Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2016, 5(3), 494-504
Published Online August 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.53060

E-Henig Proper Efficient Solution for Set-Valued Optimization Problems

Peijing Lin[1], Maowang Li[2], Qiusheng Qiu[1]

[1]Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
[2]Jiangxi Metallurgical Vocational and Technical College, Xinyu Jiangxi
Email: 793935342@qq.com, qsqiu@zjnu.cn

Received: Aug. 9th, 2016; accepted: Aug. 24th, 2016; published: Aug. 31st, 2016

Abstract

In this paper, we study E-Henig proper efficient solution for set-valued optimization problem. Firstly, the concept of E-Henig proper efficient point in a real Hausdorff locally convex space is given. The relationships with E-Benson proper point and E-super point are discussed. Secondly, under the assumption of nearly subconvexlikeness, scalarization theorems of E-Henig proper efficient solution are established. Lastly, E-Henig saddle point theorem and E-Henig duality theorem are studied.

Keywords

E-Henig Proper Efficient Solution, Scalarization, Proper Saddle Point, Duality

集值优化问题的E-Henig真有效解

林佩静[1]，李茂旺[2]，仇秋生[1]

[1]浙江师范大学，浙江 金华
[2]江西冶金职业技术学院，江西 新余
Email: 793935342@qq.com, qsqiu@zjnu.cn

收稿日期：2016年8月9日；录用日期：2016年8月24日；发布日期：2016年8月31日

文章引用: 林佩静, 李茂旺, 仇秋生. 集值优化问题的 E-Henig 真有效解[J]. 应用数学进展, 2016, 5(3): 494-504.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.53060

摘 要

本文研究集值优化问题的E-Henig真有效解。首先，在实局部凸Hausdoff空间中引进了E-Henig真有效点的概念，给出了E-Henig真有效点的等价刻画，讨论了它与E-Benson真有效点和E-超有效点的关系。其次，在集值映射为近似E-次类凸的条件下，建立了E-Henig真有效解的标量化定理。最后，研究了E-Henig真有效解的鞍点定理和对偶定理。

关键词

E-Henig真有效解，标量化，真鞍点，对偶

1. 引言

集值优化理论是最优化理论和应用的主要研究内容之一。它被广泛应用于经济均衡和军事决策等领域。由于存在多种不同形式的真有效解和近似真有效解的概念，因此如何提出统一的集值优化问题真有效解的概念，并在统一的框架下研究真有效解的标量化，鞍点以及对偶是十分重要的课题。目前，关于集值优化问题有效解和弱有效解的统一性研究比较多，如：2006年，Gutierrez 等[1]，通过引进 co-radiant 集的概念定义了一类新的 ε-有效解，并研究了它的线性与非线性标量化特征，这类新的近似有效解推广和统一了文献[2] [3]中的几种近似解的概念。2011年，Chicco 在有限维空间中提出改善集的概念[4]，同时研究了其性质和几何意义。基于改善集，Gutierrez 提出向量优化问题中的一类新的有效解的概念：E-有效解[5]。它统一了优化问题中的许多解的概念，如：数值优化问题的最优解和近似解，向量优化问题的(弱)有效解和近似(弱)有效解。2012年，赵克全等在 Hausdoff 局部凸空间中[6]，利用改善集的知识提出近似 E-次类凸集值映射，建立相应的择一定理，并获得 E-有效解的标量化定理，E-鞍点定理和 E-对偶定理。2013年，赵克全和杨新民提出 E-Benson 真有效解的概念[7]，这类有效解推广了经典的 Benson 真有效解和 ε-真有效解的概念。2016年，周志昂等提出了 E-超有效解的概念[8]，获得标量化定理等结果。众所周知，对超有效点而言，它的存在性条件是非常强的，哪怕是紧凸集的条件下，也不能够保证它的存在性。另一方面，为讨论 E-Benson 真有效解的标量化问题，一般都要求序锥具有紧或弱紧基底(见[7])。在许多情况下，这些条件难以满足。而 Henig 真有效解既保持了超有效解的主要特征，同时它仅要求序锥具有基底。因此，研究 Henig 真有效解是有意义的。

本文在文献[5]-[8]的基础上，首先提出 E-Henig 真有效点的概念，它统一了 Henig 真有效点和 ε-Henig 真有效点等概念，随后给出了 E-Henig 真有效点的等价刻画以及存在性定理，并讨论了它与 E-Benson 真有效点和 E-超有效点之间的关系。其次，在集值映射为近似 E-次类凸的假设下，进一步研究了集值优化问题 E-Henig 真有效解的标量化定理。最后，提出 E-Henig 真有效解的鞍点和对偶的定义，同时得出鞍点定理及对偶定理。

2. 定义与引理

若无特别申明，以下总假设 X 是线性空间，Y 和 Z 分别为实局部凸 Hausdorff 空间，Y^*为 Y 的共轭空间，$A \subset Y$，用 $cl(A)$，$int(A)$ (或 $int\,A$)，$cone(A)$ 分别表示 A 的闭包，内部和生成锥。

设 $K \subset Y$，$P \subset Z$ 为内部非空的闭凸点锥，由 K 诱导出 Y 的偏序，即

$$x \le y \Leftrightarrow y - x \in K, \forall x, y \in Y \text{ 。}$$

非空凸子集 $B \subset K$，如果满足下列两个条件：

1) $0 \notin cl(B)$

2) $K = cone(B) := \bigcup_{\lambda \ge 0} \lambda B = \{\lambda y : \lambda \ge 0, y \in B\}$，则称 B 为 K 的基底。

如果基底 B 为有界(紧，弱紧)集，则称 K 具有有界(紧，弱紧)基底。

记 K^* 和 K^{+i} 分别为 K 的对偶锥和所有严格正泛函，即

$$K^* := \{\mu \in Y^* : \mu(y) \ge 0, \forall y \in K\}; K^{+i} := \{\mu \in Y^* : \mu(y) \ge 0, \forall y \in K \setminus \{0\}\}。$$

设 B 为凸锥 K 的基底，记

$$int_B(K^*) := \{f \in Y^* : \exists t > 0, s.t.\ f(b) \ge 0, \forall b \in B\}。$$

下面定义 K 的“扩充”锥，因 $0 \notin cl(B)$，由凸集分离定理，存在 $\varphi \in Y^* \setminus \{0\}$ 使 $r = \inf\{\varphi(b) : b \in B\} > 0$。记

$$V_B := \left\{ y \in Y : |\varphi(y)| < \frac{r}{2} \right\},$$

则 V_B 为 Y 中零元的开凸均衡邻域。对每一个满足 $V \subset V_B$ 的零元的凸邻域 V，记

$$C_V(B) := cone(V + B),$$

$C_V(B)$ 称为 K 的“扩充”锥。它具有以下特性。

引理 1 [9] 1) $C_V(B)$ 为点凸锥；

2) $K \setminus \{0\} \subseteq int(C_V(B))$ 及 $0 \notin int(C_V(B))$。

符号 V_B，$C_V(B)$ 将在整篇论文中使用。为方便起见，以下我们记

$$N(0) = \{V : V\text{为}Y\text{中零元的开凸均衡邻域}\}。$$

$$N_B(0) = \{V : V \subseteq V_B, V \in N(0)\}。$$

引理 2 [10] 假设 $K \subseteq Y$ 是一个含有基底 B 的凸锥，则

1) $\forall V \in N_B(0)$，有 $(C_V(B))^* \setminus \{0\} \subseteq int_B(K^*)$。

2) $\forall f \in int_B(K^*)$，$\exists V \in N_B(0)$ 使得 $f \in C_V(B)^* \setminus \{0\}$。

引理 3 [11]令 M, N 是 Y 中的两个非空凸子集，若 $int(M) \ne \varnothing$ 且 $N \cap int(M) = \varnothing$，则存在 $y^* \in Y^* \setminus \{0\}$ 使得

$$\langle m, y^* \rangle \le a \le \langle n, y^* \rangle, \forall m \in M, \forall n \in N。$$

为方便讨论 E-Henig 真有效点与其它有效点之间的关系，以下给出了集值优化问题的几种常见的真有效点和 E-真有效点的概念。

定义 1 [12]设 A 为 Y 中的一个非空子集，B 为凸锥 K 的基底，$\bar{y} \in A$。如果存在 $V \in N_B(0)$ 使得

$$cl(cone(M - \bar{y})) \cap (-C_V(B)) = \{0\},$$

则称 $\bar{y}$ 为 A 关于 B 的 Henig 真有效点(简称为 Henig 真有效点)，记作 $\bar{y} \in HE(A, B)$。

定义 2 [13]设 A 为 Y 中的一个非空子集，$K \subseteq Y$ 是具有基底 B 的凸锥，$\varepsilon \in K$，$\bar{y} \in A$。若存在 $V \in N_B(0)$ 使得 $cl(cone(A + K + \varepsilon - \bar{y})) \cap (-C_V(B)) = \{0\}$，则称 $\bar{y}$ 为 A 的 ε-Henig 真有效点，记作 $\bar{y} \in \varepsilon - HE(B, K)$。

定义 3 [14]设 E 为 Y 中的一个非空子集，如果满足下列两个条件：

1) $0 \notin E$；

2) $E + K = E$，

则称 E 为关于 K 的一个改善集，将 Y 中改善集的全体记为 ξ_Y。

定义 4 [7]设 A 为 Y 中的一个非空子集，$E \in \xi_Y$，$K \subseteq Y$ 是一个闭凸锥，$\bar{y} \in A$。若

$$cl\left(cone\left(A + E - \bar{y}\right)\right) \cap \left(-K\right) = \{0\},$$

则称 $\bar{y}$ 为 A 的 E-Benson 真有效点，记作 $\bar{y} \in BE\left(A, E\right)$。

定义 5 [8]设 A 为 Y 中的一个非空子集，$E \in \xi_Y$，$K \subseteq Y$ 是一个闭凸锥，$\bar{y} \in A$，若对任意的 $V \in N\left(0\right)$，存在 $U \in N\left(0\right)$ 使得

$$cone\left(A + E - \bar{y}\right) \cap \left(U - K\right) \subseteq V.$$

则称 $\bar{y}$ 为 A 的 E-超有效点，记作 $\bar{y} \in SE\left(A, E\right)$。

假设 $E \in \xi_Y$ 且 $int E \neq \varnothing$，考虑如下集值优化问题：

$$\text{(VP)} \quad \min_{x \in C} F\left(x\right)$$

其中 $C = \left\{x \in S : G\left(x\right) \cap \left(-P\right) \neq \varnothing\right\}$ 为约束集，$S \subseteq X$，$F : S \to 2^Y$，$G : S \to 2^Y$ 为集值映射，且 $\forall x \in S$，$F\left(x\right) \neq \varnothing$，$G\left(x\right) \neq \varnothing$，.若存在 $\bar{x}$ 使得 $G\left(\bar{x}\right) \cap \left(-int P\right) \neq \varnothing$，则称(VP)满足广义约束规格。

定义 6 设 A 为 Y 中的非空子集，$K \subseteq Y$ 是具有基底 B 的凸锥，$E \in \xi_Y$，$\bar{y} \in A$，如果存在 $V \in N_B\left(0\right)$ 使得

$$cl\left(cone\left(A + E - \bar{y}\right)\right) \cap \left(-C_V\left(B\right)\right) = \{0\},$$

则称 $\bar{y}$ 为 A 关于 B 的 Henig 真有效点，记作 $\bar{y} \in HE\left(A, B, E\right)$。

注 1 E-Henig 真有效点是一个很一般的概念，它统一了 Henig 真有效点及近似 Henig 真有效点等概念，例如：

1) 若取 $E = int K$，于是 $E \in \xi_Y$，则 E-Henig 真有效点即为 Henig 真有效点。

2) 若取 $E = K \setminus \{0\}$，易知 $E \in \xi_Y$，则 E-Henig 真有效点即为 Henig 真有效点。

3) 若取 $E = \varepsilon + int K$，($\varepsilon \in K \setminus \{0\}$)，有 $E \in \xi_Y$，则 E-Henig 真有效点即为 ε-Henig 真有效点。

4) $E = \varepsilon + K \setminus \{0\}$，($\varepsilon \in K \setminus \{0\}$)，显然 $E \in \xi_Y$，则 E-Henig 真有效点即为 ε-Henig 真有效点。

定义 7 设 $E \in \xi_Y$，$\bar{x} \in C$，若存在 $\bar{y} \in F\left(\bar{x}\right)$，使 $\bar{y} \in HE\left(F\left(C\right), B, E\right)$，则称 $\bar{x}$ 是(VP)的 E-Henig 真有效解，$\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$ 为(VP)的 E-Henig 真有效元。

引理 4 给出集值优化问题的 E-Henig 真有效点的几种等价刻画。

引理 4 设 A 为 Y 中的非空子集，B 为凸锥 K 的基底，$E \in \xi_Y$ 下列条件等价：

1) $\bar{y} \in HE\left(A, B, E\right)$；

2) 存在 $V \in N_B\left(0\right)$ 使得 $cone\left(A + E - \bar{y}\right) \cap \left(-C_V\left(B\right)\right) = \{0\}$；

3) 存在 $V \in N_B\left(0\right)$ 使得 $\left(A + E - \bar{y}\right) \cap \left(-int C_V\left(B\right)\right) = \varnothing$；

4) 存在 $V \in N_B\left(0\right)$ 使得 $cl\left(cone\left(A + E - \bar{y}\right)\right) \cap \left(-int\left(C_V\left(B\right)\right)\right) = \varnothing$。

证明 类似于文献[12]中定理 3.1 的证明。

定理 1 (存在性定理)设 Y 是自反的 Banach 空间，$P \subseteq Y$ 是一个锥，E 为 Y 中的改善集，$A \subseteq Y$ 是一个无界非空的弱闭集，假设存在 $\mu \in int_B\left(K^*\right)$ 满足如下两个条件：

1) $\langle \mu, e \rangle \geq 0, \forall e \in E$；

2) $\lim\limits_{y\in A,\|y\|\to\infty}\langle\mu,y\rangle=+\infty$。

则 $HE(A,B,E)\neq\varnothing$。

证明从条件 2)可知，$\lambda_\mu(A):=\inf\{\langle\mu,y\rangle: y\in A\}>-\infty$。根据下确界定义，对任意的$\frac{1}{n}$，都存在 $y_n\in A$，使得

$$\langle\mu,y_n\rangle<\lambda_\mu(A)+\frac{1}{n}, n\in N\text{。}$$

由假设 2)可得，对任意的$n\in N$，y_n为有界的。因为A是一个弱闭集，所以不防设$y_n\xrightarrow{w}\bar{y}\in A$。由上式可知$\langle\mu,\bar{y}\rangle=\lambda_\mu(A)$。由条件$\mu\in int_B(K^*)$及由引理 2 可知，存在$V\in N_B(0)$使得$\mu\in(C_V(B))^*\setminus\{0\}\subseteq int_B(K^*)$。所以对任意$e\in E$，$z\in intC_V(B)$有

$$\langle\mu,\bar{y}-e-z\rangle<\langle\mu,\bar{y}\rangle=\lambda_\mu(A)\text{。}$$

因此$\bar{y}-e-z\notin A$，即$(A+E-\bar{y})\cap(-intC_V(B))=\varnothing$。根据引理 4(3)，有$HE(A,B,E)\neq\varnothing$。

下面讨论 E-Henig 真有效点与 E-Benson 真有效点以及 E-超有效点之间的关系。

命题 1 设$A\subseteq Y$为非空子集，B为凸锥K的基底，则有$HE(A,B,E)\subseteq BE(A,E)$。

证明对任意$\bar{y}\in HE(A,B,E)$，存在$V\in N_B(0)$使得

$$cl(cone(A+E-\bar{y}))\cap(-C_V(B))=\{0\},$$

因为$0\in cl(cone(A+E-\bar{y}))\cap(-K)$，$K\subseteq C_V(B)$，所以

$$cl(cone(A+E-\bar{y}))\cap(-K)\subseteq cl(cone(A+E-\bar{y}))\cap(-C_V(B))=\{0\}\text{。}$$

即$cl(cone(A+E-\bar{y}))\cap(-K)=\{0\}$，所以$\bar{y}\in BE(A,E)$。

命题 2 设$A\subseteq Y$为非空子集，B为凸锥K的基底，则有$SE(A,E)\subseteq HE(A,B,E)$。反之不一定成立。

证明 因为B为凸锥K的基底，所以存在$V^*\in N(0)$使得

$$(-B)\cap(2V^*)=\varnothing, \tag{1}$$

由于$\bar{y}\in SE(A,E)$，则上述V^*，存在$V\in N(0)$使得

$$cone(A+E-\bar{y})\cap(V-K)\subseteq V^*$$

已知Y是局部凸 Hausdoff 空间，不失一般性，假设V是一个开凸零邻域$(V\subseteq V^*\cap V_B)$，由(1)可知$(V-B)\cap V^*=\varnothing$。又因为$cone(A+E-\bar{y})\cap(V-B)\subseteq(V-B)\cap V^*$，所以

$$cone(A+E-\bar{y})\cap(V-B)=\varnothing\text{。}$$

由于$cone(A+E-\bar{y})$是锥，且$U=-U$，则

$$cone(A+E-\bar{y})\cap(-cone(V+B))=\{0\},$$

所以$(A+E-\bar{y})\cap(-intC_V(B))=\varnothing$，即$\bar{y}\in HE(A,B,E)$。

如下的例子说明$HE(A,B,E)\not\subset SE(A,E)$。

例 1 令$Y=R^2$，$K=\{(x_1,x_2)\in R^2 \mid x_2\leq 0\}\cup\{(0,0)\}$，$B=\{(x_1,x_2)\mid x_2=1\}$，$A=R_+^2$，$\bar{y}=(0,0)$，$E=\{(x_1,x_2)\mid x_2\leq 1\}$，则$(0,0)\notin SE(A,E)$，但$(0,0)\in HE(A,B,E)$。

3. 标量化

下面讨论集值优化问题 E-Henig 真有效解的标量化问题。记 $\langle F(x),\mu\rangle=\{\langle y,\mu\rangle \mid y\in F(x)\}$。$F(C)=\bigcup_{x\in C}F(x),\langle F(C),\mu\rangle=\bigcup_{x\in C}\langle F(x),\mu\rangle$，其中 $\mu\in Y^*$。

考虑如下标量化问题：

$$(\mathrm{VP})_\mu\quad \min_{x\in C}\langle F(x),\mu\rangle,\ \mu\in Y^*\setminus\{0\}。$$

定义 8 [6]设 $x_0\in C$，若存在 $y_0\in F(x_0)$ 使得

$$\langle y-y_0,\mu\rangle\ge\sigma_{-E}(\mu),\ \forall x\in C,\forall y\in F(x)。\tag{2}$$

其中 $\sigma_{-E}(\mu)=\sup\limits_{e\in -E}\langle e,\mu\rangle$，则称 x_0 为(VP)$_\mu$关于 E 的一个最优解，(x_0,y_0) 为(VP)$_\mu$关于 E 的最优元。

注 2 若 $\varepsilon\in K\setminus\{0\}$，$E=\varepsilon+K$，$\mu\in K^+\setminus\{0\}$，则 $E\in\xi_Y$，(2)式可退化为

$$\langle y,\mu\rangle\ge\langle y_0,\mu\rangle-\langle\varepsilon,\mu\rangle,\ \forall x\in C,\forall y\in F(x)。$$

定义 9 [15]设 $F:S\to 2^Y$，$K\subseteq Y$，若 $cl(cone(F(S)+K))$ 是凸集，则称 F 是 S 上近似 K-次类凸。

定义 10 [6]设 $F:S\to 2^Y$，$E\in\xi_Y$，若 $cl(cone(F(S)+E))$ 是凸集，则称 F 是 S 上近似 E-次类凸。

注 3 $\mathrm{int}K\subseteq E\subseteq K\setminus\{0\}$，由文献[15]中的引理 2.2 和命题 3.3 可知

$$cl(cone(F(S)+E))=cl(cone(F(S)+\mathrm{int}K))=cl(cone(F(S)+K)),$$

近似 E-次类凸集值映射和近似 K-次类凸集值映射一致。反之，若 F 是近似 K-次类凸的，但它不一定是近似 E-次类凸的。

例 2 [6] $X=Y=R^2$，$K=R^2$，$S=[-1,1]\times[-1,1]$，$F:S\to Y$

$$F(x)=\begin{cases}\{(y_1,y_2)\in R^2 \mid (y_1,y_2)\in[-1,x_1]\times[0,|x_2|]\},\forall(x_1,x_2)\in[-1,0)\times[-1,1],\\ \{(y_1,y_2)\in R^2 \mid (y_1,y_2)\in[0,x_1]\times[-1,|x_2|]\},\forall(x_1,x_2)\in[0,1]\times[-1,1].\end{cases}$$

显然，$cl(cone(F(S)+E))$ 是凸集，但 $cl(cone(F(S)+R^2))$ 不是一个凸集。

定理 2 设 B 是闭凸锥 K 的基底，$E\in\xi_Y$，$\bar{x}\in C$，$\bar{y}\in F(\bar{x})$，$F-\bar{y}$ 在 C 上近似 E-次类凸。若 $(\bar{x},\bar{y})$ 是(VP)的一个 E-Henig 真有效元，则存在 $\mu\in int_B(K^*)$ 使得 $(\bar{x},\bar{y})$ 是(VP)$_\mu$的 E-最优元。

证明 由于 $(\bar{x},\bar{y})$ 是(VP)的一个 E-Henig 真有效元，则存在 $V\in N_B(0)$ 使得

$$cl(cone(F(C)+E-\bar{y}))\cap(-int(C_V(B)))=\varnothing。$$

因为 $F-\bar{y}$ 在 C 上近似 E-次类凸，所以 $cl(cone(F(C)+E-\bar{y}))$ 是 Y 上的凸集。

而 $int(C_V(B))=int(cone(U+B))$ 是 Y 上的非空凸集，由引理 3 知，存在 $\mu\in Y^*\setminus\{0\}$ 使

$$\langle y_1,\mu\rangle\ge\langle y_2,\mu\rangle,\ \forall y_1\in cl(cone(F(C)+E-\bar{y})),\forall y_2\in -int(C_V(B))。\tag{3}$$

又因 $0\in cl(cone(F(C)+E-\bar{y}))$，由(3)知

$$\langle y_2,\mu\rangle\le 0,\ \forall y_2\in -int(C_V(B)),\tag{4}$$

即 $\langle\mu,\mathrm{int}(C_V(B))\rangle\ge 0$。

现证：$\mu\in\left(C_V(B)\right)^*$。

由于 $C_V(B)$ 是凸锥，且 $\operatorname{int}\left(C_V(B)\right)$ 非空，则 $cl\left(C_V(B)\right)=cl\left(int\left(C_V(B)\right)\right)$。对任意的 $z\in C_V(B)$，存在 $\{z_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}\subseteq int\left(C_V(B)\right)$，有 $z=\lim\limits_{\lambda} z_\lambda$。因为 $\left\langle \mu, int\left(C_V(B)\right)\right\rangle \geq 0$，所以 $\mu(z)=\lim\limits_{\lambda}\mu(z_\lambda)\geq 0$，即 $\mu\in\left(C_V(B)\right)^*$。而 $\mu\neq 0$，由引理 2 知 $\mu\in int_B\left(K^*\right)$。又因为 $cl\left(cone\left(F(C)+E-\overline{y}\right)\right)$ 为 Y 中的一个锥，且 μ 在 $cl\left(cone\left(F(C)+E-\overline{y}\right)\right)$ 上有上下界，于是由(3)式有

$$\left\langle y_1,\mu\right\rangle\geq 0,\ \forall y_1\in cl\left(cone\left(F(C)+E-\overline{y}\right)\right),$$

从而

$$\left\langle y_1,\mu\right\rangle\geq 0,\ \forall y_1\in F(C)+E-\overline{y},$$

即

$$\left\langle y+e-\overline{y},\mu\right\rangle\geq 0,\ \forall x\in C,\ \forall y\in F(x),\ \forall e\in E,$$

于是有

$$\left\langle y-\overline{y},\mu\right\rangle\geq \sigma_{-E}(\mu),\ \forall x\in C,\ \forall y\in F(x),$$

这表明 $(\overline{x},\overline{y})$ 是(VP)$_\mu$的 E-最优元。

定理 3 设 K 是含有基底 B 的凸锥，$E\in\xi_Y$，若存在 $\mu\in int_B\left(K^*\right)$ 使得 $(\overline{x},\overline{y})$ 是(VP)$_\mu$的 E-最优元，则 $(\overline{x},\overline{y})$ 也是(VP)的一个 *E*-Henig 真有效元。

证明 (反证法)假设 $(\overline{x},\overline{y})$ 不是(VP)的 E-Henig 真有效元，则由引理 4 知，$\forall V\in N_B(0)$ 有

$$\left(F(C)+E-\overline{y}\right)\cap\left(-int\left(C_V(B)\right)\right)\neq\varnothing,$$

即存在 $\hat{x}\in C$，$\hat{y}\in F(\hat{x})$，$\hat{e}\in E$ 使得

$$\hat{y}-\overline{y}+\hat{e}\in -int\left(C_V(B)\right)。\tag{5}$$

因为 $\mu\in int_B\left(K^*\right)$，由引理 2 知，存在 $V_0\in N_B(0)$ 使得 $\mu\in\left(C_V(B)\right)^*\setminus\{0\}$。由(5)得 $\left\langle \hat{y}-\overline{y}+\hat{e},\mu\right\rangle<0$。于是

$$\left\langle \hat{y}-\overline{y},\mu\right\rangle-\sigma_{-E}(\mu)\leq\left\langle \hat{y}-\overline{y},\mu\right\rangle-\left\langle -\hat{e},\mu\right\rangle=\left\langle \hat{y}-\overline{y},\mu\right\rangle+\left\langle \hat{e},\mu\right\rangle<0,$$

与 $(\overline{x},\overline{y})$ 是(VP)$_\mu$的 E-最优元矛盾，所以 $(\overline{x},\overline{y})$ 是(VP)的 E-Henig 真有效元。

4. E-Henig 真鞍点

本部分给出了 Lagrange 集值映射的 E-Henig 真鞍点的定义，并建立 E-Henig 真鞍点定理。

设 $L(Z,Y)$ 为 Z 到 Y 的连续行算子的全体，记

$$L^+(Z,Y):=\left\{T\in L(Z,Y)\mid T(P)\subseteq K\right\}。$$

设 $L:S\times L^+(Z,Y)\to 2^Y$，其中 $L(x,T)=F(x)+T\left(G(x)\right)$，$\forall(x,T)\in S\times L^+(Z,Y)$。

记 $HE_{\max}(A,B,E)=\left\{\overline{y}\in A\mid 存在 V\in N_B(0) 使 cl\left(cone\left(A-E-\overline{y}\right)\right)\cap C_V(B)=\{0\}\right\}$。

定义 11 设 $(\overline{x},\overline{T})\in S\times L^+(Z,Y)$，若 $L(\overline{x},\overline{T})\cap HE\left(L(S,\overline{T}),B,E\right)\cap HE_{\max}\left(L(\overline{x},L^+),B,E\right)\neq\varnothing$，则称 $(\overline{x},\overline{T})$ 是 Lagrange 映射 $L(x,T)$ 的一个 E-Henig 真鞍点。

定理 4 $\left(\overline{x},\overline{T}\right)$ 是 $L(x,T)$ 的一个 E-Henig 真鞍点⇔存在 $\overline{y}\in F(\overline{x})$，$\overline{z}\in G(\overline{x})$，及 $V\in N_B(0)$ 满足如下条件：

1) $\overline{y}+\overline{T}(\overline{z})\in HE\left(L\left(S,\overline{T}\right),B,E\right)$；

2) $\overline{z}\in -P$；

3) $-\overline{T}(\overline{z})\in K\setminus int E$；

4) $cl\left(cone\left(F(\overline{x})-E-\left(\overline{y}+\overline{T}(\overline{z})\right)\right)\right)\cap C_V(B)=\{0\}$。

证明 "⇒"：因为 $\left(\overline{x},\overline{T}\right)$ 是 $L(x,T)$ 的一个 E-Henig 真鞍点，所以存在 $\overline{y}\in F(\overline{x})$，$\overline{z}\in G(\overline{x})$ 使得

$$\overline{y}+\overline{T}(\overline{z})\in HE\left(L\left(S,\overline{T}\right),B,E\right), \tag{6}$$

$$\overline{y}+\overline{T}(\overline{z})\in HE_{\max}\left(L\left(\overline{x},L^+\right),B,E\right)。 \tag{7}$$

由(6)知，条件 1)成立。由(7)知，存在 $V\in N_B(0)$ 使

$$cl\left(cone\left(L^+\left(\overline{x},L^+\right)-E-\left(\overline{y}+\overline{T}(\overline{z})\right)\right)\right)\cap C_V(B)=\{0\}。 \tag{8}$$

因 $\forall T\in L^+(Z,Y)$，

$T(\overline{z})-\overline{T}(\overline{z})=\overline{y}+T(\overline{z})-\left(\overline{y}+\overline{T}(\overline{z})\right)\in F(\overline{x})+T\left(G(\overline{x})\right)-\left(\overline{y}+\overline{T}(\overline{z})\right)=L(\overline{x},T)-\left(\overline{y}+\overline{T}(\overline{z})\right)$。

所以 $\bigcup_{T\in L^+}T(\overline{z})-\overline{T}(\overline{z})\subseteq L\left(\overline{x},L^+\right)-\left(\overline{y}+\overline{T}(\overline{z})\right)$。从而

$$\bigcup_{T\in L^+}T(\overline{z})-E-\overline{T}(\overline{z})\subseteq L\left(\overline{x},L^+\right)-E-\left(\overline{y}+\overline{T}(\overline{z})\right)。$$

因为 $0\in C_V(B)$ 及 $0\in cl\left(cone\left(\bigcup_{T\in L^+}T(\overline{z})-E-\overline{T}(\overline{z})\right)\right)$，所以

$$cl\left(cone\left(\bigcup_{T\in L^+}T(\overline{z})-E-\overline{T}(\overline{z})\right)\right)\cap C_V(B)=\{0\}。 \tag{9}$$

令 $f:L^+(Z,Y)\to 2^Y$ 其中 $f(T)=-T(\overline{z})$，$\forall T\in L(Z,Y)$，则(9)式可写为

$$cl\left(cone\left(f\left(L^+\right)+E-f\left(\overline{T}\right)\right)\right)\cap\left(-C_V(B)\right)=\{0\}。$$

即 $f\left(\overline{T}\right)$ 是(P) $\min\limits_{s.t.T\in L^+(Z,Y)} f(T)$ 的一个 E-Henig 真有效点。因为 f 是线性的，所以 $f\left(L^+\right)-f\left(\overline{T}\right)$ 是上近似 E-次类凸的。有定理 2 可知，存在 $\mu\in int_B\left(K^*\right)$ 使得

$$\left\langle f(T)-f\left(\overline{T}\right),\mu\right\rangle\ge\sup_{e\in E}\langle -e,\mu\rangle,\forall T\in L^+(Z,Y)。$$

所以 $\left\langle f(T)-f\left(\overline{T}\right),\mu\right\rangle\ge\langle -e,\mu\rangle$，$\forall T\in L^+(Z,Y)$，$\forall e\in E$。于是

$$\langle -T(\overline{z}),\mu\rangle+\langle e,\mu\rangle\ge\left\langle -\overline{T}(\overline{z}),\mu\right\rangle,\forall T\in L^+(Z,Y),\forall e\in E. \tag{10}$$

现证：$-\overline{z}\in P$。

反证：假设 $-\overline{z}\cap P=\varnothing$。因为 P 是闭凸锥，所以由强凸集分离定理知，存在 $\sigma\in Z^*\setminus\{0\}$ 使得

$$\langle -\overline{z},\sigma\rangle<\langle \delta d,\sigma\rangle,\forall d\in P,\forall\delta>0。 \tag{11}$$

在(11)中取 $d=0\in P$，则有 $\langle\overline{z},\sigma\rangle>0$。再由(11)知

$$-\frac{\langle\overline{z},\sigma\rangle}{\delta}<\langle d,\sigma\rangle,\forall d\in P,\forall\delta>0。$$

当 $\delta \to \infty$ 时，有 $\langle d,\delta\rangle \ge 0$，所以有 $\sigma \in P^* \setminus \{0\}$。取 $k_0 \in intK$， $e_0 \in E$， 令 $\hat{T}: Z \to Y$

$$\hat{T}(z) = \frac{\langle z,\sigma\rangle}{\langle \bar{z},\sigma\rangle}(k_0 + e_0) + \bar{T}(\bar{z}) \subseteq K 。$$

所以 $\hat{T} \in L^+(Z,Y)$。

因为 $\hat{T}(\bar{z}) = \frac{\langle \bar{z},\sigma\rangle}{\langle \bar{z},\sigma\rangle}(k_0 + e_0) + \bar{T}(\bar{z}) = k_0 + e_0 + \bar{T}(\bar{z})$，所以 $\hat{T}(\bar{z}) - \bar{T}(\bar{z}) - e_0 = k_0$。由引理 1 可知，$k_0 \in int(C_V(B))$，则有

$$\langle \mu, \hat{T}(\bar{z}) - \bar{T}(\bar{z}) - e_0\rangle = \langle \mu, k_0\rangle > 0，$$

即 $-\langle \hat{T}(\bar{z}),\mu\rangle + \langle \mu,e_0\rangle < \langle -\bar{T}(\bar{z}),\mu\rangle$，与(10)式矛盾，所以条件 2)成立。

由于 $\bar{z} \in -P$， $\bar{T} \in L^+(Z,Y)$，则有 $-\bar{T}(\bar{z}) \in K$。

现证： $-\bar{T}(\bar{z}) \notin intE$。

假设 $-\bar{T}(\bar{z}) \in intE = E + intK$，则存在 $\bar{e} \in E$， $-\bar{T}(\bar{z}) - \bar{e} \in intK$，于是 $\langle -\bar{T}(\bar{z}) - \bar{e},\mu\rangle > 0$，即

$$\langle \bar{T}(\bar{z}),\mu\rangle + \langle \bar{e},\mu\rangle < 0 。$$

在(10)中令 $T = 0$，有 $\langle \bar{T}(\bar{z}),\mu\rangle + \langle \bar{e},\mu\rangle \ge 0, \forall e \in E$，与上式矛盾，条件 3)成立。

在(8)中令 $T = 0$，则条件 4)成立。

“$\Leftarrow$”：由条件 1)~4)，只需证 $\bar{y} + \bar{T}(\bar{z}) \in HE_{\max}\left(L(\bar{x},L^+),B,E\right)$。

假设 $\bar{y} + \bar{T}(\bar{z}) \notin HE_{\max}\left(L(\bar{x},L^+),B,E\right)$，则任意 $V \in N_B(0)$ 有

$$cl\left(cone\left(L(\bar{x},L^+) - E - \left(\bar{y} + \bar{T}(\bar{z})\right)\right)\right) \cap C_V(B) \ne \{0\}。$$

令 $T = 0 \in L(\bar{x},L^+)$，有

$$cl\left(cone\left(F(\bar{x}) - E - \left(\bar{y} + \bar{T}(\bar{z})\right)\right)\right) \cap C_V(B) \ne \{0\}，$$

与条件 4)矛盾。所以

$$L(\bar{x},\bar{T}) \cap HE\left(L(S,\bar{T}),B,E\right) \cap HE_{\max}\left(L(\bar{x},L^+),B,E\right) \ne \varnothing 。$$

定理 5 若 $(\bar{x},\bar{T}) \in S \times L^+(Z,T)$ 是 $L(x,T)$ 的一个 E-Henig 真鞍点， $0 \in G(\bar{x})$， $E' = E - \bar{T}(\bar{z})$，$\bar{y} \in F(\bar{x})$， $\bar{z} \in G(\bar{x})$，则 $(\bar{x},\bar{y})$ 是(VP)的一个 E'-Henig 真有效元。

证明 因为 $(\bar{x},\bar{T}) \in S \times L^+(Z,T)$ 是 $L(x,T)$ 的一个 E-Henig 真鞍点，所以存在 $\bar{y} \in F(\bar{x})$， $\bar{z} \in G(\bar{x})$ 以及 $V \in N_B(0)$ 使得

$$cl\left(cone\left(F(S) + \bar{T}(G(S)) + E - \left(\bar{y} + \bar{T}(\bar{z})\right)\right)\right) \cap \left(-C_V(B)\right) = \{0\} 。$$

因为 $E' = E - \bar{T}(\bar{z})$，所以 $E' \in \xi_Y$。又因为 $0 \in G(\bar{x}) \subseteq G(S)$，所以

$$E' = E - \bar{T}(\bar{z}) \subseteq E - \bar{T}(\bar{z}) + \bar{T}(G(S))。$$

所以

$$cl\left(cone\left(F(S) + E' - \bar{y}\right)\right) \cap \left(-C_V(B)\right) = \{0\} 。$$

即 $(\bar{x},\bar{y})$ 是(VP)的一个 E'-Henig 真有效元。

5. E-Henig 对偶

称集值映射 $\Phi: L^{+}(Z,Y)\to 2^{Y}$，其中 $\Phi(T)=H\varepsilon\left(L\left(S,\bar{T}\right),B,E\right)$，$T\in L^{+}(Z,Y)$ 为(VP)的 E-Henig 对偶映射。

称(VD) $\max \bigcup_{T\in L^{+}} \Phi(T)$ 为(VP)的对偶问题。

定义 12 1)若 $y\in \bigcup_{T\in L^{+}} \Phi(T)$，则称 y 为(VD)的一个可行点；

2) 若 $y-E-\bar{y}\notin int\left(C_{V}(B)\right)$，$\forall y\in \bigcup_{T\in L^{+}} \Phi(T)$，则称 $\bar{y}$ 为(VD)的 E-Henig 真有效点。

定理 6 设 $\bar{x}$ 为(VP)的任意可行解，$\bar{y}$ 为(VD)的任意可行点，则存在 $V\in N_{B}(0)$ 使

$$\left(\bar{y}-E-F(\bar{x})\right)\cap int\left(C_{V}(B)\right)=\varnothing 。$$

证明 因为 $\bar{y}$ 为(VD)的任意可行点，则存在 $\bar{T}\in L^{+}$ 使得

$$\bar{y}\in \Phi\left(\bar{T}\right)=HE\left(L\left(S,\bar{T}\right),B,E\right),$$

由定理 1 存在 $V\in N_{B}(0)$ 使得 $\left(L\left(S,\bar{T}\right)+E-\bar{y}\right)\cap\left(-int\left(C_{V}(B)\right)\right)=\varnothing$，即

$$\left(F(x)+\bar{T}(z)+E-\bar{y}\right)\cap\left(-int\left(C_{V}(B)\right)\right)=\varnothing, \forall x\in S, z\in G(x) 。$$

因为 $\bar{x}\in S$，所以有

$$\left(y+\bar{T}(w)+E-\bar{y}\right)\cap\left(-int\left(C_{V}(B)\right)\right)=\varnothing, \forall w\in G(\bar{x}), \forall y\in F(\bar{x}) 。\tag{12}$$

因为 $\bar{x}$ 为(VP)的可行解，所以 $G(\bar{x})\cap(-P)\neq\varnothing$，即存在 $\hat{z}\in G(\bar{x})$ 使 $\hat{z}\in -P$，所以 $-\bar{T}(\hat{z})\in \bar{T}(-P)\subseteq K$，令(12)中 $w=\hat{z}$，所以

$$\bar{y}-E-y-\bar{T}(\hat{z})\notin int\left(C_{V}(B)\right), \forall y\in F(\bar{x}) 。$$

因为 $-\bar{T}(\hat{z})\subseteq K$，所以

$$\bar{y}-E-y\notin int\left(C_{V}(B)\right), \forall y\in F(\bar{x}),$$

即 $\left(\bar{y}-E-F(\bar{x})\right)\notin int\left(C_{V}(B)\right)$。

定理 7 设 $\bar{x}$ 为(VP)的任意可行解，$\bar{y}$ 为(VD)的任意可行解，其中 $\bar{y}\in F(\bar{x})$，$\bar{x}$ 为(VP)的 E-Henig 真有效解，$\bar{y}$ 为(VD)的 E-Henig 真有效点.

证明 因为 $\bar{y}$ 为(VD)的任意可行解，所以 $\bar{y}\in \bigcup_{T\in L^{+}} \Phi(T)$，即存在 $\bar{T}\in L^{+}$ 使得 $\bar{y}\in \Phi\left(\bar{T}\right)=HE\left(L\left(S,\bar{T}\right),B,E\right)$。由定理 1 可知，存在 $V\in N_{B}(0)$ 使得

$$\bar{y}-E-y-\bar{T}(z)\notin int\left(C_{V}(B)\right), \forall x\in S, y\in F(x), z\in G(x) 。\tag{13}$$

有 $\hat{z}\in G(x)$ 且 $\hat{z}\in -P$ 所以 $-\bar{T}(\hat{z})\subseteq K$。令(13)中 $z=\hat{z}$，则有

$$\bar{y}-E-y-\bar{T}(\hat{z})\notin int\left(C_{V}(B)\right), \forall x\in C, \forall y\in F(x) 。$$

即

$$\forall x\in C, \bar{y}-E-y\notin int\left(C_{V}(B)\right), \forall x\in C, \forall y\in F(x) 。$$

因为 $\bar{y} \in F(\bar{x})$，所以 $\bar{x}$ 为(VP)的 E-Henig 真有效解。又因为 x 为(VP)的任意可行解，$\bar{y} \in F(\bar{x})$，由定理 6 知，

$$\left(y - E - \bar{y}\right) \cap int\left(C_V\left(B\right)\right) = \varnothing, \forall y \in \bigcup_{T \in L^+} \Phi\left(T\right),$$

所以 $\bar{y}$ 为(VD)的 E-Henig 真有效点。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11471291)。

参考文献 (References)

[1] Gutierrez, C., Jimenez, B. and Novo, V. (2006) A Unified Approach and Optimality Conditions for Approximate Solutions of Vector Optimization Problems. *SIAM Journal on Optimization*, **17**, 688-710. http://dx.doi.org/10.1137/05062648X

[2] White, D.J. (1986) Epsilon Efficiency. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **49**, 319-337. http://dx.doi.org/10.1007/BF00940762

[3] Loridan, P. (1984) ε-Solutions in Vector Minimization Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **43**, 265-276. http://dx.doi.org/10.1007/BF00936165

[4] Chicco, M., Mignanego, F., Pusillo, L. and Tijs, S. (2011) Vector Optimization Problems via Improvement Sets. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **150**, 516-529. http://dx.doi.org/10.1007/s10957-011-9851-1

[5] Gutierrez, C., Jimenez, B. and Novo, V. (2012) Improvement Sets and Vector Optimization. *European Journal of Operational Research*, **223**, 304-311. http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2012.05.050

[6] Zhao, K.Q., Yang, X.M. and Peng, J.W. (2013) Weak E-Optimal Solution in Vector Optimization. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **17**, 1287-1302.

[7] Zhao, K.Q. and Yang, X.M. (2015) E-Benson Proper Efficiency in Vector Optimization. *Optimization*, **64**, 739-752. http://dx.doi.org/10.1080/02331934.2013.798321

[8] Zhou, Z.A., Yang, X.M. and Zhao, K.Q. (2016) E-Super Efficiency of Set-Valued Optimization Problems Involving Improvement Sets. *Journal of Industrial and Management Optimization*, **12**, 1031-1039. http://dx.doi.org/10.3934/jimo.2016.12.1031

[9] Qiu, Q.-S. (2007) Henig Efficiency in Vector Optimization with Nearly Cone-Subconvexlike Set-Valued Functions. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, *English Series*, **23**, 319-328. http://dx.doi.org/10.1007/s10255-007-0374-3

[10] Gong, X.H. (2005) Optimality Conditions for Henig and Globally Proper Efficient Solutions with Ordering Cone Has Empty Interior. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **307**, 12-31. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.10.001

[11] Zalinescu, C. (2002) Convex Analysis in General Vector Spaces. World Scientific, Singapore. http://dx.doi.org/10.1142/5021

[12] 仇秋生. 关于 Henig 真有效性[J]. 系统科学与数学, 2011, 31(4): 482-488.

[13] Zhou, Z.A., Yang, X.M. and Peng, J.W. (2014) ε-Henig Proper Efficiency of Set-Valued Optimization Problems in Real Ordered Linear Spaces. *Optimization Letters*, **8**, 1813-1827. http://dx.doi.org/10.1007/s11590-013-0667-9

[14] Gutiérrez, C., Jiménez, B. and Novo, V. (2012) Improvement Sets and Vector Optimization. *European Journal of Operational Research*, **223**, 304-311. http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2012.05.050

[15] Yang, X.M., Li, D. and Wang, S.Y. (2001) Near-Subconvexlikeness in Vector Optimization with Set-Valued Functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **110**, 413-427. http://dx.doi.org/10.1023/A:1017535631418

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx