Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2016, 5(4), 762-772
Published Online November 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.54088

The 1-Good-Neighbor Diagnosability of Augmented *k*-Ary *n*-Cubes

Yanli Hao[1], Shiying Wang[1,2*]

[1]School of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang Henan
[2]Henan Engineering Laboratory for Big Data Statistical Analysis and Optimal Control, Henan Normal University, Xinxiang Henan
Email: *wangshiying@htu.edu.cn

Received: Nov. 9h, 2016; accepted: Nov. 25th, 2016; published: Nov. 30th, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

Abstract

Nowadays, diagnosability is an important research topic and parameter in measuring the fault diagnosis of multiprocessor systems. In 2012, Peng *et al*. proposed a new measure for fault diagnosis of the system, which was called *g*-good-neighbor diagnosability that restrained every fault-free node containing at least *g* fault-free neighbors. The *n*-dimensional augmented *k*-ary *n*-cube is an important variant of the hypercube. In this paper, we prove that the 1-good-neighbor diagnosability of augmented *k*-ary *n*-cubes under the PMC model and the MM* model is $8n-9$ for $n \geq 4$, $k \geq 4$.

Keywords

Interconnection Network, Graph, Diagnosability, PMC Model, MM* Model, Augmented k-Ary n-Cubes

扩展*k*元*n*立方体的1-好邻诊断度

郝燕丽[1]，王世英[1,2*]

[1]河南师范大学数学与信息科学学院，河南 新乡
[2]河南师范大学，河南省大数据统计分析与优化控制工程实验室，河南 新乡
Email: *wangshiying@htu.edu.cn

*通讯作者。

文章引用: 郝燕丽, 王世英. 扩展 *k* 元 *n* 立方体的 1-好邻诊断度[J]. 应用数学进展, 2016, 5(4): 762-772.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.54088

收稿日期：2016年11月9日；录用日期：2016年11月25日；发布日期：2016年11月30日

摘 要

现如今，一个多重处理器系统的诊断度是一个非常重要的研究课题，它是度量多重处理器系统故障诊断能力的重要参数。2012年，Peng等人提出了一个新的系统故障诊断方法，称为g好邻诊断度，它限制每个非故障顶点至少有g个非故障邻点。n维扩展k元n立方体是超立方体的一个重要变形。在本文中，我们证明了扩展k元n立方体在PMC模型下和MM*模型下的1-好邻诊断度是$8n-9(n\geq 4,k\geq 4)$。

关键词

互连网络，图，诊断度，PMC模型，MM*模型，扩展k元n立方体

1. 引言

大部分的多重处理器系统都以互联网络作为基本的拓扑结构并且通常用图来表示一个互联网络，其中的顶点代表处理器，边代表处理器之间的通信线路。我们用图和网络互换。对于多重处理系统来说，其网络拓扑性质的研究是非常重要的。诊断度是度量多处理器系统故障诊断能力的重要参数，它们是互联网络中热门的研究课题之一。此外，在系统中，一些处理器可能是故障的。所以，为了保证计算机系统的可靠性，系统中的故障处理器应该被诊断出来。处理故障系统的第一步是从非故障处理器识别故障处理器。识别过程被称为系统诊断。在没有更换的前提下，如果所有故障处理器都可以被识别，并且被诊断出的故障处理器个数不超t，那么这个系统称为t-可诊断。系统G的诊断度是所有t-可诊断中t的最大值[1] [2]。为了测量多重处理系统的诊断度，很多诊断模型已经被提出。尤其是PMC模型[3]和MM*模型[4]，这两个模型被广泛使用。PMC模型是通过两个相邻的处理器之间相互测试来完成系统的诊断。MM*模型下，一个顶点分别给它相邻的两个顶点发出相同的任务，然后比较它们反馈的结果。在PMC模型和MM*模型下已经有无数的研究[5] [6]。

传统的诊断度允许点的邻点全为故障点，但是在大型多处理器系统中这种故障出现的概率极小。因此Lai [2]等提出了系统的条件诊断度，它限制系统中任意一个处理器至少与一个非故障处理器相邻。近些年，Peng [7]等提出了系统的g-好邻诊断度，它限制每个非故障顶点都至少有g个非故障邻点与之相邻，并且研究了超立方体在PMC模型下的g好邻诊断度。随后，很多学者在PMC模型和MM*模型下研究了更多网络的g-好邻诊断度[6] [8] [9]。作为一个良好的互连网络拓扑结构，扩展k元n立方体有许多好的性质。在文献[10]中，王牟江山等证明了网络的1-好邻诊断不超过条件诊断度。因此，研究网络的1-好邻诊断度也是很有意义的。近些年来，扩展k元n立方体[11]被Xiang和Stewart提出应用与并行运算。在本文中，我们采用PMC模型和MM*模型作为故障诊断模型，来研究扩展k元n立方体在PMC模型和MM*模型下的1-好邻诊断度，最后得出扩展k元n立方体在PMC模型和MM*模型下的1-好邻诊断度$8n-9(n\geq 4,k\geq 4)$。

2. 预备知识

在这一节，我们将介绍一些基本概念、符号、PMC模型、MM*模型及扩展k元n立方体。

2.1. 基本概念及符号说明

我们用一个无向简单图 $G=(V,E)$ 是来表示一个多重处理系统，其中 $V=V(G)$，$E=E(G)$ 分别表示网络中的处理器和处理器之间的连接。对于任意的非空顶点子集 $V'\subset V$，则以两端点均在 V' 中的边的全体为边集所组成的子图，称为 V' 在 G 中的导出子图，记作 $G[V']$。$d_G(v)$ 是指 G 中与 v 关联边的数目，$\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示 G 中顶点的最小度和最大度。对于 G 中任意一个顶点 v，都有 $d_G(v)=k$，则称图 G 是 k 正则的。对于任意 $v\in V$，$N_G(v)$ 表示 G 中与 v 相邻的所有顶点组成的集合。若 $S\subseteq G$，则 $N_G(S)=\bigcup_{v\in S}N_G(v)\setminus S$。定义 $C_G(S)=N_G(v)\cup V(S)$。对于任意两点 $u,v\in V$，$cn(G:u,v)$ 表示 G 中与 u,v 均相邻的点的个数，也即为 $cn(G:u,v)=|N_G(u)\cap N_G(v)|$。

对于任意的一个故障集 $F\subset V$，若对于每一个非故障点 v 均有 $|N(v)\cap(V\setminus F)|\ge g$，则称 F 为 G 的 g-好邻故障集。如果 $G-F$ 不连通且 F 为 G 的 g-好邻故障集，则称 F 是一个 g-好邻割。G 的 g-好邻连通度等于 G 中最小 g-好邻割所含的顶点数，记作 $\kappa^{(g)}(G)$。文中其它未定义而直接使用的符号和术语参见文献[12]。

2.2. PMC 模型和 MM*模型

在 PMC 模型[3]中，相邻两点之间可以相互测试。图 G 中，对于任意的 $(u,v)\in E(G)$ 表示从 u 到 v 的测试，其中 u 是测试者而 v 是被测试者。若 u 是非故障点而 v 是故障点(或非故障点)，则测试结果是 1 (或 0)。在 PMC 模型中，我们假定，若测试点 u 是非故障点，则测试结果可靠。否则，测试结果不可靠。它可以用一个有向图 $T=(V,L)$ 表示,其中 $(u,v)\in L$ 表示 $uv\in E(G)$。所有测试结果的集合称为系统 G 的症候，记作 σ。一个症候是一个函数 $\sigma:L\mapsto\{0,1\}$。

1) 若 $u\in V(G)-F$，$v\in F$，$\sigma^*(u_v)=1$；

2) 若 $u,v\in V(G)-F$，$\sigma^*(u_v)=0$。

对两不同的顶点子集 $F_1,F_2\subseteq V(G)$，若 $\sigma(F_1)\cap\sigma(F_2)=\varnothing$，则称 F_1 和 F_2 是可区分的，记 (F_1,F_2) 为可区分的点对;否则，称 F_1 和 F_2 是不可区分的，记 (F_1,F_2) 为不可区分的点对。

在 MM*模型下，与一个结点 w 相邻的两个结点 u，v 被分配一个相同的任务，再把测试结果返回给结点 w，w 再对这两个结点返回的结果进行比较。用 $(u,v)_w$ 来表示 w 比较 u,v 输出的比较结果，如果这两个结果是相同的，则 $(u,v)_w=0$；否则，$(u,v)_w=1$。全部的测试结果叫做这个系统的比较症候，记作 σ^*。

1) 若 $u,v\in F$，$w\in V(G)-F$，$\sigma^*((u,v)_w)=1$；

2) 若 $u\in F$，$v,w\in V(G)-F$，$\sigma^*((u,v)_w)=1$；

3) 若 $u,v,w\in V(G)-F$，$\sigma^*((u,v)_w)=0$。

在一个系统 $G=(V,E)$ 中，对于任意两个不同的 g 好邻故障集 F_1，F_2，其中 $|F_1|\le t$ 和 $|F_2|\le t$，若 F_1，F_2 是可区分的，则 G 是 g-好邻条件 t-可诊断的。G 的 g 好邻诊断度 $t_g(G)$ 是使得 G 是 g-好邻条件 t-可诊断的最大值 t。

2.3. 扩展 k 元 n 立方体

扩展 k 元 n 立方体一直被称为著名的拓扑结构。在文献[11]中，作者介绍了如下的定义和一些有用的性质。

定义 1 扩展 k 元 n 立方体 $AQ_{n,k}$ 的顶点集为 $\{v_nv_{n-1}\cdots v_1 | v_i\in\{0,1,\cdots,k-1\},1\le i\le n\}$，两个顶点 $u=u_nu_{n-1}\cdots u_1$，$v=v_nv_{n-1}\cdots v_1$ 相邻当且仅当满足以下条件之一。

1) $v_i=u_i-1$ (或者 $v_i=u_i+1$) $(i\in\{1,2,\cdots,n\})$，且 $v_j=u_j$ $(j\in\{1,2,\cdots,n\}\setminus\{i\})$；则 (u,v) 称为 $(i,-1)$ -边

(或者 $(i,+1)$ -边)。

2) $v_i=u_i-1,v_{i-1}=u_{i-1}-1,\cdots,v_1=u_1-1$（或者 $v_i=u_i+1,v_{i-1}=u_{i-1}+1,\cdots,v_i=u_i+1$）$\left(i\in\{2,3,\cdots,n\}\right)$，且 $v_j=u_j$ $\left(j\in\{i+1,i+2,\cdots,n\}\right)$；则 (u,v) 称为 $(\le i,-1)$-边(或者 $(\le i,+1)$-边)。

性质 1 当 $n\ge 4,k\ge 4$ 时，$AQ_{n,k}$ 是点传递的，且 $\kappa\left(AQ_{n,k}\right)=4n-2$。

性质 2 $AQ_{n,k}^i$ 表示由 $AQ_{n,k}$ 中顶点的第 n 位都是 i 的顶点生成的子图 $\left(i\in\{0,1,\cdots,k-1\}\right)$，且 $AQ_{n,k}^i\cong AQ_{n-1,k}$。

性质 3 如果 $\left(u,u_{(i,-1)}\right)$，$\left(u,u_{(\le i,-1)}\right)$ 分别是 $AQ_{n,k}$ 的一条 $(i,-1)$ -边和 $(\le i,-1)$-边，则：

1) 当 $n=2$ 且 $k=3$ 时

$$N_{AQ_{2,3}}(u)\cap N_{AQ_{2,3}}\left(u_{(i,-1)}\right)=\left\{u_{(1,+1)},u_{(\le 2,-1)},u_{(2,+1)}\right\};$$

$$N_{AQ_{2,3}}(u)\cap N_{AQ_{2,3}}\left(u_{(\le 2,-1)}\right)=\left\{u_{(1,-1)},u_{(\le 2,+1)},u_{(2,-1)}\right\}.$$

2) 当 $n=2$ 且 $k\ge 4$ 时

$$N_{AQ_{2,k}}(u)\cap N_{AQ_{2,k}}\left(u_{(i,-1)}\right)=\left\{u_{(\le 2,-1)},u_{(2,+1)}\right\}(i=1);$$

$$N_{AQ_{2,k}}(u)\cap N_{AQ_{2,k}}\left(u_{(i,-1)}\right)=\left\{u_{(\le 2,-1)},u_{(1,+1)}\right\}(i=2);$$

$$N_{AQ_{2,k}}(u)\cap N_{AQ_{2,k}}\left(u_{(\le 2,-1)}\right)=\left\{u_{(1,-1)},u_{(2,-1)}\right\}。$$

3) 当 $n\ge 3$ 且 $k=3$ 时

$$N_{AQ_{n,3}}(u)\cap N_{AQ_{n,3}}\left(u_{(i,-1)}\right)=\left\{u_{(\le 2,-1)},u_{(2,+1)},u_{(i,+1)}\right\}(i=1);$$

$$N_{AQ_{n,3}}(u)\cap N_{AQ_{n,3}}\left(u_{(i,-1)}\right)=\left\{u_{(i,+1)},u_{(\le i,-1)},u_{(i-1,+1)}\right\}(2\le i\le n);$$

$$N_{AQ_{n,3}}(u)\cap N_{AQ_{n,3}}\left(u_{(\le i,-1)}\right)=\left\{u_{(\le i,+1)},u_{(i,-1)},u_{(\le i+1,-1)},u_{(i+1,+1)},u_{(\le i-1,-1)}\right\}(2\le i\le n-1);$$

$$N_{AQ_{n,3}}(u)\cap N_{AQ_{n,3}}\left(u_{(\le i,-1)}\right)=\left\{u_{(\le i,+1)},u_{(i,-1)},u_{(\le i-1,-1)}\right\}(i=n)。$$

4) 当 $n\ge 3$ 且 $k\ge 4$ 时

$$N_{AQ_{n,k}}(u)\cap N_{AQ_{n,k}}\left(u_{(i,-1)}\right)=\left\{u_{(\le 2,-1)},u_{(2,+1)}\right\}(i=1);$$

$$N_{AQ_{n,k}}(u)\cap N_{AQ_{n,k}}\left(u_{(i,-1)}\right)=\left\{u_{(\le i,-1)},u_{(\le i-1,+1)}\right\}(2\le i\le n);$$

$$N_{AQ_{n,k}}(u)\cap N_{AQ_{n,k}}\left(u_{(\le i,-1)}\right)=\left\{u_{(\le i+1,-1)},u_{(\le i-1,-1)},u_{(i+1,+1)},u_{(i,-1)}\right\}(2\le i\le n-1);$$

$$N_{AQ_{n,k}}(u)\cap N_{AQ_{n,k}}\left(u_{(\le i,-1)}\right)=\left\{u_{(\le i-1,-1)},u_{(i,-1)}\right\}(i=n)。$$

对于 $(i,+1)$ -边和 $(\le i,+1)$-边，这个结果也是类似的。

性质 4 当 $n\ge 2,k\ge 3$ 时，且 n,k 均为整数，设 u,v 是 $AQ_{n,k}$ 中任意两个不同的点，则有：

1) 当 $n\ge 2,k$=3 时，$cn\left(AQ_{n,3}:u,v\right)\le 6$；

2) 当 $n=2,k\ge 4$ 时，$cn\left(AQ_{2,k}:u,v\right)\le 2$；

3) 当 $n\ge 3,k\ge 4$ 时，$cn\left(AQ_{n,k}:u,v\right)\le 4$。

3. 扩展 k 元 n 立方体 $AQ_{n,k}$ 在 PMC 模型下的 1-好邻诊断度

在这一节，我们将证明扩展 k 元 n 立方体 $AQ_{n,k}$ 在 PMC 模型下的 1-好邻诊断度。

在一个系统 $G=(V,E)$ 中，对于 V 中任意两个不同的子集 F_1，F_2，我们定义对称差 $F_1\Delta F_2=(F_1\setminus F_2)\cup(F_2\setminus F_1)$。Yuan [6]提出了一个系统在 PMC 模型下是 g-好邻 t-可诊断的充分必要条件。

定理 3.1 一个系统 $G=(V,E)$ 在 PMC 模型下是 g-好邻 t-可诊断的当且仅当对于 V 中任意两个不同的 g-好邻故障集 F_1，F_2 及其 $|F_1|\le t$ 和 $|F_2|\le t$，存在 $u\in V\setminus(F_1\cup F_2)$ 和 $v\in F_1\Delta F_2$，使得 $uv\in E$ (如图 1)。

引理 3.2 最小度为 1 的图至少有两个顶点。

引理 3.3 [13] 当 $n\ge 4,k\ge 4$ 时，扩展 k 元 n 立方体 $AQ_{n,k}$ 的 1-好邻连通度 $\kappa^{(1)}(AQ_{n,k})=8n-10$。

引理 3.4 当 $n\ge 4,k\ge 4$ 时，设 $u=22\cdots222$，$v=22\cdots211$，$A=\{u,v\}$，$F_1=N_{AQ_{n,k}}(A)$，$F_1=A\cup N_{AQ_{n,k}}(A)$，则 $|F_1|=8n-10$，$|F_2|=8n-8$，$\delta(AQ_{n,k}-F_1)\ge 1$，$\delta(AQ_{n,k}-F_2)>1$。

证明：由性质 4(3)，当 $n\ge 4,k\ge 4$ 时，$cn(AQ_{n,k}:x,y)\le 4$，其中 x，y 是 $AQ_{n,k}$ 中任意两个不同的点。设 $A=\{u,v\}$，显然 u，v 相邻，所以 $|N_{AQ_{n,k}}(u)\setminus A|=(4n-2)-1=4n-3$，$|N_{AQ_{n,k}}(v)\setminus A|=(4n-2)-1=4n-3$，同时由图 2 可知：

$N_{AQ_{n,k}}(u)\cap N_{AQ_{n,k}}(v)=\{22\cdots111,22\cdots221,22\cdots322,22\cdots212\}$，因此 $|N_{AQn,k}(u)\cap N_{AQ_{n,k}}(v)|=4$ 达到了最大。

则 $|F_1|=|N_{AQ_{n,k}}(u)\setminus A|+|N_{AQ_{n,k}}(v)\setminus A|-|N_{AQ_{n,k}}(u)\cap N_{AQ_{n,k}}(v)|=2\times(4n-3)-4=8n-10$，$|F_2|=|A|+|F_1|=2+8n-10=8n-8$。

首先，我们先证明 $\delta(AQ_{n,k}-F_2)>1$。

对任意的 $x\in AQ_{n,k}-F_2$，由性质 4 可知：当 $n\ge 4,k\ge 4$ 时，$cn(AQ_{n,k}:u,x)\le 4$，$cn(AQ_{n,k}:v,x)\le 4$。因此 $|(N_{AQ_{n,k}}(x))\cap F_1|\le 4\times 2=8$，$|N_{AQ_{n,k}}(x)|=4n-2$。于是，当 $n\ge 4,k\ge 4$，$|N_{AQ_{n,k}-F_2}(x)|\ge 4n-2-8=4n-10\ge 6$。所以，当 $n\ge 4,k\ge 4$ 时，$\delta(AQ_{n,k}-F_2)\ge 6>1$。由于 $AQ_{n,k}-F_1$ 有 2 部分：$AQ_{n,k}[A]$，$AQ_{n,k}-F_2$。注意到 $\delta(AQ_{n,k}[A])=1$，又因为 $\delta(AQ_{n,k}-F_2)>1$。所以，$\delta(AQ_{n,k}-F_1)\ge 1$。

引理 3.5 当 $n\ge 4,k\ge 4$ 时，扩展 k 元 n 立方体 $AQ_{n,k}$ 的在 PMC 模型下的 1 好邻诊断度 $t_1(AQ_{n,k})\le 8n-9$。

证明 令 A，F_1，F_2 由引理 3.4 定义(如图 3)。由引理 3.4 可知：$|F_1|=8n-10$，$|F_2|=8n-8$，$\delta(AQ_{n,k}-F_1)\ge 1$，$\delta(AQ_{n,k}-F_2)>1$。因此，$F_1$ 和 F_2 都是 $AQ_{n,k}$ 的 1-好邻故障集。因为 $A=F_1\Delta F_2$，$N_{AQ_{n,k}}(A)=F_1\subset F_2$，且 $V(AQ_{n,k})\setminus(F_1\cup F_2)$ 和 $F_1\Delta F_2$ 之间没有边。由定理 3.1，我们可知在 PMC 模型下

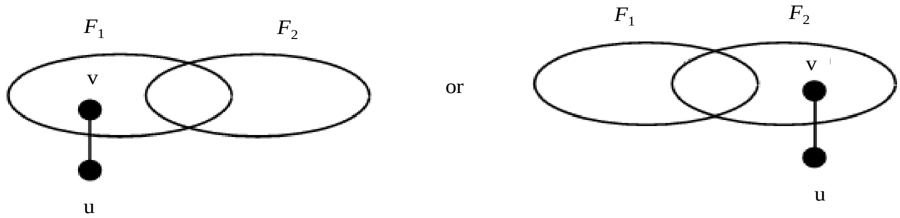

Figure 1. A distinguishable pair (F_1,F_2) under the PMC model

图 1. 在 PMC 模型下 (F_1,F_2) 可区分

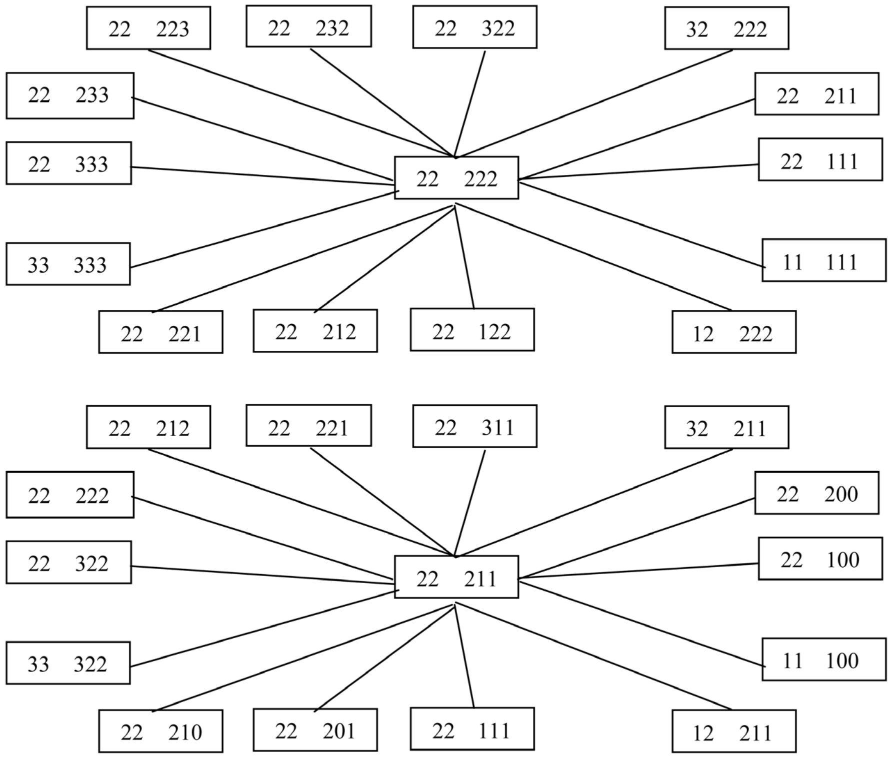

Figure 2. All the neighboring vertices of *u* and *v* respectively

图 2. *u* 和 *v* 的全部邻点

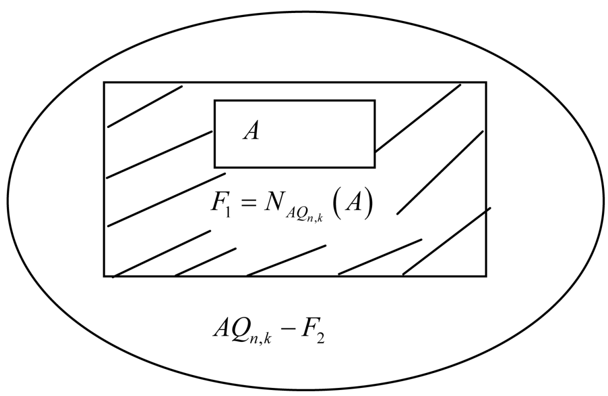

Figure 3. An illustration about the proofs of the Lemma 3.5 and 4.2

图 3. 关于引理 3.5 和 4.2 的证明

$AQ_{n,k}$ 不是 1-好邻 $(8n-8)$-可诊断的。所以，根据 1-好邻诊断度的定义，我们可知 $AQ_{n,k}$ 在 PMC 模型下的 1 好邻诊断度小于 $8n-8$，也即为 $t_1(AQ_{n,k}) \le 8n-9$。

引理 3.6 当 $n \ge 4, k \ge 4$ 时，扩展 k 元 n 立方体 $AQ_{n,k}$ 在 PMC 模型下的 1 好邻诊断度 $t_1(AQ_{n,k}) \ge 8n-9$。

证明 根据 1 好邻诊断度的定义，需要证明 $AQ_{n,k}$ 是 1-好邻 $(8n-9)$-可诊断的。根据定理 3.1，等价于证明任意两个不同的 1-好邻故障集 F_1，F_2，其中 $|F_1| \le 8n-9$ 和 $|F_2| \le 8n-9$，存在 $u \in V(AQ_{n,k}) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 和 $v \in F_1 \Delta F_2$，使得 $uv \in E(AQ_{n,k})$。

反证法。假设存在两个不同的 1-好邻故障集 F_1， F_2，其中$|F_1| \le 8n-9$和$|F_2| \le 8n-9$，对任意的$u \in V(AQ_{n,k}) \setminus (F_1 \cup F_2)$和$v \in F_1 \Delta F_2$，使得$uv \notin E(AQ_{n,k})$。不失一般性，假设$F_2 \setminus F_1 \ne \varnothing$。分以下两种情况进行讨论：

情形 1 $V(AQ_{n,k}) = F_1 \cup F_2$。

$k^n = |V(AQ_{n,k})| = |F_1| + |F_2| - |F_1 \cap F_2| \le |F_1| + |F_2| \le 8n-9+8n-9 = 16n-18$。当$n \ge 4, k \ge 4$时，上述不等式矛盾。

情形 2 $V(AQ_{n,k}) \ne F_1 \cup F_2$。

根据假设$V(AQ_{n,k}) \setminus (F_1 \cup F_2)$与$F_1 \Delta F_2$之间没有边和$F_1$是 1-好邻条件故障集，由于由于$AQ_{n,k} - F_1$有 2 部分：$AQ_{n,k} - F_1 - F_2$，$AQ_{n,k}[F_2 \setminus F_1]$。因此可得$\delta(AQ_{n,k} - F_1 - F_2) \ge 1$和$\delta(AQ_{n,k}[F_2 \setminus F_1]) \ge 1$。同理，当$F_1 \setminus F_2 \ne \varnothing$，$\delta(AQ_{n,k}[F_1 \setminus F_2]) \ge 1$。所以，$F_1 \cap F_2$也是 1-好邻条件故障集。又因为$V(AQ_{n,k} - F_1 - F_2)$与$F_1 \Delta F_2$之间没有边，所以$F_1 \cap F_2$是$AQ_{n,k}$的 1-好邻割。根据引理 3.3，可得$|F_1 \cap F_2| \ge 8n-10$。根据引理 3.2，可得$|F_2 \setminus F_1| \ge 2$。因此，$|F_2| = |F_2 \setminus F_1| + |F_1 \cap F_2| \ge 2 + 8n - 10 = 8n-8$。这与$|F_2| \le 8n-9$相矛盾。

由于以上两种情况都产生矛盾，故$AQ_{n,k}$是 1-好邻$(8n-9)$-可诊断的。于是，$t_1(AQ_{n,k}) \ge 8n-9$。

结合引理 3.5 和引理 3.6，可得以下定理：

定理 3.7 当$n \ge 4, k \ge 4$时，扩展 k 元 n 立方体$AQ_{n,k}$在 PMC 模型下的 1-好邻诊断度$t_1(AQ_{n,k}) = 8n-9$。

4. 扩展 *k* 元 *n* 立方体 $AQ_{n,k}$ 在 MM*模型下的 1-好邻诊断度

定理 4.1 [7]一个系统$G = (V, E)$在 MM*模型下是 g 好邻 t-可诊断的当且仅当对于V中任意两个不同的 g-好邻故障集F_1，F_2及其$|F_1| \le t$和$|F_2| \le t$，满足以下其中一个条件(如图 4)：

1) 存在$u, w \in V \setminus (F_1 \cup F_2)$和$v \in F_1 \Delta F_2$满足$uw, vw \in E$。

2) 存在$u, v \in F_1 \setminus F_2$和$w \in V \setminus (F_1 \cup F_2)$满足$uw, vw \in E$。

3) 存在$u, v \in F_2 \setminus F_1$和$w \in V \setminus (F_1 \cup F_2)$满足$uw, vw \in E$。

引理 4.2 当$n \ge 4, k \ge 4$时，扩展 k 元 n 立方体$AQ_{n,k}$在 MM*模型下的 1-好邻诊断度$t_1(AQ_{n,k}) \le 8n-9$。

证明 令A，F_1，F_2由引理 3.4 定义(如图 3)。由引理 3.4 可知：$|F_1| = 8n-10$，$|F_2| = 8n-8$，$\delta(AQ_{n,k} - F_1) \ge 1$，$\delta(AQ_{n,k} - F_2) > 1$。因此，$F_1$和$F_2$都是$AQ_{n,k}$的 1-好邻故障集。由$F_1$和$F_2$的定义可知：$F_1 \Delta F_2 = A$，由于$F_1 \setminus F_2 = \varnothing$，$F_1 \setminus F_2 = A$和$(V(AQ_{n,k}) \setminus (F_1 \cup F_2)) \cap A = \varnothing$，因此$F_1, F_2$不满足定理 4.1 中的(1)~(3)。所以，$AQ_{n,k}$不是 1-好邻条件$8n-8$可诊断的。故$t_1(AQ_{n,k}) \le 8n-9$。

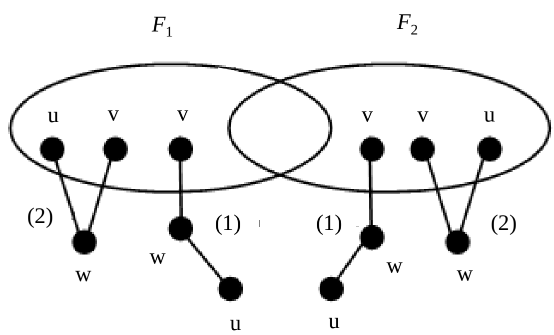

Figure 4. A distinguishable pair (F_1, F_2) under the MM* model

图 4. 在 MM*模型下(F_1, F_2)可区分

引理 4.3 当$n\ge 4,k\ge 4$时，扩展k元n立方体$AQ_{n,k}$在MM*模型下的1-好邻诊断度$t_1\left(AQ_{n,k}\right)\ge 8n-9$。

证明 根据1-好邻诊断度的定义，只需要证明是$AQ_{n,k}$是1-好邻条件$8n-9$可诊断的。用反证法证明。根据定理4.1，假设$V\left(AQ_{n,k}\right)$中存在两个不同的g-好邻故障集F_1，F_2及其$|F_1|\le 8n-9$和$|F_2|\le 8n-9$，但不满足定理4.1中的(1)~(3)。不失一般性，假设$F_2\setminus F_1\ne\varnothing$。类似于在引理3.6对$V\left(AQ_{n,k}\right)=F_1\cup F_2$讨论可知：$V\left(AQ_{n,k}\right)\ne F_1\cup F_2$

断言 1 $AQ_{n,k}-F_1-F_2$没有孤立点。

反证法。假设$AQ_{n,k}-F_1-F_2$至少有一个孤立点w。因为F_1是一个1-好邻故障集，所以至少存在一点$u\in F_2\setminus F_1$使得$uw\in E\left(AQ_{n,k}\right)$。因为$F_1,F_2$不满足定理4.1中的(1)~(3)，所以至多存在一点$u\in F_2\setminus F_1$使得$uw\in E\left(AQ_{n,k}\right)$。因此仅有一点$u\in F_2\setminus F_1$使得$uw\in E\left(AQ_{n,k}\right)$。同理，如果$F_1\setminus F_2=\varnothing$，那么$F_1\subseteq F_2$。因为$F_2$是一个1-好邻故障集，所以有$\delta\left(AQ_{n,k}-F_2\right)=\delta\left(AQ_{n,k}-F_1-F_2\right)\ge 1$，这与$w$是一个孤立点矛盾。因此，我们可以得到点$F_1\setminus F_2\ne\varnothing$。同理可知，仅有一点$v\in F_1\setminus F_2$使得$vw\in E\left(AQ_{n,k}\right)$。设$W$是$AQ_{n,k}\left[V\left(AQ_{n,k}\right)\setminus\left(F_1\cup F_2\right)\right]$中的孤立点集，$H=AQ_{n,k}\left[V\left(AQ_{n,k}\right)-F_1-F_2-W\right]$。因此，对任意的$w\in W$，存在$(4n-4)$个邻点在$F_1\cap F_2$中。由于$|F_2|\le 8n-9$，故

$$\sum_{w\in W}\left|N_{AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup W\right]}(w)\right|\le|W|(4n-4)\le\sum_{v\in F_1\cap F_2}d_{AQ_{n,k}}(v)\le|F_1\cap F_2|(4n-2)$$

。因为$n\ge 4$，所以$|W|<8n-7$。

$\le(8n-10)(4n-2)=32n^2-56n+20$

假设$v(H)=0$，由于

$|F_1\cup F_2|=|F_1|+|F_2|-|F_1\cap F_2|\le 2(8n-9)-(4n-4)=12n-14$因此，

$k^n=\left|V\left(AQ_{n,k}\right)\right|=|F_1\cup F_2|+|W|\le 12n-14+8n-7=20n-21$。显然，当$n\ge 4,k\ge 4$时，这是矛盾的。因此$v(H)\ne 0$。因为顶点对$(F_1,F_2)$不满足定理4.1中的(1)~(3)且$H$中任意一点都不是孤立点，所以我们可以得到$V(H)$与$F_1\Delta F_2$之间没有边。因此，$F_1\cap F_2$是$AQ_{n,k}$的点割。由于$F_1$和$F_2$是$AQ_{n,k}$的1-好邻故障集，因此$\delta\left(AQ_{n,k}-(F_1\cap F_2)\right)\ge 1$，和$F_1\cap F_2$是$AQ_{n,k}$的一个1-好邻割。根据引理3.4，$|F_1\cap F_2|\ge 8n-10$。因为$|F_1|\le 8n-9$和$|F_2|\le 8n-9$，且$F_1\setminus F_2\ne\varnothing$和$F_2\setminus F_1\ne\varnothing$，所以$|F_1\setminus F_2|=|F_2\setminus F_1|=1$。于是，不妨设$F_1\setminus F_2=\{v_1\}$和$F_2\setminus F_1=\{v_2\}$。故对于任意的$w\in W$满足$wv_1,wv_2\in E\left(AQ_{n,k}\right)$。根据性质4，当$n\ge 4,k\ge 4$时，$AQ_{n,k}$中任意一对顶点至多有四个公共邻点。因此，$AQ_{n,k}-F_1-F_2$至多有四个孤立点，即为$|W|\le 4$。

情形 1 $|W|=1$。

设$u\in W$，则$uv_1,uv_2\in E\left(AQ_{n,k}\right)$。因为$AQ_{n,k}$包含三圈，所以需要进一步讨论$v_1,v_2$是否相邻。

情形 1.1 v_1,v_2相邻。

$N_{AQ_{n,k}}(u)\setminus\{v_1,v_2\}\subseteq F_1\cap F_2$，$N_{AQ_{n,k}}(v_1)\setminus\{u,v_2\}\subseteq F_1\cap F_2$，$N_{AQ_{n,k}}(v_2)\setminus\{u,v_1\}\subseteq F_1\cap F_2$。根据性质4，当$n\ge 4,k\ge 4$时，$AQ_{n,k}$中任意一对顶点至多有四个公共邻点。因此，

$cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{u,v_1\}\right]:u,v_1\right)\le 3$，$cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{u,v_2\}\right]:u,v_2\right)\le 3$，

$cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{v_1,v_2\}\right]:v_1,v_2\right)\le 3$，则

$$\begin{aligned}|F_1\cap F_2|\ge&\left|N_{AQ_{n,k}}(u)\setminus\{v_1,v_2\}\right|+\left|N_{AQ_{n,k}}(v_1)\setminus\{u,v_2\}\right|+\left|N_{AQ_{n,k}}(v_2)\setminus\{u,v_1\}\right|\\&-cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{u,v_1\}\right]:u,v_1\right)-cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{u,v_2\}\right]:u,v_2\right)\\&-cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{v_1,v_2\}\right]:v_1,v_2\right)\ge 3(4n-4)-3\times 3=12n-21。\end{aligned}$$

于是$\left|F_2\right|=\left|F_2\setminus F_1\right|+\left|F_1\cap F_2\right|\ge 1+12n-21=12n-20>8n-9(n\ge 4)$，与$\left|F_2\right|\le 8n-9$矛盾。

情形 1.2 v_1,v_2不相邻。

$N_{AQ_{n,k}}(u)\setminus\{v_1,v_2\}\subseteq F_1\cap F_2$，$N_{AQ_{n,k}}(v_1)\setminus\{u\}\subseteq F_1\cap F_2$，$N_{AQ_{n,k}}(v_2)\setminus\{u\}\subseteq F_1\cap F_2$。根据性质 4，当$n\ge 4,k\ge 4$时，$AQ_{n,k}$中任意一对顶点至多有四个公共邻点。因此，$cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{u,v_1\}\right]:u,v_1\right)\le 4$，$cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{u,v_2\}\right]:u,v_2\right)\le 4$，$cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{v_1,v_2\}\right]:v_1,v_2\right)\le 3$，则

$$
\begin{aligned}
&\left|F_1\cap F_2\right|\ge\left|N_{AQ_{n,k}}(u)\setminus\{v_1,v_2\}\right|+\left|N_{AQ_{n,k}}(v_1)\setminus\{u\}\right|+\left|N_{AQ_{n,k}}(v_2)\setminus\{u\}\right|\\
&-cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{u,v_1\}\right]:u,v_1\right)-cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{u,v_2\}\right]:u,v_2\right)\\
&-cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{v_1,v_2\}\right]:v_1,v_2\right)\ge(4n-4)+2(4n-3)-2\times 4-3\\
&=12n-21
\end{aligned}
$$

于是$\left|F_2\right|=\left|F_2\setminus F_1\right|+\left|F_1\cap F_2\right|\ge 1+12n-21=12n-20>8n-9(n\ge 4)$，与$\left|F_2\right|\le 8n-9$矛盾。

情形 2 $|W|=2$。

设$u,v\in W$，则$uv_1,uv_2,vv_1,vv_2\in E\left(AQ_{n,k}\right)$。因为$AQ_{n,k}$包含三圈，所以需要进一步讨论$v_1,v_2$是否相邻。

情形 2.1 v_1,v_2相邻。

$N_{AQ_{n,k}}(u)\setminus\{v_1,v_2\}\subseteq F_1\cap F_2$，$N_{AQ_{n,k}}(v)\setminus\{v_1,v_2\}\subseteq F_1\cap F_2$，$N_{AQ_{n,k}}(v_1)\setminus\{u,v,v_2\}\subseteq F_1\cap F_2$，$N_{AQ_{n,k}}(v_2)\setminus\{u,v,v_1\}\subseteq F_1\cap F_2$。根据性质 4，当$n\ge 4,k\ge 4$时，$AQ_{n,k}$中任意一对顶点至多有四个公共邻点。因此，$cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{u,v_1\}\right]:u,v_1\right)\le 3$，$cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{u,v_2\}\right]:u,v_2\right)\le 3$，$cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{v,v_1\}\right]:v,v_1\right)\le 3$，$cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{v,v_2\}\right]:v,v_2\right)\le 3$，$cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{u,v\}\right]:u,v\right)\le 2$，$cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{v_1,v_2\}\right]:v_1,v_2\right)\le 2$，

则

$$
\begin{aligned}
&\left|F_1\cap F_2\right|\ge\left|N_{AQ_{n,k}}(u)\setminus\{v_1,v_2\}\right|+\left|N_{AQ_{n,k}}(v)\setminus\{v_1,v_2\}\right|+\left|N_{AQ_{n,k}}(v_1)\setminus\{u,v,v_2\}\right|+\left|N_{AQ_{n,k}}(v_2)\setminus\{u,v,v_1\}\right|\\
&-cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{u,v_1\}\right]:u,v_1\right)-cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{u,v_2\}\right]:u,v_2\right)\\
&-cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{v,v_1\}\right]:v,v_1\right)-cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{v,v_2\}\right]:v,v_2\right)\\
&-cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{u,v\}\right]:u,v\right)-cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{v_1,v_2\}\right]:v_1,v_2\right)\\
&\ge 2(4n-4)+2(4n-5)-4\times 3-2\times 2=16n-34。
\end{aligned}
$$

于是$\left|F_2\right|=\left|F_2\setminus F_1\right|+\left|F_1\cap F_2\right|\ge 1+16n-34=16n-33>8n-9(n\ge 4)$，与$\left|F_2\right|\le 8n-9$矛盾。

情形 2.2 v_1,v_2不相邻。

$N_{AQ_{n,k}}(u)\setminus\{v_1,v_2\}\subseteq F_1\cap F_2$，$N_{AQ_{n,k}}(v)\setminus\{v_1,v_2\}\subseteq F_1\cap F_2$，$N_{AQ_{n,k}}(v_1)\setminus\{u,v\}\subseteq F_1\cap F_2$，$N_{AQ_{n,k}}(v_2)\setminus\{u,v\}\subseteq F_1\cap F_2$。根据性质 4，当$n\ge 4,k\ge 4$时，$AQ_{n,k}$中任意一对顶点至多有四个公共邻点。因此，$cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{u,v_1\}\right]:u,v_1\right)\le 4$，$cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{u,v_2\}\right]:u,v_2\right)\le 4$，$cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{v,v_1\}\right]:v,v_1\right)\le 4$，$cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{v,v_2\}\right]:v,v_2\right)\le 4$，$cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{u,v\}\right]:u,v\right)\le 2$，$cn\left(AQ_{n,k}\left[(F_1\cap F_2)\cup\{v_1,v_2\}\right]:v_1,v_2\right)\le 2$，

则

$$
\begin{aligned}
&\left|F_1 \cap F_2\right| \geq \left|N_{AQ_{n,k}}(u)\setminus\{v_1,v_2\}\right| + \left|N_{AQ_{n,k}}(v)\setminus\{v_1,v_2\}\right| + \left|N_{AQ_{n,k}}(v_1)\setminus\{u,v\}\right| + \left|N_{AQ_{n,k}}(v_2)\setminus\{u,v\}\right| \\
&-cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{u,v_1\}\right]:u,v_1\right)-cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{u,v_2\}\right]:u,v_2\right) \\
&-cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{v,v_1\}\right]:v,v_1\right)-cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{v,v_2\}\right]:v,v_2\right) \\
&-cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{u,v\}\right]:u,v\right)-cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{v_1,v_2\}\right]:v_1,v_2\right) \\
&\geq 4(4n-4)-4\times 4-2\times 2=16n-36。
\end{aligned}
$$

于是$\left|F_2\right|=\left|F_2\setminus F_1\right|+\left|F_1\cap F_2\right|\geq 1+16n-36=16n-35>8n-9(n\geq 4)$，与$\left|F_2\right|\leq 8n-9$矛盾。

情形 3 $|W|=3$。

设$u,v,w\in W$，则$uv_1,uv_2,vv_1,vv_2,wv_1,wv_2\in E\left(AQ_{n,k}\right)$。

$N_{AQ_{n,k}}(u)\setminus\{v_1,v_2\}\subseteq F_1\cap F_2$，$N_{AQ_{n,k}}(v)\setminus\{v_1,v_2\}\subseteq F_1\cap F_2$，$N_{AQ_{n,k}}(w)\setminus\{v_1,v_2\}\subseteq F_1\cap F_2$。根据性质 4，当$n\geq 4,k\geq 4$时，$AQ_{n,k}$中任意一对顶点至多有四个公共邻点。因此，$cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{u,v\}\right]:u,v\right)\leq 2$，$cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{u,w\}\right]:u,w\right)\leq 2$，$cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{v,w\}\right]:v,w\right)\leq 2$，则$\left|F_1\cap F_2\right|\geq\left|N_{AQ_{n,k}}(u)\setminus\{v_1,v_2\}\right|+\left|N_{AQ_{n,k}}(v)\setminus\{v_1,v_2\}\right|$ $+\left|N_{AQ_{n,k}}(w)\setminus\{v_1,v_2\}\right|-cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{u,v\}\right]:u,v\right)-cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{u,w\}\right]:u,w\right)$ $-cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{v,w\}\right]:v,w\right)\geq 3(4n-4)-3\times 2=12n-18$。

于是$\left|F_2\right|=\left|F_2\setminus F_1\right|+\left|F_1\cap F_2\right|\geq 1+12n-18=12n-17>8n-9(n\geq 4)$，与$\left|F_2\right|\leq 8n-9$矛盾。

情形 4 $|W|=4$。

设$u,v,w,x\in W$，则$uv_1,uv_2,vv_1,vv_2,wv_1,wv_2,xv_1,xv_2\in E\left(AQ_{n,k}\right)$。

$N_{AQ_{n,k}}(u)\setminus\{v_1,v_2\}\subseteq F_1\cap F_2$，$N_{AQ_{n,k}}(v)\setminus\{v_1,v_2\}\subseteq F_1\cap F_2$，$N_{AQ_{n,k}}(w)\setminus\{v_1,v_2\}\subseteq F_1\cap F_2$，$N_{AQ_{n,k}}(x)\setminus\{v_1,v_2\}\subseteq F_1\cap F_2$。根据性质 4，当$n\geq 4,k\geq 4$时，$AQ_{n,k}$中任意一对顶点至多有四个公共邻点。因此，$cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{u,v\}\right]:u,v\right)\leq 2$，$cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{u,w\}\right]:u,w\right)\leq 2$，$cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{u,x\}\right]:u,x\right)\leq 2$，$cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{v,w\}\right]:v,w\right)\leq 2$，$cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{v,x\}\right]:v,x\right)\leq 2$，$cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{w,x\}\right]:w,x\right)\leq 2$，
则

$$
\begin{aligned}
&\left|F_1 \cap F_2\right| \geq \left|N_{AQ_{n,k}}(u)\setminus\{v_1,v_2\}\right| + \left|N_{AQ_{n,k}}(v)\setminus\{v_1,v_2\}\right| + \left|N_{AQ_{n,k}}(w)\setminus\{v_1,v_2\}\right| + \left|N_{AQ_{n,k}}(x)\setminus\{v_1,v_2\}\right| \\
&-cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{u,v\}\right]:u,v\right)-cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{u,w\}\right]:u,w\right) \\
&-cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{u,x\}\right]:u,x\right)-cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{v,w\}\right]:v,w\right) \\
&-cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{v,x\}\right]:v,x\right)-cn\left(AQ_{n,k}\left[\left(F_1\cap F_2\right)\cup\{w,x\}\right]:w,x\right) \\
&\geq 4(4n-4)-6\times 2=16n-28。
\end{aligned}
$$

于是$\left|F_2\right|=\left|F_2\setminus F_1\right|+\left|F_1\cap F_2\right|\geq 1+16n-28=16n-27>8n-9(n\geq 4)$，与$\left|F_2\right|\leq 8n-9$矛盾。

若$F_1\setminus F_2=\varnothing$，则$F_1\subseteq F_2$。因为$F_2$是一个 1-好邻故障集，所以$AQ_{n,k}-F_2=AQ_{n,k}-F_1-F_2$没有孤立点。断言 1 证明完毕。

设$u\in V\left(AQ_{n,k}\right)\setminus\left(F_1\cup F_2\right)$。根据断言 1，$u$在$AQ_{n,k}-F_1-F_2$中至少有一个邻点。因为顶点对$\left(F_1,F_2\right)$不满足定理 4.1 的任何一个条件，根据定理 4.1(1)，所以对于任意一对相邻的点u，$w\in V\left(AQ_{n,k}\right)\setminus\left(F_1\cup F_2\right)$，不存在$v\in F_1\Delta F_2$使得$uw\in E\left(AQ_{n,k}\right)$和$wv\in E\left(AQ_{n,k}\right)$。因此，$u$在$F_1\Delta F_2$中

没有邻点。根据 u 的任意性，$V(AQ_{n,k})\setminus(F_1\cup F_2)$ 与 $F_1\Delta F_2$ 中间没有边。由于 $F_2\setminus F_1\neq\varnothing$，$F_1$ 是一个 1-好邻故障集，所以 $\delta(AQ_{n,k}[F_2\setminus F_1])\geq 1$。根据引理 3.2，$|F_2\setminus F_1|\geq 2$。因为 F_1 和 F_2 都是 1-好邻故障集且 $V(AQ_{n,k})\setminus(F_1\cup F_2)$ 与 $F_1\Delta F_2$ 之间没有边，所以 $F_1\cap F_1$ 是 $AQ_{n,k}$ 的一个 1-好邻割。根据引理 3.3，$|F_1\cap F_2|\geq 8n-10$。因此，$|F_2|=|F_2\setminus F_1|+|F_1\cap F_2|\geq 2+8n-10=8n-8$。这与 $|F_2|\leq 8n-9$ 矛盾。于是，$AQ_{n,k}$ 是一个 1-好邻 $(8n-9)$-可诊断的。故 $t_1(AQ_{n,k})\geq 8n-9$。

由引理 4.2 和引理 4.3 可得以下定理：

定理 4.4 当 $n\geq 4,k\geq 4$ 时，扩展 k 元 n 立方体 $AQ_{n,k}$ 在 MM*模型下的 1-好邻诊断度 $t_1(AQ_{n,k})=8n-9$。

5. 结束语

诊断度是互联网络容错的重要指标，本文研究了扩展 k 元 n 立方体在 PMC 模型下和 MM*模型下的 1 好邻诊断度 $t_1(AQ_{n,k})=8n-9$ $(n\geq 4,k\geq 4)$，这项工作将帮助工程师可根据应用环境、网络拓扑结构、网络的可靠性和故障模式的相关统计开发更多不同的测量 1-好邻诊断度的措施。

参考文献 (References)

[1] Dahbura, A.T. and Masson, G.M. (1984) An $O(n^{2.5})$ Fault Identification Algorithm for Diagnosable Systems. *IEEE Transactions on Computers*, **33**, 486-492. https://doi.org/10.1109/TC.1984.1676472

[2] Lai, P.-L., Tan, J.J.M., Chang, C.-P. and Hsu, L.-H. (2005) Conditional Diagnosability Measures for Large Multiprocessor Systems. *IEEE Transactions on Computers*, **54**, 165-175. https://doi.org/10.1109/TC.2005.19

[3] Preparata, F., Metze, G. and Chien, R.T. (1968) On the Connection Assignment Problem of Diagnosable Systems. *IEEE Transactions on Electronic Computers*, **12**, 848-854.

[4] Joon, M. and Miroslaw, M. (1981) A Comparison Connection Assignment for Self-Diagnosis of Multiprocessor Systems. *Proceeding of* 11*th International Symposium on Fault-Tolerant Computing*, Portland, June 1981, 173-175.

[5] Chang, N.W., Cheng, E. and Hsieh, S. (2015) Conditional Diagnosability of Cayley Graphs Generated by Transposition Trees under the PMC Model. *ACM Transactions on Design Automation of Electronic Systems*, **20**, 1-16. https://doi.org/10.1145/2699854

[6] Yuan, J., Liu, A.X., Ma, X., Liu, X.L., Qin, X. and Zhang, J.F. (2015) The g-Good-Neighbor Conditional Diagnosability of k-Ary n-Cubes under the PMC Model and MM* Model. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **26**, 1165-1177. https://doi.org/10.1109/TPDS.2014.2318305

[7] Peng, S.-L., Lin, C.-K., Tan, J.J.M. and Hsu, L.-H. (2012) The g-Good-Neighbor Conditional Diagnosability of Hypercube under the PMC Model. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 10406-10412. https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.03.092

[8] Yuan, J., Liu, A.X., Qin, X., Li, J. and Zhang, J.F. (2016) The g-Good-Neighbor Conditional Diagnosability of 3-Ary n-Cubes under the PMC Model and MM* Model. *Theoretical Computer Science*, **622**, 144-162.

[9] Wang, S.Y. and Han, W.P. (2016) The g-Good-Neighbor Conditional Diagnosability of n-Dimentional Hypercubes under the PMC Model and MM* Model. *International Processing Letters*, **116**, 574-577. https://doi.org/10.1016/j.ipl.2016.04.005

[10] Wang, M., Guo, Y.B. and Wang, S.Y. (2015) The 1-Good-Neighbor Diagnosability of Cayley Graphs Generated by Transposition Trees under the PMC Model and MM* Model. *International Journal of Computer Mathematics*, 1-12. https://doi.org/10.1080/00207160.2015.1119817

[11] Xiang, Y.L. and Stewart, L.A. (2011) Augmented k-Ary n-Cubes. *Information Science*, **181**, 239-256. https://doi.org/10.1016/j.ins.2010.09.005

[12] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2007) Graph Theory. Springer, New York.

[13] Lin, R.Z. and Zhang, H.P. (2015) The Restricted Edge-Connectivity and Restricted Connectivity of Augmented k-Ary n-Cubes. *International Journal of Computer Mathematics*, **93**, 1281-1298. https://doi.org/10.1080/00207160.2015.1067690

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org