Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2016, 5(4), 747-753**
Published Online November 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.54086

Steiner Wiener Index and Graph Parameters

Zhongzhu Liu, Xiaosheng Cheng

College of Mathematics and Data Science, Huizhou University, Huizhou Guangdong
Email: zhongzhuliu@126.com

Received: Nov. 10th, 2016; accepted: Nov. 25th, 2016; published: Nov. 29th, 2016

Abstract

The Steiner distance $d(S)$ of vertex set S is defined as the minimum number of edges of a tree whose vertex set contains vertex set S, and the Steiner k-Wiener index $SW_k(G)$ of G is defined as the sum of $d(S)$ among all possible k-vertex set S of G. In this paper, we give the bounds of $SW_k(G)$ in the classes of graphs with given chromatic number or matching number, and characterize the extremal graphs.

Keywords

Steiner Tree, Steiner Wiener Index, Chromatic Number, Matching Number

Steiner Wiener指数与图的参数

刘中柱，程晓胜

惠州学院数学与大数据学院，广东 惠州
Email: zhongzhuliu@126.com

收稿日期：2016年11月10日；录用日期：2016年11月25日；发布日期：2016年11月29日

摘　要

本文讨论了给定点着色数和匹配数的图类中k-Steiner Wiener指数的下界，并刻画了极图。图G的

文章引用: 刘中柱, 程晓胜. Steiner Wiener 指数与图的参数[J]. 应用数学进展, 2016, 5(4): 747-753.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.54086

k-Steiner Wiener指数定义为图G中任意k-点集S的Steiner距离$d(S)$的和，而点集S的Steiner距离$d(S)$是包含点集S的最小子树的边的数目。

关键词

Steiner树，Steiner Wiener指数，点染色数，匹配数

1. 引言

设$G=(V(G),E(G))$是一个简单图，其中$V(G),E(G)$分别是图G的点集与边集，且$|V(G)|=n>2,|E(G)|>1$。图G中任意两点u,v间的距离$d_G(u,v)$定义为连通u,v的最短路的长度，Wiener指数$W(G)$定义为$W(G)=\sum_{u,v\in V(G)} d_G(u,v)$，Wiener 指数是图的一个拓扑参数，它常用于分析分子的分枝数，同时也用于分析交通网络与社交网络。相关的结果参考文献[1]-[16]。

点集S的 Steiner 距离$d(S)$定义为图G中包含点集S的最小子树的边数，Steiner 距离是经典的组合优化问题，最早可以追溯到 17 世纪初。1634 年，数学家 Fermat 提出这样一个问题：在欧氏平面上有三个点，寻找一个点使得由该点连接三个点的距离之和最小。后经多位数学家扩展补充，最后以瑞士数学家 Steiner 的名字命名为 Steiner 问题。由于 Steiner 距离在现代生产生活中应用十分广泛，因此多年来是研究的热点，本文讨论图的 Steiner 距离问题。

若$G[S]$是连通图，则$d(S)$等于$G[S]$生成树的边数，即$d(S)=|S|-1$。李学良，毛亚平，Gutman 在文献[17]中提出了 k-Steiner Wiener 指数SW_k的概念，其中

$$SW_k(G)=\sum_{S\subset V(G),|S|=k} d(S),$$

且$SW_2(G)=W(G)$。Dankelmann，Oellermann，Swart [18]提出了 k-Steiner 平均距离μ_k的概念，其中

$$\mu_k(G)=\frac{SW_k(G)}{\binom{n}{k}}。$$

Dankelmann，Oellermann，Swart 在文献[19]中得到给定点数的树中μ_k的上下界，李学良等人在文献[19]中给出了树的SW_3指数计算公式，M. Kovse 进一步得到树的SW_k的点和边的表达公式。与 Steiner 距离的拓扑指数相关的结果可参考文献[10] [20]-[26]。由于图G的$SW_k(G)$计算是 NP 完全问题[27]，讨论特殊图类的上下界与极图问题显得十分重要，本文将重点讨论二种图类。

图G的染色数$\chi(G)$是使得G中任何相邻两点均染不同色的最小颜色数，而图G的匹配是边的集合，任意两条边没有公共点。图G的最大匹配是所有匹配中所含匹配边数最多的匹配，图G的匹配数$m(G)$定义为图G中最大匹配所含的边的数目。本文讨论了给定染色数或匹配数的图类中 Steiner Wiener 指数的下界，并刻画了极图。

2. 预备知识

边集$E(V_1,V_2)$定义为图G中点集V_1,V_2间的相连的边的集合，点集M的导出子图$G[M]$定义为以M为点集，两端点均在M中的边的全体为边集的子图。$G_1\cup G_2$定义为图G_1与图G_2的并集，而$G_1\vee G_2$是

对 $G_1\cup G_2$ 中 G_1 的任一点与 G_2 的任一点进行连边得到的图。K_n 为 n 个点的完全图，$K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$ 为 r 多部图，r-图兰图是 r 多部图 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$，且对任意的 $1\le i,j\le r$，有 $\left|n_i-n_j\right|\le 1$。点 r-染色临界图定义为染色数为 r，且任删一点使得染色数 $<r$ 的图。若在图 G 中，任意删掉 $k-1$ 条边得到的子图仍连通，删掉 k 条边不连通的图，称 G 为 k-边连通图。

令 $C(n,r)$ 为所有点数为 n，点染色数为 r 的图的集合，$M(n,m)$ 为所有点数为 n，匹配数为 m 的图的集合。若 x 是实数，定义 $[x]$ 为 x 的整数部分。

若图 G 中的一个连通块的点数为奇(偶)数，则称该连通块为奇(偶)连通块。令 $o(G)$ 为图 G 中奇连通块的个数，则由 Tutte-Berge 公式[13] [28]可知，

$$n-2m(G)=\max\left\{o(G-X)-|X|:X\subset V(G)\right\}。$$

为了进一步讨论 Steiner Wiener 指数，根据 Steiner 距离的定义，得到以下引理：

引理 2.1. 若 $u,v\in V(G)$ 是连通图 G 中的任两点，且 $uv\notin E(G)$，则 $SW_k(G)\ge SW_k(G+uv)$，其中 $G+uv$ 是在 G 中增加边 uv 得到的新图。

引理 2.2. 若 $S\subset V(G)$，$G[S]$ 是连通的，则 $d(S)=|S|-1$。

3. 给定染色数的图类

图的染色数在危险品存储、物流分配等方面有广泛的应用，而 SW_k 在物流运输中的路径设计显得尤为重要，本节讨论给定染色数的图类中 SW_k 的下界与相关的极图。

引理 3.1. [29] 若 G 是 r-点染色临界图，则 G 是 $(r-1)$-边连通图。

定理 3.1. 若 G 是 r-点染色临界图，其中 G 的顶点数是 $n\ge 8$，$2\le r\le \frac{n^2}{8}-1$。若 $k>\frac{n+\sqrt{n^2-8r+8}}{2}$ 或 $1\le k<\frac{n-\sqrt{n^2-8r+8}}{2}$，则有

$$SW_k(G)=(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}。$$

证明： 若 G 是 r-点染色临界图，则由**引理 3.1**，G 的边连通度是 $r-1$。令 $S\subset V(G)$，$|S|=k$，其中 $k\ge\frac{n+\sqrt{n^2-8r+8}}{2}$ 或 $1\le k\le\frac{n-\sqrt{n^2-8r+8}}{2}$，从而 $\left|E(S,V(G)-S)\right|\le k(n-k)$。

若 $G[S]$ 不连通，则 $G[S]$ 存在至少二个连通块，设 G_1 是 $G[S]$ 的一个连通块，从而有图 $G-E(G_1,V(G)-S)$ 是不连通的。令 $G_2=G[S]-G_1$，从而有 $\left|E(G_1,G[V-S])\right|\ge r-1$，$\left|E(G_2,G[V-S])\right|\ge r-1$，综上，

$$2(r-1)\le\left|E(G_1,V(G-S))\right|+\left|E(G_1,V(G-S))\right|\le\left|E(S,V(G-S))\right|\le k(n-k),$$

经计算可得 $\frac{n-\sqrt{n^2-8r+8}}{2}\le k\le\frac{n+\sqrt{n^2-8r+8}}{2}$，与假设矛盾，故 $G[S]$ 连通。

已知 $G[S]$ 连通，由引理 2.2，$d(S)=k-1$，且 $SW_k(G)=(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}$，证毕。

定理 3.2. 若 $G\in C(n,r)$，其中 $n\ge 3,r\ge 4$。

$$SW_k(G)\ge(k-1)\binom{n}{k}+\left(r+\left[\frac{n}{r}\right]-n\right)\binom{\left[\frac{n}{r}\right]}{k}+\left(n-\left[\frac{n}{r}\right]\right)\binom{\left[\frac{n}{r}\right]+1}{k},$$

当 G 是 r-图兰图时，等号成立。

证明： 令 $G_{\min}$ 为 $C(n,m)$ 中 Steiner Wiener 指数值最小的图之一。由染色数的定义可知，$V(G_{\min})$ 可划分成 r 个点独立集 $V_1,V_2,\cdots,V_r$，其中 $n_i=|V_i|>0$ $(i=1,2,\cdots,r)$，$\sum_{i=1}^{r}n_i=n$。由引理 2.1 可知，在 $G_{\min}$ 中，若二个非邻接点在不同点独立集中，则二点间连边不会增加 SW_k 值，从而有 $SW_k(G_{\min})=SW_k\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}\right)$。以下假设 $G_{\min}=K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$。

令 $S\subset V(G_{\min})$，$|S|=k\ge 2$。点集 S 可分成二类：$G_{\min}[S]$ 连通或 $G_{\min}[S]$ 不连通。

(1) 若 $G_{\min}[S]$ 连通，则 $S\not\subset V_i$，即存在 $i,j\in\{1,2,\cdots,r\}$，使得 $S\cap V_i\ne\phi, S\cap V_j\ne\phi$，由引理 2.2，$d(S)=k-1$，且

$$\begin{aligned}\sum_S d(S)&=(k-1)\sum_{\sum a_i=k,k>a_i\ge 0}\binom{n_1}{a_1}\binom{n_2}{a_2}\cdots\binom{n_r}{a_r}\\&=(k-1)\left(\sum_{\sum a_i=k,a_i\ge 0}\binom{n_1}{a_1}\binom{n_2}{a_2}\cdots\binom{n_r}{a_r}-\sum_{i=1,2,\cdots,r}\binom{n_i}{k}\right)。\\&=(k-1)\left(\binom{n}{k}-\sum_{i=1,2,\cdots,r}\binom{n_i}{k}\right)\end{aligned}$$

(2) 若 $G_{\min}[S]$ 不连通，则存在 $i\in\{1,2,\cdots,r\}$，使得 $S\subset V_i$。由 $G_{\min}$ 的结构可知，任选 $u\in V(G_{\min})-S$，有 $G_{\min}[S\cup\{u\}]$ 是连通图，由引理 2.2，$d(S)=k$，且

$$\sum_S d(S)=k\sum_{i=1,2,\cdots,r}\binom{n_i}{k}。$$

综上(1)、(2)可知，

$$SW_k(G_{\min})=(k-1)\left(\binom{n}{k}-\sum_{i=1,2,\cdots,r}\binom{n_i}{k}\right)+k\sum_{i=1,2,\cdots,r}\binom{n_i}{k}=(k-1)\binom{n}{k}+\sum_{i=1,2,\cdots,r}\binom{n_i}{k}。$$

若 $G_{\min}$ 不是图兰图，则存在正整数 $i,j\in\{1,2,\cdots,r\}$，使得 $n_i-1>n_j$。令 $G'=K_{n_1,\cdots,n_i-1,\cdots,n_j+1,\cdots,nr}$，则

$$SW_k(G_{\min})-SW_k(G')=\binom{n_i}{k}+\binom{n_j}{k}-\binom{n_i-1}{k}-\binom{n_j+1}{k}\ge 0,$$

等号成立当且仅当 $k>n_i>1$。故图兰图 G^T 是 $C(n,r)$ 中 Steiner Wiener 指数极小图之一，从而有

$$SW_k(G)\ge SW_k(G^T)=(k-1)\binom{n}{k}+\left(r+\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor-n\right)\binom{\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor}{k}+\left(n-\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor\right)\binom{\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor+1}{k},$$

证毕。

4. 给定匹配数的图类

图的匹配在交通网络、社交网络等方面有广泛的应用，本节讨论给定匹配数的图类中 SW_k 的下界，并刻画了极图。

定理 4.1. 若 $G\in M(n,s)$，其中 $2\le s\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$，$n\ge 4$。则

(1) 若 $s=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$，则 $SW_k(G)\ge (k-1)\binom{n}{k}$，当 $G=K_n$ 时，等号成立；

(2) 若 $2\le m\le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor -1$，则 $SW_k\ge (k-1)\binom{n}{k}+\binom{n-m}{k}$，当 $G=K_s\vee \overline{K_{n-m}}$ 时，等号成立。

证明：令 $G_{\min}$ 为 $M(n,m)$ 中 Steiner Wiener 指数值最小的图之一，则由 Tutte-Berge 公式可知，存在点集 $X_0\subset V(G_{\min})$，使得 $n-2m=\max\{o(G_{\min}-X)-|X|: X\subset V(G_{\min})\}=o(G-X_0)-|X_0|$。

令 $|X_0|=s$，$|o(G_{\min}-X_0)|=r$，则 $n-2m=r-s$。

假设 $s=0$，则 $G_{\min}-X_0=G_{\min}$，$n-2m=r\le 1$。若 $r=0$，则 $2m=n$。若 $r=1$，则 $2m=n-1$。根据引理 2.1，增边不会增加 SW_k 值，从而有 $SW_k(G_{\min})=SW_k(K_n)$。

假设 $s\ge 1$，则有 $r\ge 1$。令 $G_1,G_2,\cdots,G_r$ 为 $G_{\min}-X_0$ 中所有奇连通块。若 $G_{\min}-X_0$ 含有偶连通块，则在偶连通块与某个奇连通块间连边，得到新图 G'，其中 G' 满足性质

$$n-2m(G')\ge o(G'-X_0)=o(G_{\min}-X_0),\quad m(G')=m(G_{\min})。$$

由引理 2.1 可知，$SW_k(G_{\min})\ge SW_k(G')$。从而可知 $G_{\min}-X_0$ 不含偶连通块。同理，由引理 2.1 可知，$G_1,G_2,\cdots,G_r$ 和 X_0 的点导出子图是完全图，且 G_i 中每一顶点与 X_0 中的每一顶点有边相连，因此 $SW_k(G_{\min})=SW_k\left(K_s\vee\left(K_{n_1}\cup\cdots\cup K_{n_r}\right)\right)$。

以下计算 $SW_k\left(K_s\vee\left(K_{n_1}\cup\cdots\cup K_{n_r}\right)\right)$。令 $G^*=K_s\vee\left(K_{n_1}\cup\cdots\cup K_{n_r}\right)$，$V_0=V(K_s)$，$V_1=V(K_{n_1}),\cdots,V_r=V(K_{n_r})$，$n_i=|V_i|$，其中 $i=1,2,\cdots,r$。令 $S\subset V(G^*)$，$|S|=k\ge 2$。易知点集 S 可分成二类：$G^*[S]$ 连通或 $G^*[S]$ 不连通。

(1) 若 $G^*[S]$ 连通，则 $S\subset V_i$ 或 $S\cap V_0\ne\phi$，其中 $i=1,2,\cdots,r$。由引理 2.2 可知，$d(S)=k-1$，从而有

$$\begin{aligned}\sum_S d(S)&=(k-1)\left(\sum_{\sum a_i=k,a_0\ne 0}\binom{n_0}{a_0}\binom{n_1}{a_1}\cdots\binom{n_r}{a_r}+\sum_{i=1,2,\cdots,r}\binom{n_i}{k}\right)\\&=(k-1)\left(\sum_{\sum a_i=k,i=0,1,\cdots,r}\binom{n_0}{a_0}\binom{n_1}{a_1}\cdots\binom{n_r}{a_r}-\sum_{\sum a_i=k,i=1,\cdots,r}\binom{n_1}{a_1}\cdots\binom{n_r}{a_r}+\sum_{i=1,2,\cdots,r}\binom{n_i}{k}\right)\\&=(k-1)\left(\binom{n_0+n_1+\cdots+n_r}{k}-\binom{n_1+\cdots+n_r}{k}+\sum_{i=1,2,\cdots,r}\binom{n_i}{k}\right)\\&=(k-1)\left(\binom{n}{k}-\binom{n-s}{k}+\sum_{i=1,2,\cdots,r}\binom{n_i}{k}\right)\end{aligned}。$$

(2) 若 $G^*[S]$ 不连通，则有 $S\cap V_0=\phi$，$S\not\subset V_i$，其中 $i=1,2,\cdots,r$。任选 $u\in V_0$，有 $G^*[S\cup\{u\}]$ 连通，从而 $d(S)=k$，且

$$\sum_S d(S)=k\binom{n-s}{k}$$

综合(1)、(2)可知，

$$\begin{aligned}SW_k(G^*)&=(k-1)\left(\binom{n}{k}-\binom{n-s}{k}+\sum_{i=1,2,\cdots,r}\binom{n_i}{k}\right)+k\binom{n-s}{k}\\&=(k-1)\left(\binom{n}{k}+\sum_{i=1,2,\cdots,r}\binom{n_i}{k}\right)+\binom{n-s}{k}\end{aligned}。$$

假设 $G_{\min}=K_s\vee\left(K_{n_1}\cup\cdots\cup K_{n_r}\right)$，其中 $n_i>1$，$i\in\{1,2,\cdots,r\}$。不失一般性，假设 $n_1>1$，令 $G'=K_{s+1}\vee\left(K_{n_1-1}\cup K_{n_2}\cup\cdots\cup K_{n_r}\right)$，从而有

$$SW_k\left(G_{\min}\right)-SW_k\left(G'\right)>0$$

这与 $G_{\min}$ 的最小性相矛盾，从而 $G_{\min}=K_{n-r}\vee\overline{K_r}=K_m\vee\overline{K_{n-m}}$，证毕。

基金项目

本文受广东省自然科学基金(No. 2016A030313122, 2015A030310410)、国家社会科学基金(No. 15BTJ024)、惠州市科技创新基金(No. 2014B020004027)和惠州学院优秀青年培育项目(No. 20160224082617206)资助。

参考文献 (References)

[1] Gutman, I. and Zhang, S. (2006) Graph Connectivity and Wiener Index, Bulletin T.CXXXIII de l' Academie serbe des sciences et des arts. *Classe des Sciences math ematiques et naturelles Sciences math ematiques*, **133**, 1-5.

[2] Oellermann, O.R. and Tian, S. (1990) Steiner Centers in Graphs. *Journal of Graph Theory*, **14**, 585-597. https://doi.org/10.1002/jgt.3190140510

[3] Rouvray, D.H. (2002) Harry in the Limelight: The Life and Times of Harry Wiener. In: Rouvray, D.H. and King, R.B., Eds., *Topology in Chemistry—Discrete Mathematics of Molecules*, Horwood, Chichester, 1-15.

[4] Tutte, W.T. (1947) The Factorization of Linear Graphs. *Journal London Mathematical Society*, **22**, 107-111. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-22.2.107

[5] Xu, K., Liu, M., Das, K.C., Gutman, I. and Furtula, B. (2014) A Survey on Graphs Extremal with Respect to Distance-Based Topological Indices. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **71**, 461-508.

[6] Zhou, B. (2005) Modified Wiener Indices of Thorn Trees. *Kragujevac Journal of Mathematics*, **27**, 5-9.

[7] Dankelmann, P., Oellermann, O.R. and Swart, H.C. (1996) The Average Steiner Distance of a Graph. *Journal of Graph Theory*, **22**, 15-22. https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199605)22:1<15::AID-JGT3>3.0.CO;2-O

[8] Berge, C. (1958) Sur le couplage maximum dun graphe. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. Math.*, **247**, 258-259.

[9] Buckley, F. and Harary, F. (1990) Distance in Graphs. Addison-Wesley, Redwood.

[10] Chartrand, G., Oellermann, O.R., Tian, S. and Zou, H.B. (1989) Steiner Distance in Graphs. *Casopis Pest. Mat.*, **114**, 399-410.

[11] Dankelmann, P., Swart, H.C. and Oellermann, O.R. (1997) On the Average Steiner Distance of Graphs with Prescribed Properties. *Discrete Applied Mathematics*, **79**, 91-103. https://doi.org/10.1016/S0166-218X(97)00035-8

[12] Entringer, R.C., Jackson, D.E. and Snyder, D.A. (1976) Distance in Graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **26**, 283-296.

[13] Garey, M.R. and Johnson, D.S. (1979) Computers and Intractability—A Guide to the Theory of NP-Completeness. Freeman, San Francisco, 208-209.

[14] Gutman, I. and Polansky, O.E. (1986) Mathematical Concepts in Organic Chemistry. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-70982-1

[15] Knor, M. and Skrekovski, R. (2014) Wiener Index of Generalized 4-Stars and of Their Quadratic Line Graphs. *The Australasian Journal of Combinatorics*, **58**, 119-126.

[16] Kovse, M. (2016) Vertex Decomposition of Steiner Wiener Index and Steiner Betweenness Centrality. arxiv: 1605.00260.

[17] Chartrand, G. and Zhang, P. (2008) Chromatic Graph Theory. CRC Press, Boca Raton. https://doi.org/10.1201/9781584888017

[18] Hong-Gwa, Y. and Chang, G. (1998) Weighted Connected Domination and Steiner Trees in Distance-Hereditary Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **87**, 245-253. https://doi.org/10.1016/S0166-218X(98)00060-2

[19] Ali, P., Dankelmann, P. and Mukwembi, S. (2012) Upper Bounds on the Steiner Diameter of a Graph. *Discrete Applied Mathematics*, **160**, 1845-1850. https://doi.org/10.1016/j.dam.2012.03.031

[20] Da Fonseca, C.M., Ghebleh, M., Kanso, A. and Stevanovic, D. (2014) Counterexamples to a Conjecture on Wiener

Index of Common Neighborhood Graphs. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **72**, 333-338.

[21] Gutman, I., Furtula, B. and Li, X. (2015) Multicenter Wiener Indices and Their Applications. *Journal of the Serbian Chemical Society*, **80**, 1009-1017. https://doi.org/10.2298/JSC150126015G

[22] Gutman, I., Klavzar, S. and Mohar, B. (1997) Fifty Years of the Wiener Index. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **35**, 1-259.

[23] Jin, Y.L. and Zhang, X.D. (2013) On Two Conjectures of the Wiener Index. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **70**, 583-589.

[24] Caceresa, J., Marquezb, A. and Puertasa, M.L. (2008) Steiner Distance and Convexity in Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **29**, 726-736. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2007.03.007

[25] Wiener, H. (1947) Structural Determination of Paraffin Boiling Points. *Journal of the American Chemical Society*, **69**, 17-20. https://doi.org/10.1021/ja01193a005

[26] Li, X., Mao, Y. and Gutman, I. (2016) The Steiner Wiener Index of a Graph. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **36**, 455-465. https://doi.org/10.7151/dmgt.1868

[27] Rouvray, D.H. (2002) The Rich Legacy of Half Century of the Wiener Index. In: Rouvray, D.H. and King, R.B., Eds., *Topology in Chemistry—Discrete Mathematics of Molecules*, Horwood, Chichester, 16-37.

[28] Dobrynin, A., Entringer, R. and Gutman, I. (2001) Wiener Index of Trees: Theory and Application. *Acta Applicandae Mathematicae*, **66**, 211-249. https://doi.org/10.1023/A:1010767517079

[29] Goddard, W. and Oellermann, O.R. (2011) Distance in Graphs. In: Dehmer, M., Ed., *Structural Analysis of Complex Networks*, Birkhauser, Dordrecht, 49-72. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4789-6_3