Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2016, 5(3), 399-405
Published Online August 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.53049

Vertex Disjoint Quadrilaterals in Graph

Xiaoning Yi, Jin Yan

School of Mathematics, Shandong University, Jinan Shandong
Email: yxnyixiaoning@163.com, yanj@sdu.edu.cn

Received: Jul. 28th, 2016; accepted: Aug. 18th, 2016; published: Aug. 25th, 2016

Abstract

Let G be a graph of order n with $4k+1 \le n \le 4k+4$, where k is a positive integer. Suppose that $\sigma_2(G) \ge n$, then G contains k independent quadrilaterals.

Keywords

Vertex-Disjoint, Cycle, Quadrilaterals

图中点不交的4-圈

衣晓宁，颜　谨

山东大学数学学院，山东　济南
Email: yxnyixiaoning@163.com, yanj@sdu.edu.cn

收稿日期：2016年7月28日；录用日期：2016年8月18日；发布日期：2016年8月25日

摘　要

令G是一个顶点数为n的图，满足$4k+1 \le n \le 4k+4$，k是任意正整数。假设$\sigma_2(G) \ge n$，则图G包含k个独立的4-圈。

文章引用: 衣晓宁, 颜谨. 图中点不交的 4-圈[J]. 应用数学进展, 2016, 5(3): 399-405.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.53049

关键词

点不交，圈，4-圈

1. 引言

本文中的图都为简单图。令 $G(V,E)$ 是一个简单图。图 G 的顶点数和边数分别为 $|G|=|V|$ 和 $e(G)=|E|$。图 G 的一系列子图称为独立的如果任意两个子图在 G 中没有公共点。令 G_1 和 G_2 是 G 的子图。如果 G_1 和 G_2 在 G 中没有公共点，我们定义 $e(G_1,G_2)$ 为 G_1 和 G_2 之间的边数。令 H 是 G 的子图并且 $u\in V(G)$，$N(u,H)$ 表示 u 在 H 中的邻点。令 $d(u,H)=e(u,H)=|N(u,H)|$。对 G 中子图 U，令 $N(U,H)=\bigcup_{u\in U} N(u,H)$，且 $G[V(U)]$ 表示 $V(U)$ 的导出子图。$\delta(G)$ 表示图 G 的最小度，同时我们定义

$$\sigma_2(G)=\min\{d(x)+d(y)\mid x\in V, y\in V, xy\notin E\}。$$

我们使用 C_n 和 P_n 表示分别顶点数为 n 的圈和路。而且 $t(C)$ 表示圈 C 中弦的个数。对于任意子图 U,R，我们用符号 $\{U,R\}$ 是表示 $G[V(U\cup R)]$ 是最优的，如果任意 $G[V(U\cup R)]$ 中子图 $U'\cong U$，$R'\cong R$ 满足 $t(U)\ge t(U'),t(R)\ge t(R')$。$l(C)$ 和 $l(P)$ 分别表示圈 C 和路 P 的长度，即 $l(C)=|C|$ 和 $l(P)=|P|-1$。令 B 是顶点数为 5 的包含两个边不交三角形的图，B 的中心点是度为 4 的点。令 D 是顶点数为 5，由 B 删除一条与中心点相连的边获得的图。

图的哈密顿圈问题是图论研究中最著名的问题之一。而图中包含指定长度的圈问题则是哈密顿圈问题的延伸。1963 年，Corrádi 和 Hajnal 给出了如下结论。

定理 1 [1] 设 G 是一个顶点为 n 的图。如果 $n\ge 3k$ 并且 $\delta(G)\ge 2k$，那 G 含有 k 个点不交的圈。

在 2004 年，文章[2]证明了定理：

定理 2 [2] 设 G 是一个顶点为 n 的图，满足 $4k+1\le n\le 4k+4$，k 为正整数。假设 $\delta(G)\ge 2k+1$，那 G 含有 k 个独立的 4-圈。

本文对定理 2 的度条件加以改进，得到如下命题。

定理 3 设 G 是一个顶点为 n 的图，满足 $4k+1\le n\le 4k+4$，k 为正整数。假设 $\sigma_2(G)\ge n$，那 G 含有 k 个独立的 4-圈。

其它相关结果在[3]-[5]中有介绍。同时文中其它未见说明的符号请参见[6]。

2. 引理

令 $G=(V,E)$ 是一个顶点数为 n 的图，满足 $4k+1\le n\le 4k+4$。为了证明，我们先使用如下引理。

引理 1 [2] 令 Q 和 C 是图 G 中两个相互独立的圈，满足 $Q\cong C_4$，$C\cong C_5$，$e(Q,C)\ge 11$ 和 $\{Q,C\}$ 是最优的。假设 $G[V(Q\cup C)]\not\supseteq 2C_4$，则存在 $Q=a_1a_2a_3a_4a_1$ 和 $C=x_1x_2x_3x_4x_5x_1$，使得 $e(x_4x_5,Q)=0$，对任意 $i\in\{1,2,3\}$ 成立 $\{a_1,a_2,a_3\}\subseteq N(x_i)$，$a_2a_4\in E(G)$。同时，如果 $e(x_2,Q)=4$ 则 $a_1a_3\in E(G)$。

引理 2 [2] 令 Q_1，Q_2 和 C 是图 G 中三个相互独立的圈，满足 $Q_1\cong C_4$，$Q_2\cong C_4$ 和 $C\cong C_5$，并且使得 $\{Q_1,Q_2,C\}$ 是最优的。令 $Q_1=a_1a_2a_3a_4a_1$ 和 $C=x_1x_2x_3x_4x_5x_1$，它们满足 $e(x_1x_2x_3,Q_1)\ge 11$，对所有 $i\in\{1,2,3\}$ 成立 $\{a_1,a_2,a_3\}\subseteq N(x_i)$，并且 $e(a_2a_3,Q_2)+e(x_4x_5,Q_2)\ge 9$。假设 $G[V(Q_1\cup Q_2\cup C)]$ 不包含 $3C_4$ 和 $2C_4\cup B$。则存在 $Q_2=b_1b_2b_3b_4b_1$ 满足 $b_2b_4\notin E(G)$，$N(\{x_4,x_5\},Q_2)\subseteq\{b_1,b_3\}$，$N(a_2,Q_2)\subseteq\{b_1,b_2,b_3\}$ 和

$N(a_3,Q_2)\subseteq\{b_1,b_3,b_4\}$。

引理 3 [3] 令 P_1 和 P_2 是图 G 中相互独立的两条路，满足 $l(P_1)=1$ 和 $1\le l(P_2)\le 2$。如果 $e(P_1,P_2)\ge 3$，则 $G[V(P_1\cup P_2)]$ 包含一个 4-圈。

引理 4 [2] 令 Q_1,Q_2,Q_3 和 C 是图 G 中四个相互独立的圈，满足 $Q_1\cong Q_2\cong Q_3\cong C_4$，$C\cong C_5$，并且使得 $\{Q_1,Q_2,Q_3,C\}$ 是最优的。令 $Q_1=a_1a_2a_3a_4a_1$，$Q_2=b_1b_2b_3b_4b_1$ 和 $C=x_1x_2x_3x_4x_5x_1$。满足 $e(x_1x_2x_3,Q_1)\ge 11$，$e(a_2a_3,Q_2)+e(x_4x_5,Q_2)\ge 9$ 和 $e(C+b_2+b_4,Q_3)\ge 15$，同时成立 $\{a_1,a_2,a_3\}\subseteq N(x_i)$ 对任意 $i\in\{1,2,3\}$，$N(\{x_4,x_5\},Q_2)\subseteq\{b_1,b_3\}$，$N(a_2,Q_2)\subseteq\{b_1,b_2,b_3\}$ 和 $N(a_3,Q_2)\subseteq\{b_1,b_3,b_4\}$。假设 $G[V(Q_1\cup Q_2\cup Q_3\cup C)]$ 不包含 $4C_4$ 和 $3C_4\cup B$，则存在 $Q_3=c_1c_2c_3c_4c_1$ 和 $\{b_2,b_4\}=\{b_k,b_f\}$ 满足 $c_2c_4\notin E(G)$，$N(b_k,Q_3)=\{c_1,c_2,c_3\}$，$N(b_f,Q_3)=\{c_1,c_3\}$，$d(c_1,C)=d(c_3,C)=5$ 和 $e(c_2c_4,C)=0$。

引理 5 [2] 令 Q_1,Q_2,Q_3,Q_4 和 C 是图 G 中五个相互独立的圈，满足 $Q_1\cong Q_2\cong Q_3\cong Q_4\cong C_4$ 和 $C\cong C_5$，而且使得 $\{Q_1,Q_2,Q_3,Q_4,C\}$ 是最优的。令 $Q_1=a_1a_2a_3a_4a_1$，$Q_2=b_1b_2b_3b_4b_1$，$Q_3=c_1c_2c_3c_4c_1$，$C=x_1x_2x_3x_4x_5x_1$ 和 $\{b_2,b_4\}=\{b_k,b_f\}$。假设 $e(C,Q_1)\ge 11$，$e(a_2a_3,Q_2)+e(x_4x_5,Q_2)\ge 9$ 和 $e(C+b_k+C_2,Q_4)\ge 15$，满足 $\{a_1,a_2,a_3\}\subseteq N(x_i)$ 对任意 $i\in\{1,2,3\}$，$N(\{x_4,x_5\},Q_2)\subseteq\{b_1,b_3\}$ 和 $N(a_2,Q_2)\subseteq\{b_1,b_2,b_3\}$，$N(a_3,Q_2)\subseteq\{b_1,b_3,b_4\}$，$N(b_k,Q_3)=\{c_1,c_2,c_3\}$，$N(b_f,Q_3)=\{c_1,c_3\}$，$e(c_1c_3,C)=10$。则 $G[Q_1\cup Q_2\cup Q_3\cup Q_4\cup R]\supseteq 5C_{-}\{4\}$。

引理 6 [2] 令 Q 和 C 是图 G 中两个相互独立子图，满足 $Q\cong C_4$ 和 $C\cong B$。令 x_0 是 C 的中心点。如果 $e(Q,C-x_0)\ge 9$，则 $G[V(Q\cup C)]\supseteq 2C_4$。

引理 7 [3] 令 Q 是图 G 中一个 4-圈。令 u 和 v 是 $V(G)-V(Q)$ 中两个不相连的点。如果 $d(u,Q)+d(v,Q)\ge 5$，则 $G[V(Q)\cup\{u,v\}]$ 包含一个 4-圈 Q' 和一条边 e 满足 Q' 和 e 是相互独立的，并且 e 是与 u 或 v 相连的。

引理 8 [2] 令 Q 和 C 是图 G 中两个相互独立的子图，满足 $Q\cong C_4$ 和 $C\cong D$。令 x_0 是 C 的中心点。假设 $e(Q,C-x_0)\ge 9$，$\{Q,C\}$ 是最优的，并且 $G[V(C\cup Q)]$ 不包含 $2C_4$，$C_4\cup C_5$ 和 $C_4\cup B$。则图 G 存在 $Q_1=a_1a_2a_3a_4a_1$ 和 $C=x_0x_1x_2x_0x_3x_4$，满足 $N(\{x_3,x_4\},Q)\subseteq\{a_1,a_3\}$，$N(x_2,Q)\subseteq\{a_1,a_2,a_3\}$，$N(x_1,Q)\subseteq\{a_1,a_3,a_4\}$，$a_2a_4\notin E(G)$ 和 $e(x_0,Q)=0$。

引理 9 [2] 令 Q_1,Q_2 和 C 是图 G 中三个相互独立的子图，满足 $Q_1\cong Q_2\cong C_4$ 和 $C\cong D$。令 $Q_1=a_1a_2a_3a_4a_1$ 和 $C=x_0x_1x_2x_0x_3x_4$，能够满足 $e(Q_1,C-x_0)\ge 9$，$N(\{x_3,x_4\},Q)\subseteq\{a_1,a_3\}$，$N(x_2,Q)\subseteq\{a_1,a_2,a_3\}$，$N(x_1,Q)\subseteq\{a_1,a_3,a_4\}$，以及 $e(Q_2,R+a_2+a_4)\ge 15$。假设 $G[V(Q_1\cup Q_2\cup R)]$ 不包含 $3C_4$，$2C_4\cup C_5$ 和 $2C_4\cup B$。则存在 $Q_2=b_1b_2b_3b_4b_1$，满足 $b_2b_4\notin E(G)$，$d(b_1,R+a_2+a_4)=d(b_3,R+a_2+a_4)=7$，$d(b_4,R+a_2+a_4)=0$，和 $N(b_2,R+a_2+a_4)=\{a_i\}$ 对某一 $i\in\{2,4\}$，并且如果 $i=2$ 则 $a_2x_2\notin E(G)$，如果 $i=4$ 则 $a_4x_1\notin E(G)$。

3. 定理的证明

令 G 是一个顶点数为 n 的图，满足 $4k+1\le n\le 4k+4$ 和 $\sigma_2(G)\ge n$，其中 k 是一个正整数。假设 G 不含 k 个独立的 4-圈。我们假设 $G+xy\supseteq kC_4$ 对任意一对不相连的点 x 和 y。令 $m=n-4k-1$，则 $0\le m\le 3$。为了证明，我们先证明下列断言。

断言 1 $G\not\supseteq(k-1)C_4\cup B$。

证明： 假设 $G\supseteq(k-1)C_4\cup B=\{Q_1,Q_2,\cdots,Q_{k-1},C\}$，满足 $C\cong B$。令 $C=x_0x_1x_2x_0x_3x_4x_0$ 和 x_0 是 C 的中

心点。容易看出 $\sum_{x\in V(C-x_0)} d\left(x, G-V\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} Q_i\right)\right) \le 8+m$ 否则 $G-V\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} Q_i\right) \supseteq C_4$。因为 $x_1x_4 \notin E(G)$，$x_2x_3 \notin E(G)$，则 $e\left(C-x_0, \bigcup_{i=1}^{k-1} Q_i\right) \ge 2n-8-m > 8(k-1)+1$。这表明存在 4-圈 Q_i 满足 $e(C-x_0, Q_i) \ge 9$。根据引理 6，$G\left[V(Q_i \cup C)\right] \subseteq 2C_4$，矛盾。

根据图 G 的选择，G 包含 $k-1$ 个独立 4-圈。令 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{k-1}$ 为 $k-1$ 个 4-圈。我们断言 $G-V\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} Q_i\right) \supseteq P_5$。反之，假设 G 有 $k-1$ 个独立 4-圈 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{k-1}$，满足 $G-V\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} Q_i\right)$ 含有一条阶为 4的路 P。我们选择 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{k-1}$ 和 P 使得 $\sum_{i=1}^{k-1} t(Q_i)$ 尽可能大。令 $H = \bigcup_{i=1}^{k-1} Q_i$，$M = G-V(H \cup P)$ 和 $t = |V(M)|$。因此 $1 \le t \le 4$。令 $P = x_1x_2x_3x_4$ 满足 $d(x_4, P) = 1$。令 $x_0 \in V(M)$。由于 $P + x_0 \not\supseteq P_5$，我们可以知道 $d(x_0, P) \le 1$。所以 $d(x_0, P \cup M) \le t$。因为 $x_0x_4 \notin E(G)$，则 $d(x_0, H) + d(x_4, H) \ge n-t-1 \ge 4k+t-t-1 \ge 4(k-1)+3$。这表明存在 4-圈 Q_i，不失一般性设 $Q_i = Q_1$，满足 $d(x_0, Q_1) + d(x_4, Q_1) \ge 5$。根据断言 2 [2]，同样可以得到如下结论：

断言 2 图 G 包含 $k-1$ 个独立 4-圈 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{k-1}$，满足 $G-V\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} Q_i\right)$ 含有一条阶为 5 的路。

我们选择 $k-1$ 个独立 4-圈 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{k-1}$，使得 $G-V\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} Q_i\right)$ 含有一条阶为 5 的路。并且在此基础上，令 $\sum_{i=1}^{k-1} t(Q_i)$ 尽可能大。我们断言 $G-V\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} Q_i\right)$ 含有一个子图 P 满足 $|P| = 5$ 和 $e(P) \ge 5$。假设 $e(P) = 4$。令 $P = x_1x_2x_3x_4x_5$。令 $H = \bigcup_{i=1}^{k-1} Q_i$，$M = G-V(H \cup P)$ 和 $m = |M|$。则我们有 $\sum_{i=1}^{5} d(x_i, P \cup M) \le 8+2m$。因为 $x_1x_5 \notin E(G)$，则 $d(x_1) + d(x_5) \ge n$，设 $d(x_1) \ge n/2$。因为 $x_2x_4 \notin E(G)$，$x_3x_5 \notin E(G)$，所以 $e(P, H) \ge \sum_{i=1}^{5} d(x_i) - 8 - 2m \ge 5n/2 - 8 - 2m > 10(k-1)+1$。根据断言 3 [2]，可以获得如下结论：

断言 3 存在 $k-1$ 个独立 4-圈 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{k-1}$，使得 $G-V\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} Q_i\right)$ 含有一个阶为 5，边数至少是 5 的子图。

断言 4 $G \supseteq (k-1)C_4 \cup C_5$。

证明：根据断言 3，存在 $k-1$ 个独立 4-圈 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{k-1}$，使得 $G-V\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} Q_i\right)$ 含有一个阶为 5，边数至少是 5 的子图 C。令 $M = G-V\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} Q_i\right) - V(C)$ 和 $|M| = m$。如果 $C \ncong D$，令 x 和 y 是 C 的两个不同端点。则 $d(x, M) + d(y, M) \le m+1$，否则 $G\left[V(C \cup M)\right] \supseteq C_4$ 或者 $G\left[V(C \cup M)\right] \supseteq C_5$。因为 $xy \notin E(G)$，因此 $d\left(x, \bigcup_{i=1}^{k-1} Q_i\right) + d\left(y, \bigcup_{i=1}^{k-1} Q_i\right) \ge n-m-1-2 \ge 4(k-1)+2$。我们可以假设 $d(x, Q_1) + d(y, Q_1) \ge 5$。根据引理 7，$G\left[V(Q_1) \cup \{x, y\}\right] \supseteq C_4 \cup P_2$ 满足恰有一点 x 和 y 是 P_2 的端点。因此 $G\left[V(Q_1 \cup C)\right] \supseteq C_4 \cup D$。所以，我们选择 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{k-1}$ 和 C，使得 $C \cong D$ 和 $\sum_{i=1}^{k-1} t(Q_i)$ 尽可能大。

令 $C = x_0x_1x_2x_0x_3x_4$。因为 $G\left[V(C \cup M)\right]$ 不含 C_4, C_5 和 B，我们可知如果 $d(y, C) \ge 2$ 对 $y \in V(M)$，则 $N(y, C) = \{x_3, x_4\}$。因此 $e(C, M) \le 2m$，并且因为 $x_2x_4 \notin E(G)$ 和 $x_1x_3 \notin E(G)$，所以 $e\left(C-x_0, \bigcup_{i=1}^{k-1} Q_i\right) \ge 2n-7-2m \ge 8(k-1)+3$。我们可以假设 $e(C-x_0, Q_1) \ge 9$。根据引理 8，令 $Q_1 = a_1a_2a_3a_4a_1$，满足 $N(\{x_3, x_4\}, Q_1) \subseteq \{a_1, a_3\}$，$N(x_2, Q_1) \subseteq \{a_1, a_2, a_3\}$，$N(x_1, Q_1) \subseteq \{a_1, a_3, a_4\}$，和 $e(x_0, Q_1) = 0$，$a_2a_4 \notin E(G)$。因此

$$\sum_{x\in V(C)} d(x, Q_1 \cup C \cup M) \le 4+3+3+10+2m = 20+2m。$$

令 $C^+ = G\left[V(C) \cup \{a_2, a_4\}\right]$。显然，$N(a_2, M) \cap N(a_4, M) = \phi$，否则 $G\left[V(Q_1 \cup C \cup M)\right] \supseteq 2C_4$。因此

我们看出 $e\left(\left\{a_2,a_4\right\},M\right)\le m$。所以，

$$\sum_{x\in V\left(C^+\right)} d\left(x,Q_1\cup C\cup M\right)\le 20+2m+m+4+2=26+3m\ 。$$

因为 $x_3a_2\notin E(G)$，所以 $d(x_3)+d(a_2)\ge n$。如果 $d(x_3)\ge n/2$，则 $e\left(C^+,G\right)\ge n/2+n+n+n=7n/2$ 因为 $x_0x_4\notin E(G)$，$x_1a_2\notin E(G)$，$x_2a_4\notin E(G)$。如果 $d(a_2)\ge n/2$，则 $e\left(C^+,G\right)\ge 7n/2$ 因为 $x_0x_4\notin E(G)$，$x_1x_3\notin E(G)$，$x_2a_4\notin E(G)$。因此 $e\left(C^+,\bigcup_{i=2}^{k-1}Q_i\right)\ge 7n/2-(26+3m)=14(k-2)+11/2+m/2$。我们可以假设 $e\left(C^+,Q_2\right)\ge 15$。根据引理 9，我们一定有 $e(C-x_0,Q_1)=9$，$e\left(C^+,Q_2\right)=15$。令 $Q_2=b_1b_2b_3b_4b_1$，满足 $b_2b_4\notin E(G)$，$d\left(b_1,C^+\right)=d\left(b_3,C^+\right)=7$。不失一般性，我们假设 $b_2a_2\in E(G)$ 和 $a_2x_2\notin E(G)$。令 $Q_1'=a_1x_3a_3x_4a_1$，$Q_2'=b_1x_0x_1x_2b_1$，$I=b_4b_3a_2b_2b_3a_4$ 和 $H=C\cup Q_1\cup Q_2$。显然，$t(Q_1')>t(Q_1)$ 和 $t(Q_2')>t(Q_2)$。很容易验证 $N(b_4,M)\cap N(a_4,M)=\phi$ 否则 $G\left[V(I\cup M)\right]\supseteq C_4$，$G\left[V(H\cup M)\right]\supseteq 3C_4$。因此 $e\left(\left\{b_4,a_4\right\},H\cup M\right)\le 9+m$ 和 $a_4b_4\notin E(G)$ 否则 $I\cong B$，B 的中心点是 b_3。总之，$e\left(\left\{b_4,a_4\right\},\bigcup_{i=3}^{k-1}Q_i\right)\ge n-9-m\ge 4(k-3)+4$。我们可以假设 $e\left(\left\{b_4,a_4\right\},Q_3\right)\ge 5$。根据引理 7，设 Q_3 存在一个点 z_0 满足 $z_0a_4\in E(G)$ 和 $Q_3'=G\left[V(Q_3)-z_0+b_4\right]\cong C_4$，使得 $t(Q_3')\ge t(Q_3)-1$。所以 $G\left[V(Q_1\cup Q_2\cup Q_3\cup C)\right]\supseteq 3C_4\cup D$ 满足 $\bigcup_{i=1}^{3}t(Q_i')>\bigcup_{i=1}^{3}t(Q_i)$，矛盾。断言成立。

断言 5 存在 $k-1$ 个独立的 4-圈 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_{k-1}$ 和 C 满足 $C\cong C_5$，使得 $G-V\left(\bigcup_{i=1}^{k-1}Q_i\right)-V(C)$ 包含一条顶点数为 m 的路。

证明：根据断言 4，我们选择 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_{k-1}$ 和 C 使得 $M=G-V\left(\bigcup_{i=1}^{k-1}Q_i\right)-V(C)$ 包含一条最长的路。在此基础上，令 $\sum_{i=1}^{k-1}t(Q_i)$ 尽可能大。假设 $M\not\supseteq P_m$。则 $m\ge 2$。令 $V(M)=\{x_1,x_2,x_m\}$ 满足如果 M 有一条边是 $x_1x_2\in E(G)$。因此 $x_1x_m\notin E(G)$。由于 $G\left[V(C\cup M)\right]\not\supseteq C_4$，我们可得 $d(x,C)\le 2$ 对所有的 $x\in V(M)$ 成立。因为 $x_1x_m\notin E(G)$ 所以 $d\left(x_1,\bigcup_{i=1}^{k-1}Q_i\right)+d\left(x_m,\bigcup_{i=1}^{k-1}Q_i\right)\ge n-5\ge 4(k-1)+m$。我们假设 $d(x_1,Q_1)+d(x_m,Q_1)\ge 5$。根据引理 7，$G\left[V(Q_1)\cup\{x_1,x_m\}\right]\supseteq C_4\cup P_2$，因此必然有 $m=3$。令 $Q_1=a_1a_2a_3a_4a_1$。首先假设 $d(x_3,Q_1)\ge 3$，不失一般性说 $\{a_1,a_2,a_3\}\subseteq N(x_3)$。则 $a_2a_4\in E(G)$ 因为 $t(x_3a_1a_2a_3x_3)\le t(Q_1)$。所以 $d(x_1,Q_1)=0$，矛盾。

假设 $d(x_3,Q_1)\le 2$ 和 $d(x_1,Q_1)\ge 3$。令 $\{a_1,a_2,a_3\}\subseteq N(x_1)$。则 $\{a_1,a_3\}\not\subseteq N(x_3,Q_1)$ 和 $\{a_2,a_4\}\not\subseteq N(x_3,Q_1)$，否则 $G\left[V(C\cup M)\right]\supseteq C_4\cup P_3$。注意到 $d(x_1,Q_1)=4$，我们假设 $a_2x_3\in E(G)$。可以断言 $a_4x_3\notin E(G)$。否则，则 $a_2a_4\in E(G)$ 因为 $G\left[V(Q_1)\cup\{x_1,x_3\}\right]\supseteq C_4\cup P_2=\{x_1a_1a_2a_3x_1,a_4x_3\}$ 和 $t(x_1a_1a_2a_3x_1)\ge t(Q_1)$。这表明 $d(x_3,Q_1)=1$ 和 $d(x_1,Q_1)=4$。我们有 $x_3a_2\in E(G)$ 并且 $d(x_3,Q_1)\ge 2$，矛盾。因此 $x_3a_4\notin E(G)$。由于 $\{a_1,a_3\}\not\subseteq N(x_3,Q_1)$，我们看出 $a_2x_3\in E(G)$。这很容易看出 $d(x_2,Q_1)\le 2$ 因为 $G\left[V(Q_1\cup M)\right]\not\supseteq C_4\cup P_3$。则 $d\left(x_2,\bigcup_{i=2}^{k-1}Q_i\right)+d\left(x_3,\bigcup_{i=2}^{k-1}Q_i\right)\ge n-9=4(k-2)+3$ 因为 $x_2x_3\notin E(G)$。我们可以假设 $e(x_2,Q_2)+d(x_3,Q_2)\ge 5$。令 $Q_2=b_1b_2b_3b_4b_1$。相似地，我们可以假设 $\{b_1,b_2,b_3\}\subseteq N(x_2)$ 和 $b_2x_3\in E(G)$。所以 $G\left[V(Q_1\cup Q_2\cup M)\right]\supseteq 2C_4\cup P_3$。断言成立。

根据断言 5，令 $G\supseteq(k-1)C_4\cup C_5\cup P_m=\{Q_1,Q_2,\cdots,Q_{k-1},C,L\}$ 满足 $C\cong C_5$ 和 $L\cong P_m$，使得 $\sum_{i=1}^{k-1}t(Q_i)$ 尽可能大。很容易得到 $e(C,L)\le\min\{4,2m\}$ 否则 $G\left[V(C\cup L)\right]\supseteq C_4$。令 $C=x_1x_2x_3x_4x_5x_1$。我们可以得到

$e\left(C,\bigcup_{i=2}^{k-1}Q_i\right)\ge\max\{5n/2-4-10,5n/2-2m-10\}\ge 10k-17/2\ge 10(k-1)+3/2$ 因为 $d(x_1)+d(x_3)\ge n$，$d(x_2)+d(x_4)\ge n$ 和 $d(x_3)+d(x_5)\ge n$。我们假设 $e(C,Q_1)\ge 11$。取 $H_1=G[V(C\cup Q_1)]$。则 H_1 不包含 $2C_4$ 和 $C_4\cup B$。令 $Q_1=a_1a_2a_3a_4a_1$。根据引理 1，假设 $e(x_4x_5,Q_1)=0$，$\{a_1,a_2,a_3\}\subseteq N(x_i)$ 对任意 $i\in\{1,2,3\}$，并且 $a_2a_4\in E(G)$。令 $W_1=\{a_2,a_3,x_4,x_5\}$。

我们断言存在 $Q_i\,(2\le i\le k-1)$ 满足 $e(W_1,Q_i)\ge 9$。假设断言不成立，显然 $\sum_{x\in W_1}d(x,H_1)\le 16$。当 $e(W_1,L)=t\le 3$，因为 $a_2x_4\notin E(G)$，$a_3x_5\notin E(G)$，则 $e\left(W_1,\bigcup_{i=2}^{k-1}Q_i\right)\ge 2n-16-t\ge 8(k-2)+1$。我们假设存在 Q_i 满足 $e(W_1,Q_i)\ge 9$。因此我们假设 $e(W_1,L)\ge 4$。根据断言 6 [2]，$m=3$。令 $W_1'=W_1\cup V(L)$ 和 $L=y_1y_2y_3$。则 $\sum_{x\in W_1'}d(x,H_1\cup L)\le 16+4+4+4=28$。我们可以得到 $d(y_1)+d(a_3)\ge n$ 因为 $y_1a_3\notin E(G)$。如果 $d(y_1)\ge n/2$，则 $e(W_1',G)\ge 7n/2$ 因为 $y_2a_2\notin E(G)$，$y_3x_4\notin E(G)$，$x_5a_3\notin E(G)$。如果 $d(a_3)\ge n/2$，则 $e(W_1',G)\ge 7n/2$ 因为 $y_2a_2\notin E(G)$，$y_3x_5\notin E(G)$，$y_1x_4\notin E(G)$。因此 $e\left(W_1',\bigcup_{i=2}^{k-1}Q_i\right)\ge 7n/2-28=14(k-1)+14$。根据断言 6 [2]，下列断言成立：

断言 6 存在 $Q_i\,(2\le i\le k-1)$ 满足 $e(W_1,Q_i)\ge 9$。

根据断言 6，我们假设 $e(W_1,Q_2)\ge 9$。令 $H_2=G[V(H_1\cup Q_2)]$。根据引理 2，令 $Q_2=b_1b_2b_3b_4b_1$ 满足 $N(a_2,Q_2)\subseteq\{b_1,b_2,b_3\}$，$N(a_3,Q_2)\subseteq\{b_1,b_3,b_4\}$，$N(\{x_4,x_5\},Q_2)\subseteq\{b_1,b_3\}$ 和 $b_2b_4\notin E(G)$。再令 $G[a_1,a_4,x_1,x_2]\supseteq J_1\cong C_4$，$G[a_1,a_4,x_2,x_3]\supseteq J_2\cong C_4$，$J_3\cong a_1x_1x_2x_3a_1$，并且 $G[V(Q_1)-a_i+x_j]\supseteq J_{i,j}\cong C_4$ 对 $\{i,j\}\subseteq\{1,2,3\}$。

取 $W_2=V(C)\cup\{b_2,b_4\}$。根据 $e(W_1,Q_2)\ge 9$，我们假设 $d(b_1,W_1)=4$，同时令 $\{a_\alpha,a_\beta\}=\{a_2,a_3\}$ 和 $\{x_r,x_s\}=\{x_4,x_5\}$，满足 $d(a_\alpha,Q_2)=3$ 和 $d(x_r,Q_2)=2$ 对某一 $\alpha\in\{2,3\}$ 和 $r\in\{4,5\}$。我们已知 $e(C,L)\le\min\{4,2m\}$ 对 $G[V(C\cup L)]\not\supseteq C_4$。如果 $z\in N(b_2,L)\cap N(b_4,L)$，则 $G[V(H_2\cup L)]\supseteq 3C_4=\{J_3,zb_2b_3b_4z,b_1a_2a_4a_3b_1\}$，矛盾。则 $N(b_2,L)\cap N(b_4,L)=\phi$，因此 $d(b_2,L)+d(b_4,L)\le m$。我们可以得到 $e(W_2,L)\le\min\{3m,4+2m\}$。

断言 7 $d(b_i,Q_1)\le 1$，$d(b_i,C)\le 1$ 对 $i=2,4$ 和 $e(\{x_1,x_3\},\{b_1,b_3\})=0$。

证明：首先，假设 $d(b_i,Q_1)\ge 2$ 对某一 $i\in\{2,4\}$。显然可以得到 $H_2\supseteq 3C_4=\{G[V(Q_1)-a_j+b_i],x_rb_1b_{i+2}b_3x_r,a_jx_1x_2x_3a_j\}$，矛盾。因此 $d(b_i,Q_1)\le 1$ 对任意 $i\in\{2,4\}$。接下来，假设 $d(b_i,C)\ge 1$ 对某一 $i\in\{2,4\}$。如果 $\{x_j,x_{j+1}\}\subseteq N(b_i)$ 对某一 $j\in\{1,2\}$，则 $H_2\supseteq 3C_4=\{b_ix_ja_1x_{j+1}b_i,J_{1,3},x_rb_1b_{i+2}b_3x_r\}$，矛盾。因此 $\{x_1,x_2\}\not\subseteq N(b_i)$，同时类似的，$\{x_2,x_3\}\not\subseteq N(b_i)$。则 $\{x_1,x_3\}\subseteq N(b_i)$，并且 $H_2\supseteq 3C_4=\{Q_1,b_ix_1x_2x_3b_i,x_rb_1b_{i+2}b_3x_r\}$，矛盾。因此 $d(b_i,C)\le 1$ 对任意 $i\in\{2,4\}$。最后，假设 $e(\{x_1,x_3\},\{b_1,b_3\})>0$。设 $x_1b_i\in E(G)$ 对某一 $i\in\{1,3\}$。如果 $x_4b_i\in E(G)$，令 $G[a_2,a_3,b_2,b_{i+2},b_4]\supseteq J_5\cong C_4$ 根据引理 3。所以 $H_2\supseteq 3C_4\supseteq\{J_2,J_5,b_ix_1x_5x_4b_i\}$，矛盾。因此 $x_4b_i\notin E(G)$。则 $i=3$ 因为我们假设 $d(b_1,W_1)=4$。这表明 $d(a_2,Q_2)=d(a_3,Q_2)=3$，并且 $d(x_5,Q_2)=2$ 对 $e(W_1,Q_2)\ge 9$。因此 $H_2\supseteq 2C_4\cup B=\{J_2,x_1b_3b_4a_3x_1,b_1a_2b_2b_1x_4x_5b_1\}$，矛盾。因此断言成立。

根据断言 7，我们知道 $e(x_1x_2x_3,Q_2)\le 4$，$d(b_2,H_2)+d(b_4,H_2)\le 8$ 和 $\sum_{i=1}^{5}d(x_i,H_2)\le 10+12+8=30$。由于 C 不包含 C_4，我们有 $x_1x_3\notin E(G)$ 和 $d(x_1)+d(x_3)\ge n$。如果 $d(x_1)\ge n/2$，则 $e(W_2,G)\ge 7n/2$ 对 $b_2b_4\notin E(G)$，$x_2x_4\notin E(G)$ 和 $x_3x_5\notin E(G)$。如果 $d(x_3)\ge n/2$，则 $e(W_2,G)\ge 7n/2$ 对 $b_2b_4\notin E(G)$，

$x_1x_4 \notin E(G)$ 和 $x_2x_5 \notin E(G)$。因此

$$e\left(W_2, \bigcup_{i=3}^{k-1} Q_i\right) \ge \max\{7n/2-38-3m, 7n/2-38-2m-4\} > 14(k-3)+1。$$

不失一般性，我们假设 $e(W_2,Q_3)\ge 15$。根据引理 4，令 $Q_3 = c_1c_2c_3c_4c_1$ 和 $\{b_2,b_4\}=\{b_k,b_f\}$，能够满足 $c_2c_4 \notin E(G)$，$N(b_k,Q_3)=\{c_1,c_2,c_3\}$，$N(b_f,Q_3)=\{c_1,c_3\}$，$e(\{c_1,c_3\},C)=10$，$e(\{c_2,c_4\},C)=0$。

令 $W_3 = V(C)\cup\{b_k,c_2\}$ 和 $H_3 = G[V(H_2\cup Q_3)]$。由于 $e(C,L)\le\min\{2m,4\}$，我们有 $\sum_{i=1}^{5} d(x_i,H_3\cup L) \le \min\{30+2m+10, 30+4+10\} = \min\{40+2m,44\}$。我们可以估计 $d(b_k,H_3\cup L)+d(c_2,H_3\cup L)$。我们已知 $d(b_k,H_3)\le 1+2+3+1=7$。如果 $d(c_2,Q_1)\ge 2$，则 $G[V(Q_1)-a_i+c_2]\supseteq J_6 \cong C_4$ 对某一 $i\in\{1,2,3\}$。因此 $H_3 \supseteq 4C_4 = \{Q_2, J_6, a_ix_1x_2x_3a_i, x_4c_1c_4c_3x_4\}$，矛盾。因此 $d(c_2,Q_1)\le 1$ 和 $d(c_2,H_3)\le 6$。如果 $z\in N(b_k,L)\cap N(c_2,L)$ 对 $z\in V(L)$，则 $G[V(H_3\cup L)]\supseteq 4C_4 = \{Q_1, zb_kc_3c_2z, c_1x_1x_2x_3c_1, x_rb_1b_fb_3x_r\}$，矛盾。得到 $N(b_k,L)\cap N(c_2,L)=\phi$。所以 $e(b_k,H_3\cup L)+e(c_2,H_3\cup L)\le 13+m$。并且 $\sum_{x\in W_3} d(x,H_3\cup L)\le \min\{53+3m,57+2m\}$。由于 C 不包含 C_4 和 $d(b_k,C)\le 1$，我们有 $x_1x_3\notin E(G)$ 和 $d(x_1)+d(x_3)\ge n$，设 $d(x_1)\ge n/2$。显然，表明

$$e\left(W_3, \bigcup_{i=4}^{k-1} Q_i\right) \ge \max\{7n/2-53-3m, 7n/2-57-2m\} > 14(k-4)+1。$$

我们可以假设 $e(W_3,Q_4)\ge 15$。根据引理 5，$G[V(H_3\cup Q_4)]\supseteq 5C_4$。定理证明完毕。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11271230)。

参考文献 (References)

[1] Corrádi, K. and Hajnal, A. (1963) On the Maximal Number of Independent Circuits in a Graph. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, **14**, 423-439. http://dx.doi.org/10.1007/BF01895727

[2] Wang, H. (2004) Vertex-Disjoint Quadrilaterals in Graphs. *Discrete Mathematics*, **288**, 149-166. http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2004.02.020

[3] Randerath, B., Schiermeyer, I. and Wang, H. (1999) On Quadrilaterals in a Graph. *Discrete Mathematics*, **203**, 229-237.

[4] El-Zahar, M.H. (1984) On Circuits in Graphs. *Discrete Mathematics*, **50**, 227-230. http://dx.doi.org/10.1016/0012-365x(84)90050-5

[5] Yan, J. and Liu, G.Z. (2003) Quadrilaterals and Paths of Order 4 in Graph. *Acts Mathematics Scientific Ser. A*, **23**, 711-718.

[6] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. North-Holland, Amsterdam. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-349-03521-2

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx