Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2016, 5(1), 31-40
Published Online February 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.51005

Hopf Bifurcation Analysis in the Coral Reef Delay Differential Equations (DDE) Model

Qiuju Li, Weirui Zhao

Wuhan University of Technology, Wuhan Hubei
Email: 1061567071@qq.com, wrzhao@sina.com

Received: Jan. 30th, 2016; accepted: Feb. 20th, 2016; published: Feb. 23rd, 2016

Abstract

The dynamics of the coral reef DDE model is investigated. Li *et al*. [1] proved that a sequence of Hopf bifurcations occured at the positive equilibrium as the delay increased. In this paper, by applying the center manifold theorem and the normal form theory, we provide a detailed analysis of the direction of the Hopf bifurcation and the stability of bifurcating periodic solutions at the positive equilibrium. Finally, focused parameters are obtained which determine property of the Hopf bifurcation and numerical calculation are given to justify the valid of the theoretical analysis.

Keywords

Coral Reef Models, Delay, Hopf Bifurcations, Periodic Solutions

具有时滞的珊瑚礁模型的Hopf分支分析

李秋菊，赵维锐

武汉理工大学，湖北 武汉
Email: 1061567071@qq.com, wrzhao@sina.com

收稿日期：2016年1月30日；录用日期：2016年2月20日；发布日期：2016年2月23日

摘 要

本文探讨具有时滞的珊瑚礁模型的内部平衡点产生的Hopf分支，李熊等人在文献[1]中得到了该模型内

文章引用：李秋菊，赵维锐．具有时滞的珊瑚礁模型的 Hopf 分支分析[J]．应用数学进展, 2016, 5(1): 31-40.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.51005

部平衡点的稳定性条件，并把时滞作为分支参数，得到了时滞界限，给出了Hopf分支存在的条件，但没有进一步讨论模型中内部平衡点的Hopf分支的分支方向及其周期解的稳定性。这篇文章中我们主要利用正规型方法和中心流形理论讨论内部平衡点的Hopf分支的分支方向以及周期解稳定性性质，并给出数值计算。

关键词

珊瑚礁模型，时滞，Hopf分支，正周期解

1. 引言

珊瑚礁具有重要的美学价值和商业价值[1]-[3]。它不仅为海洋增添了多样性，更在海岸暴风抵御和保护渔业方面有重大作用。数百万人依靠珊瑚礁从旅游业和渔业中获取经济收益。但是世界范围内珊瑚礁正在受着各种各样的破坏，严重影响了生活在热带近海地区数百万人的生活，而且也威胁着海洋的生态多样性。通过阅读大量的国内外文献资料不难发现，珊瑚礁遭受破坏的原因非常复杂[4] [5]，但主要有两种：一是自然灾害如飓风、海啸、全球变暖等，二是人类对环境的破坏行为，如过度捕捞、石油开发、排放污染物等等。因此很多学者都关注起了珊瑚礁的恢复问题。珊瑚礁模型的建立对于研究珊瑚礁的动态行为有极大的意义。本文将讨论珊瑚模型内部平衡点的 Hopf 分支的动力学性质，这对于整个珊瑚礁的动态过程有很高的应用价值。

2. 有关珊瑚礁模型的国内外研究现状

学者们研究发现珊瑚覆盖率的下降，主要体现在海藻的过度繁殖[1]。学者们通过监测数据[5] [6]证明了生长在珊瑚礁上的珊瑚与海藻之间的相互作用与相互竞争的过程与机制以及它们之间的共生关系。Mumby 等人在文献[1]中以珊瑚、海藻和藻坪为研究对象，全面分析了三者的相互作用关系，建立了三维常微分方程模型

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = aMC - \dfrac{gM}{M+T} + \gamma MT \\ \dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = rTC - dC - aMC \\ \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \dfrac{gM}{M+T} - \gamma MT - \gamma MC + dM \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 C,T,M 分别代表珊瑚、藻坪和海藻的覆盖率；r 是在藻坪上，珊瑚恢复生长的速率；d 是珊瑚的自然死亡率；a 是在有海藻的情况下，珊瑚增长的速率；γ 是海藻在藻坪上增长的速率；g 是捕食者(主要是指鹦嘴鱼和刺尾鱼等鱼类)对海藻的捕获率。在这个模型中，假设这个区域完全由珊瑚、藻坪和海藻覆盖，则有 $C+T+M=1$，则 $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ 可由 $-\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}$ 表示，为了不失一般性，我们令 $x=M, y=C$，所以三维常微分方程可降为下面的二维系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x\left[\gamma - \gamma x + (a-\gamma)y - \dfrac{g}{1-y}\right] \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y\left[r - d - (a+r)x - ry\right] \end{cases} \tag{2.2}$$

根据珊瑚礁模型的生态意义，定义 $\Omega=\{(x,y):0<x,0<y,x+y<1\}$。在文献[1]中，李熊等人得出了这个模型有三个边界平衡点，分别是 $O(0,0)$，$C^*\left(0,1-\frac{d}{r}\right)$，$B^*\left(1-\frac{g}{\gamma},0\right)$。这三个平衡点分别表示珊瑚和海藻全部都灭绝的状态，只有珊瑚存在的状态和只有海藻存在的状态。这三个边界平衡点没有实际意义。所以我们只需讨论这个系统的内部平衡点。在文献[1]中，令 $g_0=\frac{d}{r}a+\frac{d^2}{r^2}(\gamma-a)$ 和 $g_1=\gamma\frac{a+d}{a+r}$。当 $g_0<g<g_1$，方程在 Ω 中存在唯一的内部平衡点 $E^*=(x^*,y^*)$，且 $0<y^*<1-\frac{d}{r}$。其中

$$\begin{cases} x^*=\dfrac{-ry^*+r-d}{a+r} \\ y^*=\dfrac{a(a+r)-(2a+d)\gamma+\sqrt{a(a-4g)(a+r)^2+2a(d+2g)(a+r)\gamma+d^2\gamma^2}}{2a(a+r-\gamma)} \end{cases}$$

李熊等人对这个模型的四个平衡点的稳定性进行了分析。但是在实际动力学系统中总是不可避免的出现时间滞后现象[7]-[9]，即事物的发展趋势不仅取决于当前的状态而且还取决于过去某一时刻或某个时间段内的状态。在珊瑚礁模型中，海藻被捕时后，需要很长时间藻坪才能恢复。为了反映这个事实，在文献[1]中，李熊等人引入时滞，把时滞作为参数，将上述方程转化为时滞微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=axy-\dfrac{gx(t-\tau)}{1-y(t-\tau)}+\gamma x-\gamma x^2-\gamma xy=H_1(x,y,x(t-\tau),y(t-\tau)) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ry-rxy-\gamma y^2-dy-axy=H_2(x,y,x(t-\tau),y(t-\tau)) \end{cases} \tag{2.3}$$

李熊等人在文献[1]中证讨论了在 $\tau>0$ 时，内部平衡点的稳定性情况并且证明存在两个序列 $\tau_{j,1}$，$\tau_{j,2}\,(j=0,1,2,\cdots)$ 当时滞 $\tau=\tau_{j,1}$ 或 $\tau_{j,2}\,(j=0,1,2,\cdots)$ 时，会产生 Hopf 分支，并会出现非奇异的周期解。

3. Hopf 分支的分支方向及周期解的稳定性

在这一部分，从 $\tau_{j,1}$，$\tau_{j,2}\,(j=0,1,2,\cdots)$ 中任取一个序列，不妨设当 $\tau=\tau_j=\tau_{j,1}\,(j=0,1,2,\cdots)$，我们用正规型方法和中心流形理论讨论内部平衡点的 Hopf 分支的分支方向及其周期解的稳定性。

令 $\bar{x}(t)=x(t)-x^*$，$\bar{y}(t)=y(t)-y^*$，并把(2.3)式在(0,0)处线性化，则系统(2.3)可转化为

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=\left[\gamma-2\gamma x^*+(a-\gamma)y^*\right]x(t)+(a-\gamma)x^*y(t)+\dfrac{g}{y^*-1}x(t-\tau)-\dfrac{gx^*}{(y^*-1)^2}y(t-\tau) \\ \dot{y}(t)=-(a+r)y^*x(t)+\left[r-d-(a+r)x^*-2ry^*\right]y(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $A_1=\begin{pmatrix} \gamma-2\gamma x^*+(a-\gamma)y^* & (a-\gamma)x^* \\ -(a+r)y^* & r-d-(a+r)x^*-2ry^* \end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix} \dfrac{-g}{1-y^*} & \dfrac{-gx^*}{(1-y^*)^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

为了计算方便，不妨设 $A_1=\begin{bmatrix} B_1 & B_4 \\ B_2 & B_3 \end{bmatrix}$，$A_2=\begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，则(3.1)式可转化为

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=B_1x(t)+B_4y(t)+D_1x(t-\tau)+D_2y(t-\tau) \\ \dot{y}(t)=B_2x(t)+B_3y(t) \end{cases} \tag{3.2}$$

然后令 $u_1(t)=x(t\tau)$，$u_2(t)=y(t\tau)$，$\tau=\tau_j+\mu$。则(3.2)式转化为

$$\begin{cases}\dot{u}_1(t)=\tau\left[B_1u_1(t)+B_4u_2(t)+D_1u_1(t-\tau)+D_2u_2(t-\tau)\right]\\ \dot{u}_2(t)=\tau\left[B_2u_1(t)+B_3u_2(t)\right]\end{cases}\tag{3.3}$$

方程(3.2)在 $C=C\left(\left[-1,0\right],R^2\right)$ 上可以写成下面的泛函微分方程

$$\dot{u}(t)=L_\mu(u_t)+F(\mu,u_t)\tag{3.4}$$

其中 $u(t)=\left(u_1(t),u_2(t)\right)^{\mathrm{T}}\in C$，$u_t(\theta)=u(t+\theta)=\left(u_1(t+\theta),u_2(t+\theta)\right)^{\mathrm{T}}\in C$，并且

$L_\mu:C\to R$，$F:C\times R\to R$ 定义如下

$$L_\mu\phi=\tau\left[\begin{pmatrix}B_1 & B_4\\ B_2 & B_3\end{pmatrix}\phi(0)+\begin{pmatrix}D_1 & D_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\phi(-1)\right]\tag{3.5}$$

和

$$f(\mu,\phi)=\tau\begin{pmatrix}K\\ -(a+r)\phi_1(0)\phi_2(0)-r\phi_2^2(0)\end{pmatrix}\tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}K=&-\gamma\phi_1^2(0)+(a-\gamma)\phi_1(0)\phi_2(0)-\frac{g}{\left(y^*-1\right)^2}\phi_1(-1)\phi_2(-1)+\frac{gx^*}{\left(y^*-1\right)^3}\phi_2^2(-1)\\&+\frac{g}{\left(y^*-1\right)^3}\phi_1(-1)\phi_2^2(-1)-\frac{gx^*}{\left(y^*-1\right)^4}\phi_2^3(-1)\end{aligned}$$

其中 $\phi(0)=\left(\phi_1(0),\phi_2(0)\right)^{\mathrm{T}}\in C$，由 Riesz 表示定理，存在关于 $\theta\in[-1,0]$ 的有界变差函数 $\eta(\theta,\mu)$，使得

$$L_\mu\phi=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}\eta(\mu,\theta)\varphi(\theta),\ \phi\in C\tag{3.7}$$

根据文献[10] [11]，这里，可以选取

$$\eta(\theta,\mu)=\tau\begin{pmatrix}B_1 & B_4\\ B_2 & B_3\end{pmatrix}\delta(\theta)-\tau\begin{pmatrix}D_1 & D_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\delta(\theta+1)\tag{3.8}$$

其中 $\delta(\cdot)$ 为 Delta 函数，对于 $\phi\in C\left(\left[-1,0\right],R^2\right)$，定义

$$A(\mu)\phi=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\phi(\theta)}{\mathrm{d}\theta},\theta\in[-1,0)\\ \int_{-1}^{0}\mathrm{d}\eta(s,\mu)\phi(s),\theta=0\end{cases}\tag{3.9}$$

和

$$R\phi=\begin{cases}0,\ \theta\in[-1,0)\\ F(\mu,\theta),\theta=0\end{cases}\tag{3.10}$$

这个方程(3.4)等价于下面的抽象微分方程

$$\dot{u}_t=A(\mu)u_t+R(\mu)u_t\tag{3.11}$$

其中 $u_t(\theta)=u(t+\theta),\theta\in[-1,0]$。

对于 $\psi\in C\left(\left[0,1\right],\left(R^2\right)^*\right)$，定义

$$A^*\psi(s)=\begin{cases}-\dfrac{\mathrm{d}\psi(s)}{\mathrm{d}s},0<s\le 1\\ \int_{-1}^{0}\mathrm{d}\eta^{\mathrm{T}}(t,0)\psi(-t),s=0\end{cases} \tag{3.12}$$

这里，对于 $\phi\in C\left([-1,0],R^2\right)$ 和 $\psi\in C\left([0,1],\left(R^2\right)^*\right)$，利用双线性形式

$$\langle\psi,\phi\rangle=\bar{\psi}(0)\phi(0)-\int_{-1}^{0}\int_{\xi=0}^{\theta}\bar{\psi}(\xi-\theta)\mathrm{d}\eta(\theta,0)\varphi(\xi) \tag{3.13}$$

其中 A^* 和 $A=A(0)$ 是伴随算子，$\pm i\omega_0\tau_j$ 是 $A(0)$ 的特征值。显然 $q(\theta)=(1,\alpha)^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{i\omega_0\tau_j\theta}$ 是 A 对于 $i\omega_0\tau_j$ 的特征向量，$q^*(s)=M\left(1,\alpha^*\right)\mathrm{e}^{i\omega_0\tau_j s}$ 是 A^* 对于 $-i\omega_0\tau_j$ 的向量，且有 $\langle q^*,q\rangle=1$，$\langle q^*,\bar{q}\rangle=0$。通过(3.7)和(3.8)，则有下面的计算

$$\begin{aligned}A(0)q(0)&=i\omega_0\tau_j q(0)=i\omega_0\tau_j(1,\alpha)^{\mathrm{T}}=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}\eta(\theta,0)q(\theta)\\&=\tau_j\left[\begin{pmatrix}B_1&B_4\\B_2&B_3\end{pmatrix}q(0)+\begin{pmatrix}D_1&D_2\\0&0\end{pmatrix}q(-1)\right]\\&=\tau_j\begin{pmatrix}B_1+B_4\alpha+\left(D_1+D_2\alpha\right)\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau_j}\\B_2+B_3\alpha\end{pmatrix}\end{aligned}$$

我们可以得到 $\alpha=\dfrac{B_2}{i\omega_0-B_3}$。另一方面

$$\begin{aligned}A^*(0)q^{*\mathrm{T}}(0)&=-i\omega_0\tau_j q^{*\mathrm{T}}(0)=-i\omega_0\tau_j(1,\alpha)^{\mathrm{T}}=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}\eta^{\mathrm{T}}(\theta,0)q^{*\mathrm{T}}(-\theta)\\&=\tau_j\left[\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_4&B_3\end{pmatrix}q^{*\mathrm{T}}(0)+\begin{pmatrix}D_1&0\\D_2&0\end{pmatrix}q^{*\mathrm{T}}(1)\right]\\&=\tau_j M\begin{pmatrix}B_1+D_1\mathrm{e}^{i\omega_0\tau_j}+B_2\alpha^*\\B_4+D_2\mathrm{e}^{i\omega_0\tau_j}+B_3\alpha^*\end{pmatrix}\end{aligned}$$

我们可以得到 $\alpha^*=-\dfrac{B_4+D_2\mathrm{e}^{i\omega_0\tau_j}}{i\omega_0+B_3}$。为了确保 $\langle q^*(\theta),q(\theta)\rangle=1$，我们需要确定 M 的值，根据(3.13)，则

$$\begin{aligned}\langle q^*(\theta),q(\theta)\rangle&=\bar{q}^*(0)q(0)-\int_{-1}^{0}\int_{\xi=0}^{\theta}\bar{q}^*(\xi-\theta)\mathrm{d}\eta(\theta)q(\xi)\mathrm{d}\xi\\&=\bar{M}\left(1,\bar{\alpha}^*\right)(1,\alpha)^{\mathrm{T}}-\int_{-1}^{0}\int_{\xi=0}^{\theta}\bar{M}\left(1,\bar{\alpha}^*\right)\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau_j(\xi-\theta)}\mathrm{d}\eta(\theta)(1,\alpha)^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{i\omega_0\tau_j\xi}\mathrm{d}\xi\\&=\bar{M}\left\{1+\bar{\alpha}^*\alpha+\tau_j\left(D_1\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau_j}+\alpha D_2\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau_j}\right)\right\}\end{aligned}$$

我们取 $\bar{M}=\left\{1+\bar{\alpha}^*\alpha+\tau_j\left(D_1\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau_j}+\alpha D_2\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau_j}\right)\right\}^{-1}$。

为了实现谱分解，对于方程(3.11)在 $\mu=0$ 时的解 u_t，定义

$$z(t)=\langle q^*,u_t\rangle \tag{3.14}$$

并记

$$W(t,\theta)=u_t(\theta)-2\mathrm{Re}\{z(t)q(\theta)\}$$

在中心流形 C_0 上，有

$$W(t,\theta)=W(z(t),\bar{z}(t),\theta)=W_{20}(\theta)\frac{z^2}{2}+W_{11}(\theta)z\bar{z}+W_{02}(\theta)\frac{\bar{z}^2}{2}+\cdots \tag{3.15}$$

对于方程(3.11)在中心流形上的流由下列方程所确定

$$\begin{aligned}z(t)&=\langle q^*,u_t\rangle=\langle q^*,A(\mu)u_t+R(\mu)u_t\rangle=\langle q^*,A(\mu)u_t\rangle+\langle q^*,R(\mu)u_t\rangle\\&=\langle A_\mu{}^*q^*,u_t\rangle+\bar{q}^*(0)f(0,u(t))=i\omega_0\tau_j z(t)+\bar{q}^*(0)f(0,u(t))\\&=i\omega_0\tau_j z(t)+\bar{q}^*(0)f(z,\bar{z})\end{aligned} \tag{3.16}$$

令

$$g(z,\bar{z})=\bar{q}^*(0)f(z,\bar{z})=g_{20}\frac{z^2}{2}+g_{11}z\bar{z}+g_{02}\frac{\bar{z}^2}{2}+g_{21}\frac{z^2\bar{z}}{2}+\cdots \tag{3.17}$$

由 $u_t=(u_{1t}(\theta),u_{2t}(\theta))=W(t,\theta)+zq(\theta)+\bar{z}\bar{q}(\theta)$ 和 $q(\theta)=(1,\alpha)^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{i\omega_0\tau_j\theta}$，我们可以得到

$$u_{1t}(0)=z+\bar{z}+W_{20}^{(1)}(0)\frac{z^2}{2}+W_{11}^{(1)}(0)z\bar{z}+W_{02}^{(1)}(0)\frac{\bar{z}^2}{2}+o(|(z,\bar{z})|)$$

$$u_{2t}(0)=\alpha z+\bar{\alpha}\bar{z}+W_{20}^{(2)}(0)\frac{z^2}{2}+W_{11}^{(2)}(0)z\bar{z}+W_{02}^{(2)}(0)\frac{\bar{z}^2}{2}+o(|(z,\bar{z})|^3)$$

$$u_{1t}(-1)=\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau_j}z+\mathrm{e}^{i\omega_0\tau_j}\bar{z}+W_{20}^{(1)}(-1)\frac{z^2}{2}+W_{11}^{(1)}(-1)z\bar{z}+W_{02}^{(1)}(-1)\frac{\bar{z}^2}{2}+o(|(z,\bar{z})|^3)$$

$$u_{2t}(-1)=\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau_j}\alpha z+\mathrm{e}^{i\omega_0\tau_j}\bar{\alpha}\bar{z}+W_{20}^{(2)}(-1)\frac{z^2}{2}+W_{11}^{(2)}(-1)z\bar{z}+W_{02}^{(2)}(-1)\frac{\bar{z}^2}{2}+o(|(z,\bar{z})|^3)$$

根据(3.6)中 $f(\mu,u_t)$ 的定义，和(3.17)对比系数，我们可以得到

$$g_{20}=2\bar{M}\tau_j\left[-\gamma+(a-\gamma)\alpha-\frac{g}{(y^*-1)^2}\alpha\mathrm{e}^{-2i\omega_0\tau_j}+\frac{gx^*}{(y^*-1)^3}\alpha^2\mathrm{e}^{-2i\omega_0\tau_j}-\bar{\alpha}^*\alpha(a+r)-\bar{\alpha}^*r\alpha^2\right]$$

$$g_{11}=\bar{M}\tau_j\left[-2\gamma+\left(a-\gamma-\frac{g}{(y^*-1)^2}\right)(\alpha+\bar{\alpha})+\frac{2gx^*}{(y^*-1)^2}\bar{\alpha}\alpha-\alpha^*(a+r)(\bar{\alpha}+\alpha)-2\bar{\alpha}^*r\alpha\bar{\alpha}\right]$$

$$g_{02}=2\bar{M}\tau_j\left[-\gamma+(a-\gamma)\bar{\alpha}-\frac{g}{(y^*-1)^2}\bar{\alpha}\mathrm{e}^{2i\omega_0\tau_j}+\frac{gx^*}{(y^*-1)^3}\bar{\alpha}^2\mathrm{e}^{2i\omega_0\tau_j}-\alpha^*\alpha(a+r)-\bar{\alpha}^*r\bar{\alpha}^2\right]$$

$$\begin{aligned}g_{21}=2\bar{M}\tau_j\Bigg\{&-\gamma\left[2W_{11}^{(1)}(0)+W_{20}^{(1)}(0)\right]+(\alpha-\gamma)\left[W_{11}^{(2)}(0)+W_{11}^{(1)}(0)\alpha+\frac{W_{20}^{(2)}(0)}{2}+\frac{W_{20}^{(1)}(0)}{2}\bar{\alpha}\right]\\&-\frac{g}{(y^*-1)^2}\left[\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau_j}W_{11}^{(2)}(-1)+\mathrm{e}^{i\omega_0\tau_j}\frac{W_{20}^{(2)}(-1)}{2}+\mathrm{e}^{i\omega_0\tau_j}\bar{\alpha}\frac{W_{20}^{(2)}(-1)}{2}+\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau_j}W_{11}^{(1)}(-1)\right]\\&+\frac{gx^*}{(y^*-1)^3}\left[2\alpha\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau_j}W_{11}^{(2)}(-1)+\bar{\alpha}\mathrm{e}^{i\omega_0\tau_j}W_{20}^{(2)}(-1)\right]+\frac{g}{(y^*-1)^3}\left(2\alpha\bar{\alpha}\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau_j}+\alpha^2\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau_j}\right)\\&-\frac{3g\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau_j}\alpha^2\bar{\alpha}}{(y^*-1)^4}-\bar{\alpha}^*(\alpha+r)\left[W_{11}^{(2)}(0)+W_{11}^{(1)}(0)\alpha+\frac{W_{20}^{(2)}(0)}{2}+\frac{W_{20}^{(1)}(0)}{2}\bar{\alpha}\right]\\&-\bar{\alpha}^*r\left[2\alpha W_{11}^{(2)}(0)+W_{20}^{(2)}(0)\bar{\alpha}\right]\Bigg\}\end{aligned}$$

在上述表达式g_{21}中，我们并不知道$W_{20}(\theta)$和$W_{11}(\theta)$的值，所以我们还要进一步计算出来。

$$\dot{W}=\dot{u}_t-\dot{z}q-\dot{\bar{z}}\bar{q}=\begin{cases}AW-2\operatorname{Re}\left\{\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)\right\},\theta\in[-1,0)\\AW-2\operatorname{Re}\left\{\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)\right\}+f_0,\theta=0\end{cases}=AW+H(z,\bar{z},\theta)\tag{3.18}$$

其中

$$H(z,\bar{z},\theta)=H_{20}(\theta)\frac{z^2}{2}+H_{11}(\theta)z\bar{z}+H_{02}(\theta)\frac{\bar{z}^2}{2}+\cdots。\tag{3.19}$$

另一方面，在中心流形C_0上，在原点附近，有

$$\dot{W}=W_z\dot{z}+W_{\bar{z}}\dot{\bar{z}}\tag{3.20}$$

把(3.15)代入(3.20)和(3.18)对比系数，我们可以得到

$$\left(A-2i\omega_0\tau_j\right)+W_{20}(\theta)=-H_{20}(\theta)\tag{3.21}$$

$$AW_{11}(\theta)=-H_{11}(\theta)\tag{3.22}$$

当$\theta\in[-1,0)$时

$$\begin{aligned}H(z,\bar{z},\theta)&=-2\operatorname{Re}\left\{\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)\right\}=-\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)-q^*(0)\bar{f}_0\bar{q}(\theta)\\&=-\left(g_{20}\frac{z^2}{2}+g_{11}z\bar{z}+g_{02}\frac{\bar{z}^2}{2}+g_{21}\frac{z^2\bar{z}}{2}+\cdots\right)q(\theta)\\&-\left(\bar{g}_{20}\frac{\bar{z}^2}{2}+\bar{g}_{11}z\bar{z}+\bar{g}_{02}\frac{z^2}{2}+\bar{g}_{21}\frac{\bar{z}^2z}{2}+\cdots\right)\bar{q}(\theta)\end{aligned}\tag{3.23}$$

将(3.19)和(3.23)对比系数，则可得到

$$H_{20}(\theta)=-g_{20}q(\theta)-\bar{g}_{02}\bar{q}(\theta)\tag{3.24}$$

$$H_{11}(\theta)=-g_{11}q(\theta)-\bar{g}_{11}\bar{q}(\theta)\tag{3.25}$$

根据(3.21)和(3.24)以及A的定义，我们得到

$$\dot{W}_{20}(\theta)=2i\omega_0W_{20}(\theta)+g_{20}q(\theta)+\bar{g}_{02}\bar{q}(\theta)$$

所以可以得到

$$W_{20}(\theta)=\frac{ig_{20}}{\omega_0\tau_j}q(0)\mathrm{e}^{i\omega_0\tau_j\theta}+\frac{i\bar{g}_{02}}{3\omega_0\tau_j}\bar{q}(0)\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau_j\theta}+E_1\mathrm{e}^{2i\omega_0\tau_j\theta}\tag{3.26}$$

其中$E_1=\left(E_1^{(1)},E_1^{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\in R^2$是一个连续的变量。

根据(3.22)和(3.25)以及A的定义，我们也可得到

$$\dot{W}_{11}(\theta)=g_{11}q(\theta)+\bar{g}_{11}\bar{q}(\theta)$$

所以有

$$W_{11}(\theta)=\frac{-ig_{11}}{\omega_0\tau_j}q(0)\mathrm{e}^{i\omega_0\tau_j\theta}+\frac{i\bar{g}_{11}}{3\omega_0\tau_j}\bar{q}(0)\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau_j\theta}+E_2\tag{3.27}$$

其中$E_2=\left(E_2^{(1)},E_2^{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\in R^2$是一个连续的变量。

由于$W_{20}(\theta)$和$W_{11}(\theta)$在$[-1,0]$上连续，可以得到

$$W_{20}(0)=\frac{ig_{20}}{\omega_0\tau_j}q(0)+\frac{i\bar{g}_{02}}{3\omega_0\tau_j}\bar{q}(0)+E_1, \quad W_{11}(0)=\frac{-ig_{11}}{\omega_0\tau_j}q(0)+\frac{i\bar{g}_{11}}{\omega_0\tau_j}\bar{q}(0)+E_2$$

我们要求出E_1和E_2的值。根据(3.9)中A的定义，我们可以得到

$$\int_{-1}^{0}\mathrm{d}\eta(\theta)W_{20}(\theta)=2i\omega_0\tau_jW_{20}(0)-H_{20}(0) \tag{3.28}$$

和

$$\int_{-1}^{0}\mathrm{d}\eta(\theta)W_{11}(\theta)=-H_{11}(0) \tag{3.29}$$

其中$\eta(\theta)=\eta(\theta,0)$。所以，根据(3.18)和(3.19)，得到

$$H_{20}(0)=-g_{20}q(0)-\bar{g}_{02}\bar{q}(0)+2\tau_j(H_1,H_2)^{\mathrm{T}} \tag{3.30}$$

$$H_{11}(0)=-g_{11}q(0)-\bar{g}_{11}\bar{q}(0)+2\tau_j(P_1,P_2)^{\mathrm{T}} \tag{3.31}$$

其中

$$\begin{aligned}
H_1&=-\gamma+(a-\gamma)\alpha-\frac{g}{(y^*-1)^2}\alpha\mathrm{e}^{-2i\omega_0\tau_j}+\frac{gx^*}{(y^*-1)^3}\alpha^2\mathrm{e}^{-2i\omega_0\tau_j}\\
H_2&=-\alpha(a+r)-r\alpha^2\\
P_1&=\gamma+\frac{(a-\gamma)(\alpha+\bar{\alpha})}{2}-\frac{g}{2(y^*-1)^2}(\alpha+\bar{\alpha})+\frac{gx^*}{(y^*-1)^3}\alpha\bar{\alpha}\\
P_2&=-\frac{(a+\gamma)(\alpha+\bar{\alpha})}{2}-r\alpha\bar{\alpha}
\end{aligned}$$

将(3.26)和(3.30)带入(3.28)中，我们可得到下面式子

$$\left(i\omega_0\tau_jI-\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{i\omega_0\tau_j\theta}\mathrm{d}\eta(\theta)\right)q(0)=0,$$

我们可以得到

$$\left(2i\omega_0\tau_jI-\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{2i\omega_0\tau_j\theta}\mathrm{d}\eta(\theta)\right)E_1=2\tau_j(H_1,H_2)^{\mathrm{T}}$$

也就是

$$\tau_j\begin{pmatrix}2i\omega_0-B_1-D_1\mathrm{e}^{-2i\omega_0\tau_j} & -B_4-D_2\mathrm{e}^{-2i\omega_0\tau_j}\\ -B_2 & 2i\omega_0-B_3\end{pmatrix}E_1=2\tau_j(H_1,H_2)^{\mathrm{T}}$$

解上述方程，可得到

$$E_1^{(1)}=\frac{2}{G}\begin{vmatrix}H_1 & -B_4-D_2\mathrm{e}^{-2i\omega_0\tau_j}\\ H_2 & 2i\omega_0-B_3\end{vmatrix}, \quad E_1^{(2)}=\frac{2}{G}\begin{vmatrix}2i\omega_0-B_1-D_1\mathrm{e}^{-2i\omega_0\tau_j} & H_1\\ -B_2 & H_2\end{vmatrix}$$

其中$G=\begin{vmatrix}2i\omega_0-B_1-D_1\mathrm{e}^{-2i\omega_0\tau_j} & -B_4-D_2\mathrm{e}^{-2i\omega_0\tau_j}\\ -B_2 & 2i\omega_0-B_3\end{vmatrix}$。同理，将(3.27)和(3.31)带入(3.29)中，我们可得到下面式子

$$\left(-i\omega_0\tau_jI-\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau_j\theta}\mathrm{d}\eta(\theta)\right)\bar{q}(0)=0$$

也就是

$$\left(\int_{-1}^{0} \mathrm{d}\eta(\theta)\right) E_2 = -2\tau_j (P_1, P_2)^{\mathrm{T}}$$

即

$$\tau_j \begin{pmatrix} B_1 + D_1 & B_4 + D_2 \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix} E_2 = -2\tau_j (P_1, P_2)^{\mathrm{T}}$$

因此，

$$E_2^{(1)} = -\frac{2}{N} \begin{vmatrix} P_1 & B_4 + D_2 \\ P_2 & B_3 \end{vmatrix}, \quad E_2^{(2)} = -\frac{2}{N} \begin{vmatrix} B_1 + D_1 & P_1 \\ B_2 & P_2 \end{vmatrix}$$

其中 $N = \begin{vmatrix} B_1 + D_1 & B_4 + D_2 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix}$。因此，我们可以决定 g_{21}。所以，我们可以计算出下列值

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0\tau_j}\left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{20}|^2}{3}\right) + \frac{g_{21}}{2}, \quad \mu_2 = -\frac{\mathrm{Re}(c_1(0))}{\mathrm{Re}(\lambda'(\tau_j))}$$

$$\beta_2 = 2\,\mathrm{Re}(c_1(0)), \quad T_2 = -\frac{\mathrm{Im}\, c_1(0) + \mu_2 \,\mathrm{Im}\,\lambda'(\tau_j)}{\omega_0\tau_j} \tag{3.32}$$

其中 μ_2，β_2，T_2 决定了 Hopf 分支的属性，其中 μ_2 决定了分支方向，β_2 决定了分支的稳定性，T_2 决定了周期的增加或减少。

4. 数值计算

在这一节，我们计算在第一个临界值 $\tau_0 = \tau_{01} = 6.9043$ 处 Hopf 分支的性质。在方程(2.3)中，取 $a = 0.1$，$\gamma = 0.8$，$r = 1$，$d = 0.44$，$g = 0.353$。此时唯一的内部平衡点 $E^* = (0.4111, 0.1078)$。由(3.32)直接可以计算出

$$g_{20} = -0.1570 + 4.3055\mathrm{i}, \quad g_{11} = 0.3432 + 3.3502\mathrm{i}, \quad g_{02} = -1.1156 + 3.3091\mathrm{i},$$

$$g_{21} = -1.4018\mathrm{e}+001 + 1.1562\mathrm{e}+002\mathrm{i}, \quad c_1(0) = -7.3446 + 42.5229\mathrm{i}$$

且

$$\mu_2 = -420.7200 < 0, \quad \beta_2 = -14.6892 < 0, \quad T_2 = -36.4996,$$

所以在系统(2.3)在 τ_0 处的分支方向是向前的，分支周期解是轨道渐近稳定的，并且分支周期是增加的。

5. 结论

本文主要讨论了珊瑚礁模型内部平衡点的 Hopf 分支的分支方向以及周期解稳定性性质，并通过数值计算探讨分岔分析，得到了 Hopf 分支的一些基本性质，更好了解珊瑚礁模型的动力学性质，希望为珊瑚礁的保护提供指导性意见。

参考文献 (References)

[1] Li, X., Wang, H., Zhang, Z., *et al.* (2014) Mathematical Analysis of Coral Reef Corals. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **416**, 352-373. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.02.053

[2] Blackwood, J.C. and Hastings, A. (2011) The Effect of Time Delays on Caribbean Coral-Algal Interactions. *Journal of*

Theoretical Biology, **273**, 37-43. http://dx.doi.org/10.1016/j.jtbi.2010.12.022

[3] Hughes, T.P., Baird, A.H. and Bellwood, D.R. (2003) Climate Change, Human Impacts, and the Resilience of Coral Reefs. *Science*, **301**, 929-933. http://dx.doi.org/10.1126/science.1085046

[4] Blackwood, J.C., Hastings, A. and Mumby, P.J. (2012) The Effect of Fishing on Hysteresis in Caribbean Coral Reefs. *Theoretical Ecology*, **5**, 105-114. http://dx.doi.org/10.1007/s12080-010-0102-0

[5] Gardner, T.A., Cote, I.M. and Gill, J.A. (2003) Long-Term Region-Wide Declines in Caribbean Corals. *Science*, **301**, 958-960. http://dx.doi.org/10.1126/science.1086050

[6] Singh, A., Wang, H., Morrison, W. and Weiss, H. (2012) Modeling Fish Biomass Structure at Near Pristine Coral Reefs and Degradation by Fishing. *Journal of Biological Systems*, **20**, 21-36. http://dx.doi.org/10.1142/S0218339011500318

[7] 范猛，王克. 一类具有 Holling II 型功能性反应的捕食－食饵系统全局周期解的存在性[J]. 数学物理学报, 2001, 21(4): 492-497.

[8] 赵洪涌，王广兰. 具有变时滞 Hopfield 神经网络的概周期解存在性与全局吸引性[J]. 数学物理学报, 2004, 24(6): 723-729.

[9] 陈万义. 一类 Hopfield 型时滞神经网络模型的全局渐近稳定性[J]. 生物数学学报, 2004, 19(2): 175-179.

[10] 邓谨，王林山，徐道义. 具有 S 型分布时滞的 Hopfield 神经网络模型的渐近行为[J]. 四川大学学报, 2004, 41(1): 319-402.

[11] 段文英. 关于具时滞捕食－被捕食系统的稳定性与 Hop f 分支[J]. 生物数学学报, 2004, 19(1): 87-92.