X_2^{k_{32}+i_{32}}\right)\sim f_2^{k_{31}+i_{31}-i_{32},k_{32}+i_{32}}\left(n_3,N_3,n-n_3,N-N_3\right)$$

$r=4$ 时，任意高阶混合矩为：

$$E\left(X_1^{k_{41}}X_2^{k_{42}}X_3^{k_{43}}X_4^{k_{44}}\right)=E\left[X_1^{k_{41}}X_2^{k_{42}}X_3^{k_{43}}\left(n-X_1-X_2-X_3\right)^{k_{44}}\right]$$

$$=E\left[X_1^{k_{41}}X_2^{k_{42}}X_3^{k_{43}}(-1)^{k_{44}}\sum_{i_{41}=0}^{k_{44}}C_{k_{44}}^{i_{41}}(-n)^{k_{44}-i_{41}}\sum_{i_{42}=0}^{i_{41}}C_{i_{41}}^{i_{42}}X_1^{i_{41}-i_{42}}\sum_{i_{43}=0}^{i_{42}}C_{i_{42}}^{i_{43}}X_2^{i_{42}-i_{43}}X_3^{i_{43}}\right]$$

$$=(-1)^{k_{44}}\sum_{i_{41}=0}^{k_{44}}C_{k_{44}}^{i_{41}}(-n)^{k_{44}-i_{41}}\sum_{i_{42}=0}^{i_{41}}C_{i_{41}}^{i_{42}}\sum_{i_{43}=0}^{i_{42}}C_{i_{42}}^{i_{43}}E\left(X_1^{k_{41}+i_{41}-i_{42}}X_2^{k_{42}+i_{42}-i_{43}}X_3^{k_{43}+i_{43}}\right).$$

其中

$$E\left(X_1^{k_{41}+i_{41}-i_{42}}X_2^{k_{42}+i_{42}-i_{43}}X_3^{k_{43}+i_{43}}\right)\sim f_3^{k_{41}+i_{41}-i_{42},k_{42}+i_{42}-i_{43},k_{43}+i_{43}}\left(n_4,N_4,n-n_4,N-N_4\right)$$

以此类推，可以得到：当求 r 维超几何分布任意高阶混合矩时，需要化成求 $r-1$ 维任意高阶混合矩来计算，即有如下形式的递推公式：

$$E\left(X_1^{k_{r1}}X_2^{k_{r2}}\cdots X_r^{k_{rr}}\right)=CE\left(X_1^{t_{r-1,1}}X_2^{t_{r-1,2}}\cdots X_{r-1}^{t_{r-1,r-1}}\right)$$

其中 C 为常数系数。

从上面的计算中我们可以得知，变化后随机变量 X_i 的幂指数有如下规律，如表 1：

系数 C 据有如下规律，如表 2：

Table 1. Variation rule of order of each random variable in the mixed moment
表 1. 混合矩 $E\left(X_1^{t_{r-1,1}}X_2^{t_{r-1,2}}\cdots X_{r-1}^{t_{r-1,r-1}}\right)$ 中各随机变量的阶数 $t_{r-1,i}$ 的变化规律

维数 r， t_i 随机变量幂指数	$t_{r-1,1}$	$t_{r-1,2}$	$t_{r-1,3}$	$t_{r-1,4}$	$t_{r-1,5}$	……
1	k_{11}	0	0	0	0	……
2	$k_{21}+i_{21}$	0	0	0	0	……
3	$k_{31}+i_{31}-i_{32}$	$k_{32}+i_{32}$	0	0	0	……
4	$k_{41}+i_{41}-i_{42}$	$k_{42}+i_{42}-i_{43}$	$k_{43}+i_{43}$	0	0	……
5	$k_{51}+i_{51}-i_{52}$	$k_{52}+i_{52}-i_{53}$	$k_{53}+i_{53}-i_{54}$	$k_{54}+i_{54}$	0	……
6	$k_{61}+i_{61}-i_{62}$	$k_{62}+i_{62}-i_{63}$	$k_{63}+i_{63}-i_{64}$	$k_{64}+i_{64}-i_{65}$	$k_{65}+i_{65}$	……
……	……	……	……	……	……	……

Table 2. Variation coefficient of C
表 2. 系数 C 的变化规律

维数 r	系数 C
2	$(-1)^{k_{22}}\sum_{i_{21}=0}^{k_{22}}C_{k_{22}}^{i_{21}}(-n)^{k_{22}-i_{21}}$
3	$(-1)^{k_{33}}\sum_{i_{31}=0}^{k_{33}}C_{k_{33}}^{i_{31}}(-n)^{k_{33}-i_{31}}\sum_{i_{32}=0}^{i_{31}}C_{i_{31}}^{i_{32}}$
4	$(-1)^{k_{44}}\sum_{i_{41}=0}^{k_{44}}C_{k_{44}}^{i_{41}}(-n)^{k_{44}-i_{41}}\sum_{i_{42}=0}^{i_{41}}C_{i_{41}}^{i_{42}}\sum_{i_{43}=0}^{i_{42}}C_{i_{42}}^{i_{43}}$
5	$(-1)^{k_{55}}\sum_{i_{51}=0}^{k_{55}}C_{k_{55}}^{i_{51}}(-n)^{k_{55}-i_{51}}\sum_{i_{52}=0}^{i_{51}}C_{i_{51}}^{i_{52}}\sum_{i_{53}=0}^{i_{52}}C_{i_{52}}^{i_{53}}\sum_{i_{54}=0}^{i_{53}}C_{i_{53}}^{i_{54}}$
……	……

对于公式中 $\frac{[N']_l[n']_l}{[N]_l}$ 部分有如下规律：

$$r=j\text{ 时，}\quad \frac{[N']_l[n']_l}{[N]_l}=\frac{[N-N_j]_l[n_j]_l}{[N]_l},$$

其中 $j=3,4,\cdots$。

综上所述，我们得到计算多维超几何分布高阶混合矩的递推公式如下：

$r=1$，

$$EX_1^{k_{11}}=\sum_{l=0}^{k_{11}}S(k_{11},l)\frac{[N_1]_l[n]_l}{[N]_l}$$

$r=2$，

$$E\left(X_1^{k_{21}}X_2^{k_{22}}\right)=(-1)^{k_{22}}\sum_{i_{21}=0}^{k_{22}}C_{k_{22}}^{i_{21}}(-n)^{k_{22}-i_{21}}\sum_{l=0}^{k_{21}+i_{21}}S(k_{21}+i_{21},l)\frac{[N_1]_l[n]_l}{[N]_l}$$

$r\ge 3$，

$$E\left(X_1^{k_{r1}}X_2^{k_{r2}}\cdots X_r^{k_{rr}}\right)=(-1)^{k_{rr}}\sum_{i_{r1}=0}^{k_{rr}}(-n)^{k_{rr}-i_{r1}}\sum_{i_{r2}=0}^{i_{r1}}C_{i_{r1}}^{i_{r2}}\sum_{i_{r3}=0}^{i_{r2}}C_{i_{r2}}^{i_{r3}}\cdots\sum_{i_{r,r-1}=0}^{i_{r,r-2}}C_{i_{r,r-2}}^{i_{r,r-1}}E\left(X_1^{t_{r-1,1}}X_2^{t_{r-1,2}}\cdots X_{r-1}^{t_{r-1,r-1}}\right)$$

将其记为 $(\#)$ 式。其中

$$\begin{cases}t_{r-1,j}=k_{rj}+i_{rj}-i_{r,j+1}, & j=1,2,\cdots,r-2\\ t_{r-1,j}=k_{rj}+i_{rj}, & j=r-1\end{cases}。$$

下面用数学归纳法证明上式成立：

$r\ge 3$ 时，假设 $r\le p\quad(p\ge 3)$ 时 $(\#)$ 式成立，即有：

$$E\left(X_1^{k_{p1}}X_2^{k_{p2}}\cdots X_p^{k_{pp}}\right)=(-1)^{k_{pp}}\sum_{i_{p1}=0}^{k_{pp}}(-n)^{k_{pp}-i_{p1}}\sum_{i_{p2}=0}^{i_{p1}}C_{i_{p1}}^{i_{p2}}\sum_{i_{p3}=0}^{i_{p2}}C_{i_{p2}}^{i_{p3}}\cdots\sum_{i_{p,p-1}=0}^{i_{p,p-2}}C_{i_{p,p-2}}^{i_{p,p-1}}E\left(X_1^{t_{p-1,1}}X_2^{t_{p-1,2}}\cdots X_{p-1}^{t_{p-1,p-1}}\right)$$

其中 $\begin{cases}t_{p-1,j}=k_{pj}+i_{pj}-i_{p,j+1}, & j=1,2,\cdots,p-2\\ t_{p-1,j}=k_{pj}+i_{pj}, & j=p-1\end{cases}$。

则 $r=p+1$ 时，

$$\begin{aligned}
&E\left(X_1^{k_{p+1,1}}X_2^{k_{p+1,2}}\cdots X_{p+1}^{k_{p+1,p+1}}\right)\\
&=E\left[X_1^{k_{p+1,1}}X_2^{k_{p+1,2}}\cdots X_p^{k_{p+1,p}}\left(n-X_1-X_2-\cdots-X_p\right)^{k_{p+1,p+1}}\right]\\
&=E\left[X_1^{k_{p+1,1}}X_2^{k_{p+1,2}}\cdots X_p^{k_{p+1,p}}(-1)^{k_{p+1,p+1}}\sum_{i_{p+1,1}=0}^{k_{p+1,p+1}}C_{k_{p+1,p+1}}^{i_{p+1,1}}(-n)^{k_{p+1,p+1}-i_{p+1,1}}\left(X_1+X_2+\cdots+X_p\right)^{i_{p+1,1}}\right]\\
&=(-1)^{k_{p+1,p+1}}\sum_{i_{p+1,1}=0}^{k_{p+1,p+1}}C_{k_{p+1,p+1}}^{i_{p+1,1}}(-n)^{k_{p+1,p+1}-i_{p+1,1}}E\left[X_1^{k_{p+1,1}}X_2^{k_{p+1,2}}\cdots X_p^{k_{p+1,p}}\left(X_1+X_2+\cdots+X_p\right)^{i_{p+1,1}}\right]\\
&=(-1)^{k_{p+1,p+1}}\sum_{i_{p+1,1}=0}^{k_{p+1,p+1}}C_{k_{p+1,p+1}}^{i_{p+1,1}}(-n)^{k_{p+1,p+1}-i_{p+1,1}}E\left[X_1^{k_{p+1,1}}X_2^{k_{p+1,2}}\cdots X_p^{k_{p+1,p}}\sum_{i_{p+1,2}=0}^{i_{p+1,1}}C_{i_{p+1,1}}^{i_{p+1,2}}X_1^{i_{p+1,1}-i_{p+1,2}}\left(X_2+\cdots+X_p\right)^{i_{p+1,2}}\right]\\
&=(-1)^{k_{p+1,p+1}}\sum_{i_{p+1,1}=0}^{k_{p+1,p+1}}C_{k_{p+1,p+1}}^{i_{p+1,1}}(-n)^{k_{p+1,p+1}-i_{p+1,1}}\sum_{i_{p+1,2}=0}^{i_{p+1,1}}C_{i_{p+1,1}}^{i_{p+1,2}}E\left[X_1^{k_{p+1,1}+i_{p+1,1}-i_{p+1,2}}X_2^{k_{p+1,2}}\cdots X_p^{k_{p+1,p}}\left(X_2+\cdots+X_p\right)^{i_{p+1,2}}\right].
\end{aligned}$$

这样一直把括号中的项拆分下去，并且根据假设，我们可以知道：

$$原式=(-1)^{k_{p+1,p+1}}\sum_{i_{p+1,1}=0}^{k_{p+1,p+1}}C_{k_{p+1,p+1}}^{i_{p+1,1}}(-n)^{k_{p+1,p+1}-i_{p+1,1}}\sum_{i_{p+1,2}=0}^{i_{p+1,1}}C_{i_{p+1,1}}^{i_{p+1,2}}\sum_{i_{p+1,3}=0}^{i_{p+1,2}}C_{i_{p+1,2}}^{i_{p+1,3}}\cdots\sum_{i_{p+1,p}=0}^{i_{p+1,p-1}}C_{i_{p+1,p-1}}^{i_{p+1,p}}E\left(X_1^{t_{p,1}}X_2^{t_{p,2}}\cdots X_p^{t_{p,p}}\right)$$

其中

$$\begin{cases} t_{p,j}=k_{p+1,j}+i_{p+1,j}-i_{p+1,j+1}, & j=1,2,\cdots,p-1 \\ t_{p,j}=k_{p+1,j}+i_{p,j}, & j=p \end{cases}。$$

从而$(\#)$式得证。

基金项目

本文得到国家大学生创新训练项目(No. 201311413053)资助以及中央高校基本科研业务费(2009QS02)的资助。

参考文献 (References)

[1] 茆诗松，程依明，濮晓龙 (2011) 概率论与数理统计教程. 第二版，高等教育出版社，北京, 146.
[2] 吕宏啸 (2012) 多维超几何分布协方差阵的简单求法. *佳木斯大学学报*(*自然科学版*), **6**, 944-945.
[3] 茆诗松，程依明，濮晓龙 (2011) 概率论与数理统计教程. 第二版，高等教育出版社，北京, 101-102.
[4] 李金秋，田秋菊 (2010) 超几何分布高阶矩的一种简便算法. *科学技术与工程*, **32**, 7989-7992.
[5] [美]布鲁迪，著 (2001) 冯舜玺，罗平，裴伟东，译. 组合数学. 机械工业出版社，北京, 173-185.
[6] 方开泰，许建伦 (1987) 统计分布. 科学出版社，北京, 339-344.