Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2016, 5(3), 505-515
Published Online August 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.53061

Subdirect Sums of Strictly Diagonally Dominant Matrices and Nekrasov Matrices

Jing Zhao, Ruiyan Hu, Yaotang Li*

School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming Yunnan
Email: 12014000854@mail.ynu.edu.cn, *liyaotang@ynu.edu.cn

Received: Aug. 10th, 2016; accepted: Aug. 25th, 2016; published: Aug. 31st, 2016

Abstract

A sufficient condition ensuring that the subdirect sum of strictly diagonally dominant matrix and Nekrasov matrix is in the class of Nekrasov matrices is given. And the conclusion is illustrated by a numerical example.

Keywords

Nekrasov Matrix, Strictly Diagonally Dominant, Subdirect Sum

严格对角占优矩阵与Nekrasov矩阵的子直和

赵　晶，胡汭炎，李耀堂*

云南大学数学与统计学院，云南　昆明
Email: 12014000854@mail.ynu.edu.cn, *liyaotang@ynu.edu.cn

收稿日期：2016年8月10日；录用日期：2016年8月25日；发布日期：2016年8月31日

摘　要

给出了严格对角占优矩阵与Nekrasov矩阵的子直和为Nekrasov矩阵的充分条件，并用数值例子对所给

*通讯作者。

文章引用: 赵晶, 胡汭炎, 李耀堂. 严格对角占优矩阵与Nekrasov矩阵的子直和[J]. 应用数学进展, 2016, 5(3): 505-515.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.53061

结论进行了说明。

关键词

Nekrasov矩阵，严格对角占优，子直和

1. 引言

矩阵在诸如微分方程，概率统计，最优化，计算数学，控制论与系统理论等数学分支都有着重要应用。1999 年 Fallat 和 Johonson 引入方阵的 k-子直和的概念[1]。由于矩阵的子直和在许多领域具有重要应用[1]-[4]，之后对矩阵的子直和的研究相继取得许多重要结果。2005 年 Pedroche 和 Szyld 等给出两个非奇异 M 矩阵的子直和是非奇异 M 矩阵的一些充分条件[2]，2006 年他们又给出 S 严格对角占优矩阵的 k-子直和是 S 严格对角占优阵的充分条件[5]。2007 年朱燕，黄廷祝对双对角占优矩阵的子直和进行了研究[6]，2010 年 Bru R，Cvetkovic L，Kostic V，Pedroche F 对Σ-严格对角占优矩阵的子直和进行了研究[7]，2015 年李朝迁，李耀堂等对 Nekrasov 矩阵的子直和进行了研究[8]。

本文我们继续研究 Nekrasov 矩阵的子直和，期望找到严格对角占优矩阵与 Nekrasov 矩阵的子直和仍为 Nekrasov 矩阵的条件。下面先给出本文中要用到的基本知识。

定义 1.1 [1]：设 A 为 n_1 阶方阵，B 为 n_2 阶方阵，k 为正整数且 $1\le k\le \min\{n_1,n_2\}$，$A$ 和 B 有如下 2×2 分块形式：

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

其中 A_{22} 和 B_{11} 是 k 阶方阵。令

$$C=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22}+B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}。$$

称 C 为 A 和 B 的 $n\ (n=n_1+n_2-k)$ 阶 k-子直和，记为 $C=A\oplus_k B$。

注 1 [5]：设 $A=[a_{ij}]$，$B=[b_{ij}]$，$C=A\oplus_k B=[c_{ij}]$，则由定义 1.1 易得：

$$c_{ij}=\begin{cases} a_{ij}, & i\in S_1,\quad j\in S_1\cup S_2, \\ 0, & i\in S_1,\quad j\in S_3, \\ a_{ij}, & i\in S_2,\quad j\in S_1, \\ a_{ij}+b_{i-n_1+k,\,j-n_1+k}, & i\in S_2,\quad j\in S_2, \\ b_{i-n_1+k,\,j-n_1+k}, & i\in S_2,\quad j\in S_3, \\ 0, & i\in S_3,\quad j\in S_1, \\ b_{i-n_1+k,\,j-n_1+k}, & i\in S_3,\quad j\in S_2\cup S_3. \end{cases}$$

其中

$$S_1=\{1,2,\cdots,n_1-k\},\ S_2=\{n_1-k+1,n_1-k+2,\cdots,n_1\},\ S_3=\{n_1+1,n_1+2,\cdots,n\}。 \tag{2}$$

$$S_1\cup S_2\cup S_3=N:=\{1,2,\cdots,n\}。$$

故 C 有可表示如下：

$$
C=\left[\begin{array}{ccccccccc}
\multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{a_{n_1-k+1,1}\quad\cdots\quad a_{n_1-k+1,n_1-k}}}^{S_1}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{a_{n_1-k+1,n_1-k+1}+b_{11}\quad\cdots\quad a_{n_1-k+1,n_1}+b_{1,k}}}^{S_2}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{b_{k+1,k+1}\quad\cdots\quad b_{k+1,n_2}}}^{S_3}} \\
a_{11} & \cdots & a_{1,n_1-k} & a_{1,n_1-k+1} & \cdots & a_{1,n_1} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n_1-k+1,1} & \cdots & a_{n_1-k+1,n_1-k} & a_{n_1-k+1,n_1-k+1}+b_{11} & \cdots & a_{n_1-k+1,n_1}+b_{1,k} & b_{1,k+1} & \cdots & b_{1,n_2} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n_1,1} & \cdots & a_{n_1,n_1-k} & a_{n_1,n_1-k+1}+b_{k,1} & \cdots & a_{n_1,n_1}+b_{k,k} & b_{k,k+1} & \cdots & b_{k,n_2} \\
0 & \cdots & 0 & b_{k+1,1} & \cdots & b_{k+1,k} & b_{k+1,k+1} & \cdots & b_{k+1,n_2} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & b_{n_2,1} & \cdots & b_{n_2,k} & b_{n_2,k+1} & \cdots & b_{n_2,n_2}
\end{array}\right]。
$$

定义 1.2 [9]-[11]：设矩阵 $A=\left[a_{ij}\right]$ 是 n 阶矩阵，若对任意一个 $i\in N$，$\left|a_{ii}\right|>r_i(A)$ 成立，其中 $r_i(A)=\sum_{j=1}^{i-1}\left|a_{ij}\right|+\sum_{j=i+1}^{n}\left|a_{ij}\right|$，则称 A 为严格对角占优矩阵。

定义 1.3 [12] [13]：设矩阵 $A=\left[a_{ij}\right]$ 是 n 阶矩阵，令

$$h_1(A)=r_1(A)，\quad h_i(A)=\sum_{j=1}^{i-1}\left|a_{ij}\right|\frac{h_j(A)}{\left|a_{jj}\right|}+\sum_{j=i+1}^{n}\left|a_{ij}\right|, i=2,3,\cdots,n。$$

若对任意一个 $i\in N$，$\left|a_{ii}\right|>h_i(A)$ 成立，则 A 称是 *Nekrasov* 矩阵。

2. 严格对角占优矩阵与 Nekrasov 矩阵的子直和

首先我们用一个例子说明严格对角占优矩阵与 *Nekrasov* 矩阵的子直和不一定是 *Nekrasov* 矩阵。

例 2.1：设

$$A=\begin{bmatrix} 1.51 & -0.40 & -0.50 & -0.60 \\ 0 & 1.63 & -0.80 & -0.80 \\ -0.50 & -0.10 & 1.60 & -0.90 \\ -0.50 & -0.80 & -0.20 & 2.80 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 7.90 & -0.50 & -0.50 & -0.50 \\ -9.00 & 12.00 & -5.00 & -5.00 \\ -4.00 & 0 & 9.60 & -3.00 \\ -4.90 & 0 & 0 & 6.00 \end{bmatrix},$$

容易验证 A 是严格对角占优矩阵，B 是 *Nekrasov* 矩阵。由定义得 A 与 B 的 3-子直和 $C=A\oplus_3 B$ 为

$$C=\begin{bmatrix} 1.51 & -0.40 & -0.50 & -0.60 & 0 \\ 0 & 9.53 & -1.30 & -1.30 & -0.50 \\ -0.50 & -9.10 & 13.60 & -5.90 & -0.50 \\ -0.50 & -4.80 & -0.20 & 12.40 & -3.00 \\ 0 & -4.90 & 0 & 0 & 6.00 \end{bmatrix}。$$

直接计算得 $h_1(C)=1.5000$，$h_2(C)=3.1000$，$h_3(C)=14.3568$，$h_4(C)=5.2692$，$h_5(C)=1.5939$。显然，$\left|c_{33}\right|<h_3(C)$，因此 $C=A\oplus_3 B$ 不是 *Nekrasov* 矩阵。

注 2：例 2.1 表明任意给出的严格对角占优矩阵与 *Nekrasov* 矩阵的子直和不一定是 *Nekrasov* 矩阵。下面我们来寻找严格对角占优矩阵与 *Nekrasov* 矩阵的子直和是 *Nekrasov* 矩阵的条件。为此先给出三个引理。

引理 2.1：设 $A=\left[a_{ij}\right]$ 是 n_1 阶严格对角占优矩阵，$B=\left[b_{ij}\right]$ 是 n_2 阶的 *Nekrasov* 矩阵，其分块如(1)所示，若 $1\le k\le \min\{n_1,n_2\}$，$S_1,S_2,S_3$ 如(2)所示，其中 $n=n_1+n_2-k$，且 A_{22}，B_{11} 的主对角线元素全正(或全负)，则对于 k-子直和 $C=A\oplus_k B$ 有：对任意的 $i\in S_1$，$h_i(C)=h_i(A)$。

证明： 该引理的结论可由注 1 直接得到。

引理 2.2： 设 $A=\left[a_{ij}\right]$ 是 n_1 阶严格对角占优矩阵，$B=\left[b_{ij}\right]$ 是 n_2 阶的 *Nekrasov* 矩阵，其分块如(1)所示，若 $1\le k\le\min\{n_1,n_2\}$，S_1,S_2,S_3 分布如(2)所示，其中 $n=n_1+n_2-k$，A_{22}，B_{11}，的主对角线元素全正(或全负)，则对于 k-子直和 $C=A\oplus_k B$ 和 $i\in S_2$ 有：

1) $h_{n_1-k+1}(C)=h_{n_1-k+1}(A)-\sum\limits_{\substack{j=n_1-k+2\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|a_{n_1-k+1,j}\right|+h_1(B)-\sum\limits_{j=2}^{k}\left|b_{1j}\right|+\sum\limits_{\substack{j=n_1-k+2\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|a_{n_1-k+1,j}+b_{1,j-n_1+k}\right|\triangleq\tilde{h}_{n_1-k+1}$；

2) 当 $n_1-k+2\le i\le n_1-1$ 时：

$$h_i(C)=h_i(A)-\sum_{\substack{j=n_1-k+1\\ j\in S_2}}^{i-1}\left|a_{ij}\right|\frac{h_j(A)}{\left|a_{jj}\right|}-\sum_{\substack{j=i+1\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|a_{ij}\right|+h_{i-n_1+k}(B)-\sum_{j=1}^{i-n_1+k-1}\left|b_{i-n_1+k,j}\right|\frac{h_j(B)}{\left|b_{jj}\right|}$$

$$-\sum_{j=i-n_1+k+1}^{k}\left|b_{i-n_1+k,j}\right|+\sum_{\substack{j=n_1-k+1\\ j\in S_2}}^{i-1}\left|a_{ij}+b_{i-n_1+k,j-n_1+k}\right|\frac{\tilde{h}_j}{\left|a_{jj}+b_{j-n_1+k,j-n_1+k}\right|}\ ;$$

$$+\sum_{\substack{j=i+1\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|a_{ij}+b_{i-n_1+k,j-n_1+k}\right|\triangleq\tilde{h}_i$$

3)

$$h_{n_1}(C)=h_{n_1}(A)-\sum_{\substack{j=n_1-k+1\\ j\in S_2}}^{n_1-1}\left|a_{n_1,j}\right|\frac{h_j(A)}{\left|a_{jj}\right|}+h_k(B)-\sum_{j=1}^{k-1}\left|b_{k,j}\right|\frac{h_j(B)}{\left|b_{jj}\right|}+\sum_{\substack{j=n_1-k+1\\ j\in S_2}}^{n_1-1}\left|a_{n_1,j}+b_{k,j-n_1+k}\right|\frac{\tilde{h}_j}{\left|a_{jj}+b_{j-n_1+k,j-n_1+k}\right|}\triangleq\tilde{h}_{n_1}\text{。}$$

证明： 设 $A=\left[a_{ij}\right]$ 是 n_1 阶严格对角占优矩阵，$B=\left[b_{ij}\right]$ 是 n_2 阶的 *Nekrasov* 矩阵。下面分三种情形讨论：

情形一：当 $i=n_1-k+1$ 时：

$$\begin{aligned}h_{n_1-k+1}(C)&=\sum_{\substack{j=1\\ j\in S_1}}^{n_1-k}\left|c_{n_1-k+1,j}\right|\frac{h_j(C)}{\left|c_{jj}\right|}+\sum_{\substack{j=n_1-k+2\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|c_{n_1-k+1,j}\right|+\sum_{\substack{j=n_1+1\\ j\in S_3}}^{n}\left|c_{n_1-k+1,j}\right|\\&=\sum_{\substack{j=1\\ j\in S_1}}^{n_1-k}\left|a_{n_1-k+1,j}\right|\frac{h_j(A)}{\left|a_{jj}\right|}+\sum_{\substack{j=n_1-k+2\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|a_{n_1-k+1,j}+b_{1,j-n_1+k}\right|+\sum_{j=k+1}^{n_2}\left|b_{1j}\right|\\&=h_{n_1-k+1}(A)-\sum_{\substack{j=n_1-k+2\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|a_{n_1-k+1,j}\right|+h_1(B)-\sum_{j=2}^{k}\left|b_{1j}\right|+\sum_{\substack{j=n_1-k+2\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|a_{n_1-k+1,j}+b_{1,j-n_1+k}\right|\triangleq\tilde{h}_{n_1-k+1}\end{aligned}\text{。}$$

情形二：当 $i=n_1-k+2$ 时：

$$\begin{aligned}h_{n_1-k+2}(C)&=\sum_{\substack{j=1\\ j\in S_1}}^{n_1-k+1}\left|c_{n_1-k+2,j}\right|\frac{h_j(C)}{\left|c_{jj}\right|}+\sum_{\substack{j=n_1-k+3\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|c_{n_1-k+2,j}\right|+\sum_{\substack{j=n_1+1\\ j\in S_3}}^{n}\left|c_{n_1-k+2,j}\right|\\&=\sum_{\substack{j=1\\ j\in S_1}}^{n_1-k}\left|a_{n_1-k+2,j}\right|\frac{h_j(A)}{\left|a_{jj}\right|}+\left|c_{n_1-k+2,n_1-k+1}\right|\frac{h_{n_1-k+1}(C)}{\left|c_{n_1-k+1,n_1-k+1}\right|}+\sum_{\substack{j=n_1-k+3\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|a_{n_1-k+2,j}+b_{2,j-n_1+k}\right|+\sum_{j=k+1}^{n_2}\left|b_{2j}\right|\\&=h_{n_1-k+2}(A)-\left|a_{n_1-k+2,n_1-k+1}\right|\frac{h_{n_1-k+1}(A)}{\left|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}\right|}-\sum_{\substack{j=n_1-k+3\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|a_{n_1-k+2,j}\right|+h_2(B)-\left|b_{21}\right|\frac{h_1(B)}{\left|b_{11}\right|}-\sum_{j=3}^{k}\left|b_{2j}\right|\\&\quad+\left|a_{n_1-k+2,n_1-k+1}+b_{21}\right|\frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{\left|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}+b_{11}\right|}+\sum_{\substack{j=n_1-k+3\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|a_{n_1-k+2,j}+b_{2,j-n_1+k}\right|\triangleq\tilde{h}_{n_1-k+2}\end{aligned}\text{。}$$

当$i=n_1-k+3$时：

$$
\begin{aligned}
h_{n_1-k+3}(C)&=\sum_{\substack{j=1\\ j\in S_1}}^{n_1-k+1}\left|c_{n_1-k+3,j}\right|\frac{h_j(C)}{\left|c_{jj}\right|}+\sum_{\substack{j=n_1-k+4\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|c_{n_1-k+3,j}\right|+\sum_{\substack{j=n_1+1\\ j\in S_3}}^{n}\left|c_{n_1-k+3,j}\right|\\
&=\sum_{\substack{j=1\\ j\in S_1}}^{n_1-k}\left|a_{n_1-k+3,j}\right|\frac{h_j(A)}{\left|a_{jj}\right|}+\sum_{n_1-k+1}^{n_1-k+2}\left|c_{n_1-k+3,j}\right|\frac{h_j(C)}{\left|c_{jj}\right|}+\sum_{\substack{j=n_1-k+4\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|a_{n_1-k+3,j}+b_{3,j-n_1+k}\right|+\sum_{j=k+1}^{n_2}\left|b_{3j}\right|\\
&=h_{n_1-k+3}(A)-\sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-k+2}\left|a_{n_1-k+3,j}\right|\frac{h_j(A)}{\left|a_{jj}\right|}-\sum_{\substack{j=n_1-k+4\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|a_{n_1-k+3,j}\right|+h_3(B)-\sum_{j=1}^{2}\left|b_{3j}\right|\frac{h_j(B)}{\left|b_{jj}\right|}-\sum_{j=4}^{k}\left|b_{3j}\right|\\
&\quad+\sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-k+2}\left|a_{n_1-k+3,j}+b_{n_1-k+3-n_1+k,j-n_1+k}\right|\frac{\tilde{h}_j}{\left|a_{jj}+b_{j-n_1+k,j-n_1+k}\right|}+\sum_{\substack{j=n_1-k+4\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|a_{n_1-k+3,j}+b_{3,j-n_1+k}\right|\triangleq\tilde{h}_{n_1-k+3}
\end{aligned}
$$

。

现假设$i=n_1-k+s-1$，其中$(2<s\le k-1)$，

$$
\begin{aligned}
h_{n_1-k+s-1}(C)=h_{n_1-k+s-1}(A)&-\sum_{\substack{j=n_1-k+1\\ j\in S_2}}^{n_1-k+s-2}\left|a_{n_1-k+s-1,j}\right|\frac{h_j(A)}{\left|a_{jj}\right|}-\sum_{\substack{j=n_1-k+s\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|a_{n_1-k+s-1,j}\right|+h_{n_1-k+s-1-n_1+k}(B)\\
&-\sum_{j=1}^{n_1-k+s-n_1+k-2}\left|b_{n_1-k+s-1-n_1+k,j}\right|\frac{h_j(B)}{\left|b_{jj}\right|}-\sum_{j=n_1-k+s-n_1+k}^{k}\left|b_{n_1-k+s-1-n_1+k,j}\right|\\
&+\sum_{\substack{j=n_1-k+1\\ j\in S_2}}^{n_1-k+s-2}\left|a_{n_1-k+s-1,j}+b_{n_1-k+s-1-n_1+k,j-n_1+k}\right|\frac{\tilde{h}_j}{\left|a_{jj}+b_{j-n_1+k,j-n_1+k}\right|}\\
&+\sum_{\substack{j=n_1-k+s\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|a_{n_1-k+s-1,j}+b_{n_1-k+s-1-n_1+k,j-n_1+k}\right|\triangleq\tilde{h}_{n_1-k+s-1}
\end{aligned}
$$

成立。

则

$$
\begin{aligned}
h_{n_1-k+s}(C)&=\sum_{j=1}^{n_1-k+s-1}\left|c_{n_1-k+s,j}\right|\frac{h_j(C)}{\left|c_{jj}\right|}+\sum_{j=n_1-k+s+1}^{n}\left|c_{n_1-k+s,j}\right|\\
&=\sum_{\substack{j=1\\ j\in S_1}}^{n_1-k}\left|a_{n_1-k+s,j}\right|\frac{h_j(A)}{\left|a_{jj}\right|}+\sum_{\substack{j=n_1-k+1\\ j\in S_2}}^{n_1-k+s-1}\left|a_{n_1-k+s,j}+b_{n_1-k+s-n_1+k,j-n_1+k}\right|\frac{h_j(C)}{\left|c_{jj}\right|}\\
&\quad+\sum_{\substack{j=n_1-k+s+1\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|a_{n_1-k+s,j}+b_{n_1-k+s-n_1+k,j-n_1+k}\right|+\sum_{j=k+1}^{n_2}\left|b_{n_1-k+s-n_1+k,j}\right|\\
&=h_{n_1-k+s}(A)-\sum_{\substack{j=n_1-k+1\\ j\in S_2}}^{n_1-k+s-1}\left|a_{n_1-k+s,j}\right|\frac{h_j(A)}{\left|a_{jj}\right|}-\sum_{\substack{j=n_1-k+s+1\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|a_{n_1-k+s,j}\right|+h_{n_1-k+s-n_1+k}(B)\\
&\quad-\sum_{j=1}^{n_1-k+s-n_1+k-1}\left|b_{n_1-k+s-n_1+k,j}\right|\frac{h_j(B)}{\left|b_{jj}\right|}-\sum_{j=n_1-k+s-n_1+k+1}^{k}\left|b_{n_1-k+s-n_1+k,j}\right|\\
&\quad+\sum_{\substack{j=n_1-k+1\\ j\in S_2}}^{n_1-k+s-1}\left|a_{n_1-k+s,j}+b_{n_1-k+s-n_1+k,j-n_1+k}\right|\frac{\tilde{h}_j}{\left|a_{jj}+b_{j-n_1+k,j-n_1+k}\right|}\\
&\quad+\sum_{\substack{j=n_1-k+s+1\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|a_{n_1-k+s,j}+b_{n_1-k+s-n_1+k,j-n_1+k}\right|\triangleq\tilde{h}_{n_1-k+s}
\end{aligned}
$$

。

情形三：当 $i=n_1$ 时：

$$h_{n_1}(C)=h_{n_1}(A)-\sum_{\substack{j=n_1-k+1\\ j\in S_2}}^{n_1-1}\left|a_{n_1,j}\right|\frac{h_j(A)}{\left|a_{jj}\right|}+h_k(B)-\sum_{j=1}^{k-1}\left|b_{k,j}\right|\frac{h_j(B)}{\left|b_{jj}\right|}+\sum_{\substack{j=n_1-k+1\\ j\in S_2}}^{n_1-1}\left|a_{n_1,j}+b_{k,j-n_1+k}\right|\frac{\tilde{h}_j}{\left|a_{jj}+b_{j-n_1+k,j-n_1+k}\right|}\triangleq\tilde{h}_{n_1}\text{。}\square$$

引理 2.3： 设 $A=\left[a_{ij}\right]$ 是 n_1 阶严格对角占优矩阵，$B=\left[b_{ij}\right]$ 是 n_2 阶的 *Nekrasov* 矩阵，其分块如(1)所示，若 $1\le k\le\min\{n_1,n_2\}$，S_1,S_2,S_3 如(2)所示，其中 $n=n_1+n_2-k$，A_{22} 和 B_{11} 的主对角线元素全正(或全负)，且

$$\frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{\left|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}+b_{11}\right|}\le\frac{h_1(B)}{\left|b_{11}\right|},\frac{\tilde{h}_{n_1-k+2}}{\left|a_{n_1-k+2,n_1-k+2}+b_{22}\right|}\le\frac{h_2(B)}{\left|b_{22}\right|},\cdots,\frac{\tilde{h}_{n_1}}{\left|a_{n_1,n_1}+b_{kk}\right|}\le\frac{h_k(B)}{\left|b_{kk}\right|},$$

则在 A 与 B 的 k-子直和 $C=A\oplus_k B$ 中，对任意的 $i\in S_3$，$h_i(C)\le h_{i-n_1+k}(B)$ 成立。

证明： 我们用数学归纳法证明。设 A 是 n_1 阶严格对角占优矩阵，B 是 n_2 阶的 *Nekrasov* 矩阵。任取 $i\in S_3$，当 $i=n_1+1\in S_3$ 时：

$$\begin{aligned}h_i(C)=h_{n_1+1}(C)&=\sum_{j=1}^{n_1}\left|c_{n_1+1,j}\right|\frac{h_j(C)}{\left|c_{jj}\right|}+\sum_{j=n_1+2}^{n}\left|c_{n_1+1,j}\right|\\&=\sum_{\substack{j=1\\ j\in S_1}}^{n_1-k}\left|c_{n_1+1,j}\right|\frac{h_j(C)}{\left|c_{jj}\right|}+\sum_{\substack{j=n_1-k+1\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|c_{n_1+1,j}\right|\frac{h_j(C)}{\left|c_{jj}\right|}+\sum_{\substack{j=n_1+2\\ j\in S_3}}^{n}\left|c_{n_1+1,j}\right|\\&=\left|b_{k+1,1}\right|\frac{h_{n_1-k+1}(C)}{\left|c_{n_1-k+1,n_1-k+1}\right|}+\cdots+\left|b_{k+1,k}\right|\frac{h_{n_1}(C)}{\left|c_{n_1,n_1}\right|}+\sum_{j=k+2}^{n_2}\left|b_{k+1,j}\right|\\&=\left|b_{k+1,1}\right|\frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{\left|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}+b_{11}\right|}+\cdots+\left|b_{k+1,k}\right|\frac{\tilde{h}_{n_1}}{\left|a_{n_1,n_1}+b_{kk}\right|}+\sum_{j=k+2}^{n_2}\left|b_{k+1,j}\right|\end{aligned}\text{。}\tag{3}$$

由

$$h_{k+1}(B)=\sum_{j=1}^{k}\left|b_{k+1,j}\right|\frac{h_j(B)}{\left|b_{jj}\right|}+\sum_{j=k+2}^{n_2}\left|b_{k+1,j}\right|=\left|b_{k+1,1}\right|\frac{h_1(B)}{\left|b_{11}\right|}+\cdots+\left|b_{k+1,k}\right|\frac{h_k(B)}{\left|b_{kk}\right|}+\sum_{j=k+2}^{n_2}\left|b_{k+1,j}\right|\text{。}\tag{4}$$

和条件

$$\frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{\left|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}+b_{11}\right|}\le\frac{h_1(B)}{\left|b_{11}\right|},\frac{\tilde{h}_{n_1-k+2}}{\left|a_{n_1-k+2,n_1-k+2}+b_{22}\right|}\le\frac{h_2(B)}{\left|b_{22}\right|},\cdots,\frac{\tilde{h}_{n_1}}{\left|a_{n_1,n_1}+b_{kk}\right|}\le\frac{h_k(B)}{\left|b_{kk}\right|},$$

得

$$h_{n_1+1}(C)\le h_{k+1}(B)\text{。}\tag{5}$$

当 $i=n_1+2\in S_3$ 时：

$$\begin{aligned}h_i(C)=h_{n_1+2}(C)&=\sum_{\substack{j=1\\ j\in S_1}}^{n_1-k}\left|c_{n_1+2,j}\right|\frac{h_j(C)}{\left|c_{jj}\right|}+\sum_{\substack{j=n_1-k+1\\ j\in S_2}}^{n_1}\left|c_{n_1+2,j}\right|\frac{h_j(C)}{\left|c_{jj}\right|}+\left|c_{n_1+2,n_1+1}\right|\frac{h_{n_1+1}(C)}{\left|c_{n_1+1,n_1+1}\right|}+\sum_{\substack{j=n_1+3\\ j\in S_3}}^{n}\left|c_{n_1+2,j}\right|\\&=\left|c_{n_1+2,n_1-k+1}\right|\frac{h_{n_1-k+1}(C)}{\left|c_{n_1-k+1,n_1-k+1}\right|}+\cdots+\left|c_{n_1+2,n_1}\right|\frac{h_{n_1}(C)}{\left|c_{n_1,n_1}\right|}+\left|c_{n_1+2,n_1+1}\right|\frac{h_{n_1+1}(C)}{\left|c_{n_1+1,n_1+1}\right|}\\&=\left|b_{k+2,1}\right|\frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{\left|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}+b_{11}\right|}+\cdots+\left|b_{k+2,k}\right|\frac{\tilde{h}_{n_1}}{\left|a_{n_1,n_1}+b_{kk}\right|}+\left|b_{k+2,k+1}\right|\frac{h_{n_1+1}(C)}{\left|b_{k+1,k+1}\right|}+\sum_{j=k+3}^{n_2}\left|b_{k+2,j}\right|\end{aligned}\text{。}\tag{6}$$

由

$$h_{k+2}(B)=\sum_{j=1}^{k+1}|b_{k+2,j}|\frac{h_j(B)}{|b_{jj}|}+\sum_{j=k+3}^{n_2}|b_{k+2,j}|=|b_{k+2,1}|\frac{h_1(B)}{|b_{11}|}+\cdots+|b_{k+2,k+1}|\frac{h_{k+1}(B)}{|b_{k+1,k+1}|}+\sum_{j=k+3}^{n_2}|b_{k+2,j}|。\tag{7}$$

和条件

$$\frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}+b_{11}|}\le\frac{h_1(B)}{|b_{11}|},\frac{\tilde{h}_{n_1-k+2}}{|a_{n_1-k+2,n_1-k+2}+b_{22}|}\le\frac{h_2(B)}{|b_{22}|},\cdots,\frac{\tilde{h}_{n_1}}{|a_{n_1,n_1}+b_{kk}|}\le\frac{h_k(B)}{|b_{kk}|},$$

得

$$h_{n_1+2}(C)\le h_{k+2}(B)。\tag{8}$$

现假设任取 $i=n_1+1,n_1+2,\cdots,p$， $h_i(C)\le h_{i-n_1+k}(B)$ 成立，下证 $h_{p+1}(C)\le h_{p+1-n_1+k}(B)$ 成立，其中 $n_1+1\le p<n$。

当 $i=p+1\in S_3$ 时：

$$\begin{aligned}h_{p+1}(C)&=\sum_{\substack{j=1\\j\in S_1}}^{n_1-k}|c_{p+1,j}|\frac{h_j(C)}{|c_{jj}|}+\sum_{\substack{j=n_1-k+1\\j\in S_2}}^{n_1}|c_{p+1,j}|\frac{h_j(C)}{|c_{jj}|}+\sum_{\substack{j=n_1+1\\j\in S_3}}^{p}|c_{p+1,j}|\frac{h_j(C)}{|c_{jj}|}+\sum_{\substack{j=p+2\\j\in S_3}}^{n}|c_{p+1,j}|\\&=\sum_{\substack{j=n_1-k+1\\j\in S_2}}^{n_1}|c_{p+1,j}|\frac{h_j(C)}{|c_{jj}|}+\sum_{\substack{j=n_1+1\\j\in S_3}}^{p}|c_{p+1,j}|\frac{h_j(C)}{|c_{jj}|}+\sum_{j=p-n_1+k+2}^{n_2}|b_{p-n_1+k+1,j}|\\&=|c_{p+1,n_1-k+1}|\frac{h_{n_1-k+1}(C)}{|c_{n_1-k+1,n_1-k+1}|}+\cdots+|c_{p+1,n_1}|\frac{h_{n_1}(C)}{|c_{n_1,n_1}|}+|b_{p-n_1+k+1,k+1}|\frac{h_{n_1+1}(C)}{|b_{k+1,k+1}|}\\&\quad+\cdots+|b_{p-n_1+k+1,p-n_1+k}|\frac{h_p(C)}{|b_{p-n_1+k,p-n_1+k}|}+\sum_{j=p-n_1+k+2}^{n_2}|b_{p-n_1+k+1,j}|\\&=|b_{p-n_1+k+1,1}|\frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}+b_{11}|}+\cdots+|b_{p-n_1+k+1,k}|\frac{\tilde{h}_{n_1}}{|a_{n_1,n_1}+b_{kk}|}+|b_{p-n_1+k+1,k+1}|\frac{h_{n_1+1}(C)}{|b_{k+1,k+1}|}\\&\quad+\cdots+|b_{p-n_1+k+1,p-n_1+k}|\frac{h_p(C)}{|b_{p-n_1+k,p-n_1+k}|}+\sum_{j=p-n_1+k+2}^{n_2}|b_{p-n_1+k+1,j}|\end{aligned}。\tag{9}$$

由

$$\begin{aligned}h_{p+1-n_1+k}(B)&=\sum_{j=1}^{p-n_1+k}|b_{p-n_1+k+1,j}|\frac{h_j(B)}{|b_{jj}|}+\sum_{j=p-n_1+k+2}^{n_2}|b_{p-n_1+k+1,j}|\\&=|b_{p-n_1+k+1,1}|\frac{h_1(B)}{|b_{11}|}+\cdots+|b_{p-n_1+k+1,p-n_1+k}|\frac{h_{p-n_1+k}(B)}{|b_{p-n_1+k,p-n_1+k}|}+\sum_{j=p-n_1+k+2}^{n_2}|b_{p-n_1+k+1,j}|\end{aligned}。\tag{10}$$

和条件

$$\frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}+b_{11}|}\le\frac{h_1(B)}{|b_{11}|},\frac{\tilde{h}_{n_1-k+2}}{|a_{n_1-k+2,n_1-k+2}+b_{22}|}\le\frac{h_2(B)}{|b_{22}|},\cdots,\frac{\tilde{h}_{n_1}}{|a_{n_1,n_1}+b_{kk}|}\le\frac{h_k(B)}{|b_{kk}|},$$

及假设条件当 $i=n_1+1,n_1+2,\cdots,p$ 时 $h_i(C)\le h_{i-n_1+k}(B)$ 得

$$h_{p+1}(C)\le h_{p+1-n_1+k}(B)。$$

由此得 $C=A\oplus_k B$ 中任取 $i\in S_3$， $h_i(C)\le h_{i-n_1+k}(B)$ 成立。□

下面我们给出严格对角占优矩阵与 *Nekrasov* 矩阵的子直和是 *Nekrasov* 矩阵的一个充分条件。

定理 2.4： 设 $A=[a_{ij}]$ 是 n_1 阶严格对角占优矩阵， $B=[b_{ij}]$ 是 n_2 阶的 *Nekrasov* 矩阵，其分块如(1)所示，若 $1\le k\le\min\{n_1,n_2\}$ ， S_1,S_2,S_3 如(2)所示，其中 $n=n_1+n_2-k$ ， A_{22} ， B_{11} 的主对角线元素全正(或全负)，且

$$\frac{\tilde h_{n_1-k+1}}{\left|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}+b_{11}\right|}\le\frac{h_1(B)}{|b_{11}|},\frac{\tilde h_{n_1-k+2}}{\left|a_{n_1-k+2,n_1-k+2}+b_{22}\right|}\le\frac{h_2(B)}{|b_{22}|},\cdots,\frac{\tilde h_{n_1}}{\left|a_{n_1,n_1}+b_{kk}\right|}\le\frac{h_k(B)}{|b_{kk}|},$$

则 A 与 B 的 k-子直和 $C=A\oplus_k B$ 是 *Nekrasov* 矩阵。

证明： 因为 A 是严格对角占优矩阵，故

$$|a_{ii}|>r_i(A)=\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|+\sum_{j=i+1}^{n_1}|a_{ij}|,\ i\in(S_1\cup S_2)\text{。}$$

情形 1：当 $i\in S_1$ 时：

$$|c_{ii}|=|a_{ii}|>r_i(A)=\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|+\sum_{j=i+1}^{n_1}|a_{ij}|\ge\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|\frac{h_j(A)}{|a_{jj}|}+\sum_{j=i+1}^{n_1}|a_{ij}|=\sum_{j=1}^{i-1}|c_{ij}|\frac{h_j(C)}{|c_{jj}|}+\sum_{j=i+1}^{n_1}|c_{ij}|=h_i(C)\text{。}$$

情形 2：当 $i=n_1-k+1\in S_2$ 时：

$$\begin{aligned}\left|c_{n_1-k+1,n_1-k+1}\right|&=\left|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}\right|+|b_{11}|>r_{n_1-k+1}(A)+h_1(B)\\&=\sum_{j=1}^{n_1-k}|a_{n_1-k+1,j}|+\sum_{j=n_1-k+2}^{n_1}\left|a_{n_1-k+1,j}\right|+\sum_{j=2}^{k}|b_{1j}|+\sum_{j=k+1}^{n_2}|b_{1j}|\text{。}\\&\ge\sum_{\substack{j=1\\j\in S_1}}^{n_1-k}\left|c_{n_1-k+1,j}\right|\frac{h_j(C)}{|c_{jj}|}+\sum_{\substack{j=n_1-k+2\\j\in S_2\cup S_3}}^{n}\left|c_{n_1-k+1,j}\right|=h_{n_1-k+1}(C)\triangleq\tilde h_{n_1-k+1}\end{aligned}$$

现假设 $i<n_1-k+q$ 时， $h_i(C)<|c_{ii}|$ 成立，则当 $i=n_1-k+q\in S_2$ 时：

$$\begin{aligned}&\left|c_{n_1-k+q,n_1-k+q}\right|=\left|a_{n_1-k+q,n_1-k+q}\right|+|b_{qq}|>r_{n_1-k+q}(A)+h_q(B)\\&=\sum_{j=1}^{n_1-k+q-1}\left|a_{n_1-k+q,j}\right|+\sum_{j=n_1-k+q+1}^{n_1}\left|a_{n_1-k+q,j}\right|+\sum_{j=1}^{q-1}|b_{qj}|\frac{h_j(B)}{|b_{jj}|}+\sum_{j=q+1}^{n_2}|b_{qj}|\\&=\sum_{j=1}^{n_1-k}\left|a_{n_1-k+q,j}\right|+\sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-k+q-1}\left|a_{n_1-k+q,j}\right|+\sum_{j=n_1-k+q+1}^{n_1}\left|a_{n_1-k+q,j}\right|+\sum_{j=1}^{q-1}|b_{qj}|\frac{h_j(B)}{|b_{jj}|}+\sum_{j=q+1}^{n_2}|b_{qj}|\\&\ge\sum_{\substack{j=1\\j\in S_1}}^{n_1-k}\left|c_{n_1-k+q,j}\right|\frac{h_j(C)}{|c_{jj}|}+\left(\sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-k+q-1}\left|a_{n_1-k+q,j}\right|\frac{h_j(B)}{|b_{jj}|}+\sum_{j=1}^{q-1}|b_{qj}|\frac{h_j(B)}{|b_{jj}|}\right)+\sum_{j=n_1-k+q+1}^{n_1}\left|a_{n_1-k+q,j}\right|+\sum_{j=q+1}^{n_2}|b_{qj}|\\&\ge\sum_{\substack{j=1\\j\in S_1}}^{n_1-k}\left|c_{n_1-k+q,j}\right|\frac{h_j(C)}{|c_{jj}|}+\left(\left|a_{n_1-k+q,n_1-k+1}\right|+|b_{q1}|\right)\frac{h_1(B)}{|b_{11}|}+\cdots+\left(\left|a_{n_1-k+q,n_1-k+q-1}\right|+|b_{q,q-1}|\right)\frac{h_{q-1}(B)}{|b_{q-1,q-1}|}+\sum_{j=n_1-k+q+1}^{n}\left|c_{n_1-k+q,j}\right|\\&\ge\sum_{\substack{j=1\\j\in S_1}}^{n_1-k}\left|c_{n_1-k+q,j}\right|\frac{h_j(C)}{|c_{jj}|}+\left|c_{n_1-k+q,n_1-k+1}\right|\frac{h_1(B)}{|b_{11}|}+\cdots+\left|c_{n_1-k+q,n_1-k+q-1}\right|\frac{h_{q-1}(B)}{|b_{q-1,q-1}|}+\sum_{j=n_1-k+q+1}^{n}\left|c_{n_1-k+q,j}\right|\\&=\sum_{\substack{j=1\\j\in S_1}}^{n_1-k}\left|c_{n_1-k+q,j}\right|\frac{h_j(C)}{|c_{jj}|}+\sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-k+q-1}|c_{n_1-k+q,j}|\frac{h_{j-n_1+k}(B)}{\left|b_{j-n_1+k,j-n_1+k}\right|}+\sum_{j=n_1-k+q+1}^{n}\left|c_{n_1-k+q,j}\right|\end{aligned}\text{。}\quad(11)$$

$$\begin{aligned}h_{n_1-k+q}(C)&=\sum_{j=1}^{n_1-k+q-1}\left|c_{n_1-k+q,j}\right|\frac{h_j(C)}{\left|c_{jj}\right|}+\sum_{j=n_1-k+q+1}^{n}\left|c_{n_1-k+q,j}\right|\\&=\sum_{\substack{j=1\\j\in S_1}}^{n_1-k}\left|c_{n_1-k+q,j}\right|\frac{h_j(C)}{\left|c_{jj}\right|}+\sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-k+q-1}\left|c_{n_1-k+q,j}\right|\frac{h_j(C)}{\left|c_{jj}\right|}+\sum_{j=n_1-k+q+1}^{n}\left|c_{n_1-k+q,j}\right|\\&=\sum_{\substack{j=1\\j\in S_1}}^{n_1-k}\left|c_{n_1-k+q,j}\right|\frac{h_j(C)}{\left|c_{jj}\right|}+\sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-k+q-1}\left|a_{n_1-k+q,j}+b_{q,j-n_1+k}\right|\frac{\tilde{h}_j}{\left|a_{jj}+b_{j-n_1+k,j-n_1+k}\right|}+\sum_{j=n_1-k+q+1}^{n}\left|c_{n_1-k+q,j}\right|\end{aligned}。\quad(12)$$

于是由条件 $\frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{\left|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}+b_{11}\right|}\le\frac{h_1(B)}{\left|b_{11}\right|}$，$\frac{\tilde{h}_{n_1-k+2}}{\left|a_{n_1-k+2,n_1-k+2}+b_{22}\right|}\le\frac{h_2(B)}{\left|b_{22}\right|}$，$\cdots$，$\frac{\tilde{h}_{n_1}}{\left|a_{n_1,n_1}+b_{kk}\right|}\le\frac{h_k(B)}{\left|b_{kk}\right|}$ 及(11)、(12)得

$$h_{n_1-k+q}(C)\le r_{n_1-k+q}(A)+h_q(B)<\left|c_{n_1-k+q,n_1-k+q}\right|。$$

因此对任意的 $i\in S_2,h_i(C)<\left|c_{ii}\right|$ 成立。

情形 3：当 $i=n_1+1\in S_3$ 时：

$$\begin{aligned}\left|c_{n_1+1,n_1+1}\right|=\left|b_{k+1,k+1}\right|>h_{k+1}(B)&=\sum_{j=1}^{k}\left|b_{k+1,j}\right|\frac{h_j(B)}{\left|b_{jj}\right|}+\sum_{j=k+2}^{n_2}\left|b_{k+1,j}\right|\\&=\left|b_{k+1,1}\right|\frac{h_1(B)}{\left|b_{11}\right|}+\cdots+\left|b_{k+1,k}\right|\frac{h_k(B)}{\left|b_{kk}\right|}+\sum_{j=k+2}^{n_2}\left|b_{k+1,j}\right|\end{aligned}。\quad(13)$$

$$\begin{aligned}h_{n_1+1}(C)&=\sum_{j=1}^{n_1}\left|c_{n_1+1,j}\right|\frac{h_j(C)}{\left|c_{jj}\right|}+\sum_{j=n_1+2}^{n}\left|c_{n_1+1,j}\right|\\&=\sum_{\substack{j=1\\j\in S_1}}^{n_1-k}\left|c_{n_1+1,j}\right|\frac{h_j(C)}{\left|c_{jj}\right|}+\sum_{\substack{j=n_1-k+1\\j\in S_2}}^{n_1}\left|c_{n_1+1,j}\right|\frac{h_j(C)}{\left|c_{jj}\right|}+\sum_{\substack{j=n_1+2\\j\in S_3}}^{n}\left|c_{n_1+1,j}\right|\\&=\left|b_{k+1,1}\right|\frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{\left|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}+b_{11}\right|}+\cdots+\left|b_{k+1,k}\right|\frac{\tilde{h}_{n_1}}{\left|a_{n_1,n_1}+b_{kk}\right|}+\sum_{j=k+2}^{n_2}\left|b_{k+1,j}\right|\end{aligned}。\quad(14)$$

由条件 $\frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{\left|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}+b_{11}\right|}\le\frac{h_1(B)}{\left|b_{11}\right|}$，$\frac{\tilde{h}_{n_1-k+2}}{\left|a_{n_1-k+2,n_1-k+2}+b_{22}\right|}\le\frac{h_2(B)}{\left|b_{22}\right|}$，$\cdots$，$\frac{\tilde{h}_{n_1}}{\left|a_{n_1,n_1}+b_{kk}\right|}\le\frac{h_k(B)}{\left|b_{kk}\right|}$ 及(13)、(14)得

$$h_{n_1+1}(C)\le h_{k+1}(B)<\left|c_{n_1+1,n_1+1}\right|。$$

现设对任意 $n_1<i<n_1+r$，$h_i(C)<\left|c_{ii}\right|$ 成立，则当 $i=n_1+r\in S_3$ 时：

$$\left|c_{n_1+r,n_1+r}\right|=\left|b_{r+k,r+k}\right|>h_{r+k}(B)。$$

由引理 2.3 知对任意的 $n_1<i\le n$，$h_i(C)\le h_{i-n_1+k}(B)$。由此得

$$h_{n_1+r}(C)<\left|c_{n_1+r,n_1+r}\right|。$$

因此对任意 $i\in S_1\cup S_2\cup S_3,h_i(C)<\left|c_{ii}\right|$ 成立，从而 $C=A\oplus_k B$ 是 *Nekrasov* 矩阵。□

例 2.2：设

$$A=\begin{bmatrix}1.51 & -0.40 & -0.50 & -0.60\\ 0 & 9.00 & -0.80 & -0.80\\ -0.50 & -0.10 & 2.00 & -0.90\\ -0.50 & -0.80 & -0.20 & 1.60\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}7.90 & -0.50 & -0.50 & -0.50\\ -9.00 & 16.00 & -5.00 & -5.00\\ -4.00 & -7.00 & 9.60 & -3.00\\ -4.90 & -0.90 & -4.76 & 6.00\end{bmatrix},$$

容易验证 A 是严格对角占优矩阵，B 是 *Nekrasov* 矩阵，于是

$$C=A\oplus_3 B=\begin{bmatrix}1.51 & -0.4 & -0.5 & -0.6 & 0\\ 0 & 16.9 & -1.3 & -1.3 & -0.5\\ -0.5 & -9.1 & 18.0 & -5.9 & -5.0\\ -0.5 & -4.8 & -7.2 & 11.1 & -3.0\\ 0 & -4.9 & -0.9 & -4.76 & 6.0\end{bmatrix}。$$

通过计算可得：

$$h_1(B)=1.5000,\quad h_2(B)=11.7088608,\quad h_3(B)=8.88212027,$$

$$\frac{h_1(B)}{|b_{11}|}=0.18987342,\quad \frac{h_2(B)}{|b_{22}|}=0.7318038,\quad \frac{h_3(B)}{|b_{33}|}=0.92522086,$$

$$\frac{\tilde{h}_2}{|a_{22}+b_{11}|}=0.18343195,\quad \frac{\tilde{h}_3}{|a_{33}+b_{22}|}=0.72588442,\quad \frac{\tilde{h}_4}{|a_{44}+b_{33}|}=0.86518287,$$

$$\frac{\tilde{h}_2}{|a_{22}+b_{11}|}<\frac{h_1(B)}{|b_{11}|},\quad \frac{\tilde{h}_3}{|a_{33}+b_{22}|}<\frac{h_2(B)}{|b_{22}|},\quad \frac{\tilde{h}_4}{|a_{44}+b_{33}|}<\frac{h_3(B)}{|b_{33}|}。$$

于是由定理 2.4 知 $C=A\oplus_3 B$ 是 *Nekrasov* 矩阵。事实上，直接计算得：

$$h_1(C)=1.5,\quad h_2(C)=3.1,\quad h_3(C)=13.0659195,\quad h_4(C)=9.60352991,\quad h_5(C)=5.67038303。$$

显然，当 $i=1,2,3,4,5$。时 $|c_{ii}|>h_i(C)$ 成立，因此 $C=A\oplus_3 B$ 是 *Nekrasov* 矩阵。

在定理 2.4 中，当 k 分别取 1 和 2 时得如下两个推论：

推论 2.5： 设 $A=[a_{ij}]$ 是 n_1 阶严格对角占优矩阵，$B=[b_{ij}]$ 是 n_2 阶的 *Nekrasov* 矩阵，其分块如(1)所示，若 $k=1$，$S_1=\{1,2,\cdots,n_1-1\}$，$S_2=\{n_1\}$，$S_3=\{n_1+1,n_1+2,\cdots,n\}$，其中 $n=n_1+n_2-1$，且 A_{22}，B_{11} 的主对角线元素全正(或全负)，$\dfrac{h_{n_1}(A)+h_1(B)}{|a_{n_1,n_1}+b_{11}|}\le\dfrac{h_1(B)}{|b_{11}|}$，则 $C=A\oplus_1 B$ 是 *Nekrasov* 矩阵。

推论 2.6： 设 $A=[a_{ij}]$ 是 n_1 阶严格对角占优矩阵，$B=[b_{ij}]$ 是 n_2 阶的 *Nekrasov* 矩阵，其分如(1)所示，$S_1=\{1,2,\cdots,n_1-2\}$，$S_2=\{n_1-1,n_1\}$，$S_3=\{n_1+1,\cdots,n\}$，$n=n_1+n_2-2$ 且 A_{22}，B_{11} 的主对角线元素全正(或全负)，

$$\frac{h_{n_1-1}(A)-|a_{n_1-1,n_1}|+h_1(B)-|b_{12}|+|a_{n_1-1,n_1}+b_{12}|}{|a_{n_1-1,n_1-1}+b_{11}|}\le\frac{h_1(B)}{|b_{11}|},$$

$$\frac{h_{n_1}(A)-|a_{n_1,n_1-1}|\dfrac{h_{n_1-1}(A)}{|a_{n_1-1,n_1-1}|}+h_2(B)-|b_{21}|\dfrac{h_1(B)}{|b_{11}|}+|a_{n_1,n_1-1}+b_{21}|\dfrac{h_{n_1-1}(A)-|a_{n_1-1,n_1}|+h_1(B)-|b_{12}|+|a_{n_1-1,n_1}+b_{12}|}{|a_{n_1-1,n_1-1}+b_{11}|}}{|a_{n_1,n_1}+b_{22}|}\le\frac{h_2(B)}{|b_{22}|},$$

则 $C=A\oplus_2 B$ 是 *Nekrasov* 矩阵。

基金项目

本文受国家自然科学基金资助项目(11361074)资助。

参考文献 (References)

[1] Fallat, S.M. and Johnson, C.R. (1999) Sub-Direct Sums and Positivity Classes of Matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **288**, 149-173. http://dx.doi.org/10.1016/S0024-3795(98)10194-5

[2] Bru, R., Pedroche, F. and Szyld, D.B. (2005) Subdirect Sums of Nonsingular M-Matrices and of Their Inverse. *Electronic Journal of Linear Algebra*, **13**, 162-174.

[3] Frommer, A. and Szyld, D.B. (1999) Weighted Max Norms, Splittings, and Overlapping Additive Schwarz Iterations. *Numerische Mathematik*, **83**, 259-278. http://dx.doi.org/10.1007/s002110050449

[4] Bru, R., Pedroche, F. and Szyld, D.B. (2005) Additive Schwarz Iterations for Markov Chains. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **27**, 445-458. http://dx.doi.org/10.1137/040616541

[5] Bru, R., Pedroche, F. and Szyld, D.B. (2006) Subdirect Sums of S-Strictly Diagonally Dominant Matrices. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, **15**, 201-209.

[6] Zhu, Y. and Huang, T.Z. (2007) Subdirect Sum of Doubly Diagonally Dominant Matrices. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, **16**, 171-182.

[7] Bru, R., Cvetkovic, L., Kostic, V. and Pedroche, F. (2010) Sums of Strictly Diagonally Dominant Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, **58**, 75-78. http://dx.doi.org/10.1080/03081080802379725

[8] Li, C.Q., Liu, Q.L., Gao, L. and Li, Y.T. (2016) Subdirect Sums of Nekrasov Matrices. *Linear Multilinear Algebra*, **64**, 208-218. http://dx.doi.org/10.1080/03081087.2015.1032198

[9] Cvetkovic, L. (2006) H-Matrix Theory vs. Eigenvalue Location. *Numerical Algorithms*, **42**, 229-245. http://dx.doi.org/10.1007/s11075-006-9029-3

[10] Horn, R.A. and Johnson, C.R. (1985) Matrix Analysis. Cambridge University Press, Cambridge. http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511810817

[11] Berman, A. and Plemmons, R.J. (1979) Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Academic Press, New York.

[12] Li, W. (1998) On Nekrasov Matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **281**, 87-96. http://dx.doi.org/10.1016/S0024-3795(98)10031-9

[13] Cvetkovic, L., Dai, P.F., Doroslovackic, K. and Li, Y.T. (2013) Infinity Norm Bounds for the Inverse of Nekrasov Matrices. *Applied Mathematics and Computation*, **219**, 5020-5024. http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2012.11.056