

# Algae Population Growth Dynamic Modeling and Stability Analysis under Phosphorus Limitation

Hengguo Yu, Han Duan, Qi Wang

Wenzhou University, Wenzhou Zhejiang  
Email: yuhengguo5340@163.com

Received: Apr. 25<sup>th</sup>, 2017; accepted: May 8<sup>th</sup>, 2017; published: May 12<sup>th</sup>, 2017

---

## Abstract

In this paper, firstly, on the basis of research progress of water eutrophication in subtropical reservoirs, the distributed delay is introduced to characterize time delay phenomenon of aquatic ecosystem in the process of algae population growth dynamic modeling, an algae population growth dynamic model under the restriction of total phosphorus has been structured. Secondly, some theoretical analysis on the ecological model have been investigated to establish some judgment criterions for the asymptotic stability of the boundary equilibrium points and define some critical parameter threshold conditions which can ensure that the ecological model has these specific dynamical states. Finally, these studies can provide certain theoretical basis for the further prediction of the nutrient dynamic evolution trend and the dominant algae population growth dynamic law in Wujiayuan reservoir.

## Keywords

Ecological Model, Equilibrium Point, Stability, Delay, Total Phosphorus

---

# 总磷限制下的藻类种群生长动态建模及稳定性研究

于恒国, 段 涵, 王 奇

温州大学, 浙江 温州  
Email: yuhengguo5340@163.com

收稿日期: 2017年4月25日; 录用日期: 2017年5月8日; 发布日期: 2017年5月12日

## 摘要

基于亚热带水库水体富营养化研究进程, 本论文在动态建模过程中引入分布时滞来刻画水域生态系统中的时间延迟现象, 构建了一类总磷限制下的藻类种群生长动态模型, 对所建生态模型进行了一定的理论分析, 建立了该生态模型边界平衡点渐近稳定的判断准则, 明确了该生态模型具有这些特定动力学性态的一些关键参数阈值条件, 这些研究作为进一步预测吴家园水库营养盐动态演化趋势和揭示水域优势藻类种群生长动态规律提供了一定的理论基础。

## 关键词

生态模型, 平衡点, 稳定性, 时滞, 总磷

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

最近几十年里, 我国众多水库正处于富营养化过程中, 水库富营养化问题已对人类生存环境及饮用水安全构成了严重威胁, 并制约了社会、经济及环境的可持续发展。随着现代经济的高速发展和人口数量剧增导致了水库水体中的营养盐不断增加, 超过了水库本身的自净能力, 造成水库藻类大量繁殖, 引起藻类水华频繁爆发, 形成藻类水华现象。因此, 随着世界经济的快速发展, 水体富营养化引起的藻类水华问题已成为一个日趋严重的全球性问题之一[1] [2] [3]。

藻类水华形成过程是在一定的营养、气候、水文条件和生态环境下藻类种群过度繁殖和聚集的过程, 是水体生态环境因子如 TN、TP、温度、光照、pH、流速、风力、溶解氧等综合动态过程[4]。在最近几十年里, 国内外学者分析和明确了影响藻类动态生长的关键因子, 例如光照、温度、营养盐、pH 值和流速等。论文[5]选择光照强度、温度和营养物作为限制因素研究了藻类生长规律, 建立了镜泊湖藻类生长动态新模型, 探析了此类因子与藻类种群动态生长的定量关系。论文[6]研究了光照强度、温度和营养盐对滇池铜绿微囊藻生长的影响规律, 研究表明滇池中磷是限制藻类动态生长的主要因子, 控制滇池富营养化应以控制磷为主。论文[7]主要研究了温度、光照强度和硝酸盐对藻类种群生长的影响规律, 研究发现拟柱孢藻对温度、光照强度和氮源均有较宽的生态位, 有利于在较大空间尺度上进行扩散。论文[8]研究了温度和光照对单细胞绿藻 1102 的影响特性, 结果显示温度和光照对单细胞绿藻生长具有交互作用。论文[9]研究了温度、光照和磷酸盐脉冲输入对藻类种群生长的交互影响机制, 证实了温度、光照和脉冲对藻类种群生长存在交互影响机制。论文[10]揭示了营养盐磷含量及不同温度对铜绿微囊藻生长的动态影响机制, 研究结果较好地说明洋河水库铜绿微囊藻种群从早春到晚秋持续发生的原因。论文[11]研究了光照和磷的交互作用对两种淡水藻类生长的影响, 研究结果显示光照和磷的交互作用对铜绿微囊藻的生长影响明显。论文[12]研究了光照和温度对藻类生长的影响规律, 研究结果从藻类种群繁殖能力角度探索了光照强度和光照周期及其温度对藻类生长的影响特性及规律。论文[13]研究了光和营养盐如何影响浮游植物的大面积生长繁殖, 研究结果揭示了藻类种群生长比率的大小严重依赖于光和营养盐的供给情况。论文[14]研究了氮, 磷, 铁和硅等因素对 5 种海洋底栖硅藻生长动态的影响情况, 研究揭示了氮, 磷, 铁

和硅等因素对硅藻生长比率的影响特性, 5 种硅藻可以再 2~6 天内到达最大生长比率。论文[15]主要研究了光照和营养盐在不同情况下对亚热带水域浮游植物生长动态的影响机制, 结果显示不同程度的光照强度和不同比率的营养盐对浮游植物的生长动态演化有着不同程度的影响特性, 且它们之间存在一定的协同交互影响机制。Lv 等人[16]研究了氮磷、温度等因素对亚热带浅水湖泊浮游植物空间组成和生物量的影响规律, 结果揭示温度和总氮是影响浮游植物生长的关键因素。综上所述, 藻类种群生长动态过程是多种因素动态协同交互作用过程, 影响其过程的主要因素是: 1) 水体中丰富的 N、P 营养物质, BOD 及其他微量元素; 2) 适宜的温度和光照; 3) 适宜的水文地理条件如缓慢的水流等。

## 2. 动态建模

吴家园水库位于温州苍南县藻溪镇吴家园村, 是苍南县第二大饮用水水库, 每年平均为 60 万人民群众提供清洁水源 3300 万方, 但是 2014 年 9 月 9 日爆发大规模藻类水华, 一眼望去是绿油油的一片, 被迫停止供水。此外吴家园水库在 2012 年 10 月和 2014 年 8 月也发生过不同程度的藻类水华现象。显而易见, 温州地区饮用水水库富营养化问题还是比较严峻得, 严重制约了当地经济的发展与周边城镇人口饮水安全。因此, 水体富营养化和藻类水华预警预测及控制已成为当前迫切解决的问题之一。

众所周知, 底泥磷的释放在维持藻类种群长期生长及其藻类水华爆发过程中具有举足轻重的作用。一般来说, 当总磷浓度高于一个临界值  $L$  时, 底泥将吸收磷; 当总磷浓度低于这个临界值  $L$  时, 底泥将释放磷。为了数学刻画这类动态机制, 可以用数学函数  $f(x) = p_1x^2 - p_2x + p_3$  来表示底泥的释放与吸收机制, 其中  $p_1, p_2, p_3$  都是常数,  $x \in [0, M_{\max}]$ ,  $f(x) \in [-L_1, L_2]$ , 且  $M_{\max}$  表示吴家园水库常年监测到的藻类种群最大生物量。同时, 函数  $f(x)$  具有一个重要特征: 如果  $0 < x(t) < L$ , 则有  $f(x)$  具有正的递减性, 如果  $M_{\max} \geq x(t) \geq L$ , 则有  $f(x)$  具有负的递减性。这个性质导致  $f(x)$  具有一个特性就是当一类藻类种群数量达到一定范围内, 这类藻类种群将持续增加并最终成为主导藻类种群。

同时, 时滞动力系统能够更好地描述水体富营养化过程中的延迟现象, 特别是水体富营养化过程中的生态系统内部结构、驱动因素和交互过程中的时间延迟性。根据水域生态学所知, 藻类种群吸收营养盐并转化为自身生长的营养物质需要一定时间段, 进而会有一定的时间延迟现象。为了在动态建模过程中显示时间延迟的影响作用, 在动态建模过程中将引入时滞效应, 因此所建总磷限制下的藻类种群生长动态模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = r_1(I - x(t)) + f(x(t)) - \frac{ax(t)y(t)}{b + x(t)} - sx(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = r_2y(t)\left(\frac{1 - y(t)/k_2}{1 - y(t)/k_1}\right) + \frac{aex(t)}{b + x(t)} \int_0^h y(t-s)dK(s) - my(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中  $x(t), y(t)$  分别代表在时间  $t$  刻总磷的浓度(mg/L)和藻类种群的生物量(ug/L),  $r_1$  代表稀释率,  $I$  代表外界输入水库的磷的浓度,  $s$  代表磷的沉积速率,  $r_2$  代表藻类种群来自其它营养源的平均增长率,  $a$  代表藻类种群对磷的吸收率,  $b$  表示半饱和常数,  $e$  表示磷营养转化为藻类种群生长能量的转化率,  $k_1 (k_1 < k_2)$  代表吴家园水库水域营养提供的藻类种群最大环境容纳量,  $k_2$  代表吴家园水库资源的最大环境容纳量,  $m$  代表藻类种群平均死亡率。同时  $K(s)$  表示区间  $[0, h]$  上的有界函数,  $\frac{dK(s)}{s}$  可以用来表示在时间  $[0, h]$  之间的藻类种群生长动态扩散率。现在假设时滞效应发生在种群动态交互作用过程中, 也就是说藻类种群不可能直接吸收总磷营养盐后, 就可以转化为维持自身生长的能量, 而是需要一段时间  $[0, h]$ 。此外, 模型(1)的初始条件满足:

$$\left. \begin{aligned} x(t) = \varphi_1(\theta) \geq 0 \\ y(t) = \varphi_2(\theta) \geq 0 \end{aligned} \right\} \theta \in [-h, 0],$$

其中  $\{\varphi_1, \varphi_2\} \in C([-h, 0], R_+^2)$ ,  $R_+^2 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ 。

在生态建模过程中，我们引入了分布时滞项来刻画水域生态系统过程中的一类时间延迟现象，并假设藻类种群生长严重依赖营养盐-总磷的限制，进而研究如何通过控制总磷的浓度来预防与控制藻类种群快速繁殖。

### 3. 理论分析

为了合理地推导出总磷营养盐与藻类种群生长动态的互动作用机制，将对所建动态模型(1)进行相关稳定性分析。藻类水华控制的实质问题就是尽可能地保持水库水域藻类种群的浓度偏低，尽可能等于零更好，但是这是不可能实现。然而借助生态数学模型可以理论上获得一些参数限制条件，保证藻类种群是灭绝的，也就是生态模型(1)的藻类种群不存在的边界平衡点是稳定的。如果生态模型(1)的所有解在边界平衡点处是趋于稳定，那么藻类种群即将面临灭绝。若藻类种群最终走向灭绝，则  $y(t) = 0$ ，得到：

$$r_1(I - x) + p_1x^2 - p_2x + p_3 - sx = 0$$

1): 若  $[r_1 + p_2 + s]^2 = 4p_1[r_1I + p_3]$ ，则生态模型(1)存在一个边界平衡点  $E_0(x_0, 0)$ ，其中

$$x_0 = \frac{r_1 + p_2 + s}{2p_1}.$$

2): 若  $[r_1 + p_2 + s]^2 > 4p_1[r_1I + p_3]$ ，则生态模型(1)存在两个平衡点  $E_1(x_1, 0)$  和  $E_2(x_2, 0)$ ，其中

$$x_1 = \frac{(r_1 + p_2 + s) + \sqrt{(r_1 + p_2 + s)^2 - 4p_1(r_1I + p_3)}}{2p_1}$$

和

$$x_2 = \frac{(r_1 + p_2 + s) - \sqrt{(r_1 + p_2 + s)^2 - 4p_1(r_1I + p_3)}}{2p_1}.$$

在  $0 < x(t) \leq M_{\max}$  范围内，下面将推导出这些边界平衡点稳定的关键阈值条件，这些理论条件是进一步推导出藻类种群走向灭绝的关键判断准则。

**定理 2.1.** 平衡点  $E_0(x_0, 0)$  是一个局部渐近稳定的当且仅当  $A_1 < 0$  和  $A_2 < 0$ 。

证明：为了研究平衡点  $E_0(x_0, 0)$  的稳定性，构建一类 Lyapunov-Krasovskii 函数，表示如下：

$$V(t) = [(x(t) - x_0) + y(t)]^2 + y^2(t) + 3ae \int_0^h |dK(s)| \int_{t-s}^t y^2(\tau) d\tau$$

沿着生态模型(1)的轨迹对  $V(t)$  求导得到

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} = & 2(x(t) - x_0) \frac{dx(t)}{dt} + 2(x(t) - x_0) \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) \frac{dx(t)}{dt} + 4y(t) \frac{dy(t)}{dt} \\ & + 3ae \int_0^h |dK(s)| y^2(t) - 3ae \int_0^h y^2(t-h) |dK(s)| \end{aligned}$$

因此，可得

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} \leq & -2 \left[ r_1 + p_2 + s - p_1 (M_{\max} + x_0) - \frac{ae}{2} \int_0^h |dK(s)| \right] (x(t) - x_0)^2 + 4 \left( \frac{r_2 k_1}{k_2} - m \right) y^2(t) \\ & + 2 \left[ \frac{r_2 k_1}{k_1} - m - r_1 - p_2 - s + p_1 (M_{\max} + x_0) \right] y(t) (x(t) - x_0) \\ & + 5ae \int_0^h |dK(s)| y^2(t) - \frac{2ax(t)}{b+x(t)} y(t) (x(t) - x_0) \end{aligned}$$

如果  $x(t) - x_0 > 0$ , 则

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq \xi^T(t) A_1 \xi(t),$$

其中  $\xi(t) = ((x(t) - x_0), y(t))$ ,

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 \left[ r_1 + p_2 + s - p_1 (M_{\max} + x_0) - \frac{ae}{2} \int_0^h |dK(s)| \right] & \frac{r_2 k_1}{k_2} - m - r_1 - p_2 - s + p_1 (M_{\max} + x_0) \\ \frac{r_2 k_1}{k_2} - m - r_1 - p_2 - s + p_1 (M_{\max} + x_0) & 4 \left( \frac{r_2 k_1}{k_2} - m \right) + 5ae \int_0^h |dK(s)| \end{bmatrix}.$$

如果  $x(t) - x_0 < 0$ , 则

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq \xi^T(t) A_2 \xi(t),$$

其中  $\xi(t) = ((x(t) - x(0)), y(t))$ ,

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 \left[ r_1 + p_2 + s - p_1 (M_{\max} + x_0) - \frac{ae}{2} \int_0^h |dK(s)| \right] & \frac{r_2 k_1}{k_2} - m - a - r_1 - p_2 - s + p_1 (M_{\max} + x_0) \\ \frac{r_2 k_1}{k_2} - m - a - r_1 - p_2 - s + p_1 (M_{\max} + x_0) & 4 \left( \frac{r_2 k_1}{k_2} - m \right) + 5ae \int_0^h |dK(s)| \end{bmatrix}$$

因此, 当满足条件  $A_1 < 0$  和  $A_2 < 0$  时, 平衡点  $E_0(x_0, 0)$  是渐近稳定的。

基于上述相似的分析过程, 可以得到下面两个定理, 因为证明过程, 所以不再给出证明过程。

**定理 3.2** 平衡点  $E_1(x_1, 0)$  是局部渐近稳定的当且仅当  $A_3 < 0$  和  $A_4 < 0$ 。

$$A_3 = \begin{bmatrix} -2 \left[ r_1 + p_2 + s - p_1 (M_{\max} + x_1) - \frac{ae}{2} \int_0^h |dK(s)| \right] & \frac{r_2 k_1}{k_2} - m - r_1 - p_2 - s + p_1 (M_{\max} + x_1) \\ \frac{r_2 k_1}{k_2} - m - r_1 - p_2 - s + p_1 (M_{\max} + x_1) & 4 \left( \frac{r_2 k_1}{k_2} - m \right) + 5ae \int_0^h |dK(s)| \end{bmatrix},$$

和

$$A_4 = \begin{bmatrix} -2 \left[ r_1 + p_2 + s - p_1 (M_{\max} + x_1) - \frac{ae}{2} \int_0^h |dK(s)| \right] & \frac{r_2 k_1}{k_2} - m - a - r_1 - p_2 - s + p_1 (M_{\max} + x_1) \\ \frac{r_2 k_1}{k_2} - m - a - r_1 - p_2 - s + p_1 (M_{\max} + x_1) & 4 \left( \frac{r_2 k_1}{k_2} - m \right) + 5ae \int_0^h |dK(s)| \end{bmatrix}.$$

**定理 3.3.** 平衡点  $E_2(x_2, 0)$  是局部渐近稳定的当且仅当  $A_5 < 0$  和  $A_6 < 0$ 。

$$A_5 = \begin{bmatrix} -2 \left[ r_1 + p_2 + s - p_1 (M_{\max} + x_2) - \frac{ae}{2} \int_0^h |dK(s)| \right] & \frac{r_2 k_1}{k_2} - m - r_1 - p_2 - s + p_1 (M_{\max} + x_2) \\ \frac{r_2 k_1}{k_2} - m - r_1 - p_2 - s + p_1 (M_{\max} + x_2) & 4 \left( \frac{r_2 k_1}{k_2} - m \right) + 5ae \int_0^h |dK(s)| \end{bmatrix},$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} -2 \left[ r_1 + p_2 + s - p_1 (M_{\max} + x_2) - \frac{ae}{2} \int_0^h |dK(s)| \right] & \frac{r_2 k_1}{k_2} - m - a - r_1 - p_2 - s + p_1 (M_{\max} + x_2) \\ \frac{r_2 k_1}{k_2} - m - a - r_1 - p_2 - s + p_1 (M_{\max} + x_2) & 4 \left( \frac{r_2 k_1}{k_2} - m \right) + 5ae \int_0^h |dK(s)| \end{bmatrix}.$$

基础上述理论分析, 能够得到维持边界平衡点稳定的一些关键参数的阈值表达式, 而这些表达式能为下一步数值模拟提供一定的理论基础。

#### 4. 结论

基于亚热带水库水域富营养化情况与吴家园水库水质监测情况, 在动态建模过程中引入分布时滞项, 建立了一类总磷限制下的藻类种群生长动态模型, 对所建生态模型进行了一定的理论分析, 研究了该生态模型边界平衡点的渐近稳定性, 明确了该生态模型具有这些特定动力学性态的阈值条件, 这些研究工作为进一步预测吴家园水库营养盐动态演化趋势和揭示水域优势藻类种群生长动态规律提供了一定的理论基础。

#### 致 谢

感谢浙江省水环境与海洋资源重点实验室的同仁们, 感谢你们一直以来在实验室对我们问题的细致引导、鼓励和解答, 使我们对专业有了更深更细致的理解。

感谢国家自然科学基金面上项目(31570364), 浙江省公益技术研究项目基金项目(2015C33227), 浙江省自然科学基金项目(LY16BO70008), 温州科技计划项目(S20140028 和 S20140024)的资助。

#### 参考文献 (References)

- [1] Ryding, S. and Rast, W. (1989) The Control of Eutrophication of Lakes and Reservoirs. The Parthenon Publishing Group, Carforth.
- [2] Qin, B.-Q. (2009) Lake Eutrophication: Control Countermeasures and Recyclings. *Ecological Engineering*, **35**, 1569-1573. <https://doi.org/10.1016/j.ecoleng.2009.04.003>
- [3] 高月香, 张永春. 水文气象因子对藻类爆发的影响[J]. 水科学与工程, 2006(2): 10-12.
- [4] 赵磊, 刘永, 李玉照等. 湖泊生态系统稳定转换理论和驱动因子研究进展[J]. 生态环境科学: 2014, 23(10): 1697-1707.
- [5] 徐云麟, 李立新, 李莉. 湖泊藻类生长动力学研究[J]. 北京大学学报(自然科学版), 1991, 27(6): 726-737.
- [6] 刘玉生, 韩梅, 梁占彬, 林毅雄. 光照、温度和营养盐对滇池微囊藻生长的影响[J]. 环境科学研究, 1995, 8(6): 8-11.
- [7] 于婷, 戴景峻, 雷腊梅, 彭亮. 温度、光照强度及硝酸盐对拟柱孢藻(*Cyldrospermopsis Raciborskii* N8)生长的影响[J]. 湖泊科学, 2014, 26(3): 441-446.
- [8] 袁著涛, 董晓煜, 刘升平. 温度和光照对单细胞绿藻 1102 生长影响的研究[J]. 水产科学, 2014, 33(2): 121-126.
- [9] 周慧敏, 冯剑丰, 朱琳, 李文娇. 温度、光照和磷酸盐脉冲输入对三角褐指藻的交互影响[J]. 中国环境科学, 2015, 35(1): 244-250.
- [10] 高学庆, 任久长, 宗志祥, 蔡晓明. 铜绿微囊藻营养动力学研究[J]. 北京大学学报(自然科学版), 1994, 30(4): 462-469.
- [11] 刘春光, 金相灿, 邱金泉, 等. 光照和磷的交互作用对两种淡水藻类生长的影响[J]. 中国环境科学, 2005, 25(1):



32-36.

- [12] Bechet, Q., Shilton, A. and Guieysse, B. (2013) Modeling the Effects of Light and Temperature on Algae Growth: State of the Art and Critical Assessment for Productivity Prediction during Outdoor Cultivation. *Biotechnology Advances*, **31**, 1648-1663. <https://doi.org/10.1016/j.biotechadv.2013.08.014>
- [13] Mei, Z.P., Finkel, Z.V. and Irwin, A.J. (2009) Light and Nutrient Availability Affect the Size-Scaling of Growth in Phytoplankton. *Journal of Theoretical Biology*, **259**, 582-588. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2009.04.018>
- [14] Yang, M., Zhao, W. and Xie, X. (2014) Effects of Nitrogen, Phosphorus, Iron and Silicon on Growth of Five Species of Marine Benthic Diatoms. *Acta Ecological Sinica*, **34**, 311-319. <https://doi.org/10.1016/j.chnaes.2014.10.003>
- [15] Cunha, D.G.F. and Calijuri, M.C. (2011) Limiting Factors for Phytoplankton Growth in Subtropical Reservoirs: The Effect of Light and Nutrient Availability in Different Longitudinal Compartments. *Lake and Reservoir Management*, **27**, 162-172. <https://doi.org/10.1080/07438141.2011.574974>
- [16] Lv, J., Wu, H.J. and Chen, M.Q. (2011) Effects of Nitrogen and Phosphorus on Phytoplankton Composition and Biomass in Subtropical, Urban Shallow Lakes in Wuhan, China. *Limnological*, **41**, 48-56. <https://doi.org/10.1016/j.limno.2010.03.003>

**期刊投稿者将享受如下服务:**

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>期刊邮箱: [aam@hanspub.org](mailto:aam@hanspub.org)