Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2017, 6(3), 275-282**
Published Online May 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.63033

Hans汉斯

Asymptotic Behavior of Solutions for a Class of Nonlinear Functional Differential Equations

Yongqin Xie, Yi Liu, Cheng Long, Kenan Zhou

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan
Email: yqxie_11@163.com

Received: May 5th, 2017; accepted: May 22nd, 2017; published: May 27th, 2017

Abstract

In this paper, we study the asymptotic behavior of solutions of third-order nonlinear functional differential equation with distributed delay. By using non-classical Riccati transformation, Young's inequality and integral averaging, we establish some new sufficient conditions which ensure that every solution of this equation oscillated or converged to zero. Our results essentially improve and complement known results in the literature recently.

Keywords

Third-Order Neutral Differential Equation, Oscillation Criterion, Riccati Transformation, Young's Inequality

一类非线性泛函微分方程解的渐近行为

谢永钦，刘　轶，龙　程，周克男

长沙理工大学　数学与统计学院，湖南　长沙
Email: yqxie_11@163.com

收稿日期：2017年5月5日；录用日期：2017年5月22日；发布日期：2017年5月27日

摘　要

本文研究一类具有分布时滞的三阶非线性泛函微分方程解的渐近行为，利用推广的Riccati变换和Young不等式，通过积分平均方法，获得了泛函微分方程一些新的振动性判据，改进和推广了最近文献中的一些结果。

文章引用：谢永钦，刘轶，龙程，周克男．一类非线性泛函微分方程解的渐近行为[J]．应用数学进展，2017，6(3): 275-282. https://doi.org/10.12677/aam.2017.63033

关键词

三阶中立型微分方程，振动准则，Riccati变换，Young不等式

1. 引言

本文讨论如下非线性泛函微分方程

$$\left(a(t)\left(z''(t)\right)^{\gamma}\right)'+\int_c^d q(t,\xi)f\left(x\left(\sigma(t,\xi)\right)\right)\mathrm{d}\xi=0, \tag{1}$$

解的渐近行为。本文将假设如下条件成立：$z(t)=x(t)+\int_a^b p(t,\mu)x\left(\tau(t,\mu)\right)\mathrm{d}\mu$，$a(t)\in C^1\left([t_0,+\infty),R^+\right)$，且满足

$$\int_{t_0}^{+\infty}\left[a(s)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}s<+\infty; \tag{2}$$

$p(t,\mu)\in C\left([t_0,+\infty)\times[a,b],[0,+\infty)\right)$ 且满足 $0\le\int_a^b p(t,\mu)\mathrm{d}\mu\le p<1$；$\gamma$ 为两个正奇整数之比。$\tau(t,\mu)\in C\left([t_0,+\infty)\times[a,b],R^+\right)$，满足 $\tau(t,\mu)\le t$，$\liminf\limits_{t\to\infty}\tau(t,\mu)=+\infty$；记 $q_1(t)=\int_c^d q(t,\xi)\mathrm{d}\xi$，$q(t,\xi)\in C\left([t_0,+\infty)\times[c,d],R^+\right)$；$\sigma(t,\xi)\in C^1\left([t_0,+\infty)\times[c,d],R^+\right)$ 关于 ξ 在区间 $[c,d]$ 内单调递减，满足 $\sigma(t,\xi)\le t$ 及 $\liminf\limits_{t\to\infty}\sigma(t,\mu)=+\infty$；$f(x)\in C(R,R)$ 且存在一个正常数 δ 使得：

$$\frac{f(x)}{x^{\gamma}}\ge\delta>0,\ x\ne0.$$

称 $x(t)$ 是方程(1)的解，是指存在 $T_x\ge t_0$，使得

$$x(t)\in C^2\left[T_x,+\infty\right),\quad a(t)\left(z''(t)\right)^{\gamma}\in C^1\left[T_x,+\infty\right),$$

并且在 $[T_x,+\infty)$ 满足方程(1)。本文仅考虑方程(1)中，满足 $\sup\left\{|x(t)|:t\ge T\right\}>0$ 的解。

称方程(1)的解是振动的，若它在 $[T_x,+\infty)$ 上有任意大的零点，否则称它为非振动的，若它的每一个解 $x(t)$ 是振动的或满足 $\lim\limits_{x\to\infty}x(t)=0$，那么方程(1)称为弱振动。

近年来，对于泛函微分方程的解的振动性研究受到了国内外学者的广泛关注(见文献[1] [2] [3] [4])。但是关于三阶中立型时滞微分方程的振动性结果相对较少。在文[4] [5]中，作者在 $\int_{t_0}^{+\infty}a(s)^{-\frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}s=\infty$ 的假设下给出了方程(1)振动的若干充分条件。在文[6]中，作者在 $\gamma=1$ 的情形下研究了方程(1)振动行为。本文的目的是在条件(2)下，利用推广的 Riccati 变换及 Young 不等式，运用积分平均方法，得到新的关于方程(1)解的振动准则，改进和推广文献[5] [6]中的相关结果。

2. 主要引理

引理 1 设 $x(t)$ 是方程(1)的一个最终正解，那么当 t 充分大时，$z(t)$ 必满足下面三种结构之一：

(I) $z(t)>0, z'(t)>0, z''(t)>0$；

(II) $z(t)>0, z'(t)<0, z''(t)>0$；

(III) $z(t)>0, z'(t)>0, z''(t)<0$。

证明：设 $x(t)$ 是方程(1)的一个最终正解，当 t 充分大时，有

$$\left(a(t)\left(z''(t)\right)^{\gamma}\right)'=-\int_c^d q(t,\xi)f\left(x\left(\sigma(t,\xi)\right)\right)\mathrm{d}\xi<0,$$

那么 $a(t)\left(z''(t)\right)^{\gamma}$ 是单调递减的，故当 t 充分大时，$a(t)\left(z''(t)\right)^{\gamma}$ 定号的，由于 $a(t)>0$，则有

$$z''(t)>0 \text{ 或 } z''(t)<0.$$

若 $z''(t)<0$，则 $z'(t)$ 是单调递减的，故当 t 充分大时，$z'(t)$ 定号，即：$z'(t)>0$ 或 $z'(t)<0$。下面我们证明当 t 充分大时仅有：$z'(t)>0$。

事实上，如若不然，则 $z'(t)<0$，而 $z''(t)<0$。由泰勒公式可知，当 t 充分大时，$z(t)<0$，这与 $z(t)>0$ 矛盾。

因此，当 t 充分大时，$z(t)$ 最终有结构(I)或(II)或(III)。■

引理 2 若 $x(t)$ 是方程(1)的一个最终正解，设 $z(t)$ 满足结构(II)，如果

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_v^{\infty}\left[\frac{1}{a(u)}\int_u^{\infty}\int_c^d q(s,\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\infty, \tag{3}$$

则有 $\lim\limits_{x\to\infty}x(t)=0$。

引理 2 的证明完全类似[5]引理 2 的证明，因而省略证明。■

3. 主要结论

记 $D=\{(t,s):t\ge s\ge t_0\}, D_0=\{(t,s):t>s\ge t_0\}$，称二元函数 $H\in C^1(D,R)$ 是属于 X 类函数，如果 H 满足

(i) $H(t,t)=0, t\ge t_0$，$H(t,s)>0, (t,s)\in D_0$；

(ii) $\dfrac{\partial H(t,s)}{\partial s}<0$，存在 $\rho\in C^1\left([t_0,+\infty),R^+\right)$，$h\in C(D_0,R)$，使得

$$\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}+\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}H(t,s)=-h(t,s)\left(H(t,s)\right)^{\gamma/\gamma+1}, \forall(t,s)\in D_0.$$

定理 1，若假设条件及(3)成立，并且存在 $\rho\in C^1\left([t_0,+\infty),R^+\right)$ 以及 $\forall(t,s)\in D_0$，$H(t,s)\in X$，满足：

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^t\left[H(t,s)Q(s)-\frac{\rho(s)a(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}h^{\gamma+1}(t,s)\right]\mathrm{d}s=+\infty, \tag{4}$$

其中 $Q(t)=\delta(1-p)^{\gamma}\rho(t)\left(\dfrac{F\left(\sigma(t,d)\right)}{R(t)}\right)^{\gamma}\int_c^d q(t,\xi)\mathrm{d}\xi$，$R(t)=\int_{t_0}^t\left[a(s)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}s$，$F(t)=\int_{t_0}^t R(s)\mathrm{d}s$。那么，方程(1)的任何解 $x(t)$ 或者是振动的或者 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。

证明：假设方程(1)存在非振动解 $x(t)$，则 $x(t)$ 为最终正解或最终负解.不失一般性，假设 $x(t)$ 为最终正解(若 $x(t)$ 为最终负解，用相同的方法得到同样的结论)。我们不妨假设对一切 $t\ge t_1\ge t_0$ 有，$x(t)>0$。

由引理 1 可知，$z(t)$ 有结构(I)或(II)或(III)，若 $z(t)$ 有结构(II)。那么由引理 2 有

$$\lim_{x\to\infty} x(t)=0.$$

下面我们分别讨论 $z(t)$ 具有结构(I)或结构(III)的情形。

情形 1：不妨假设当 $t\ge t_1$ 时 $z(t)$ 满足结构(I)，即：$z(t)>0, z'(t)>0, z''(t)>0$。

显然 $z(t)$ 是单调递增函数，且 $x(t)\le z(t)$。则有

$$\begin{aligned} x(t)&=z(t)-\int_a^b p(t,\mu)x(\tau(t,\mu))\mathrm{d}\mu \ge z(t)-\int_a^b p(t,\mu)z(\tau(t,\mu))\mathrm{d}\mu \\ &\ge z(t)-z(t)\int_a^b p(t,\mu)\mathrm{d}\mu \ge (1-p)z(t) \end{aligned}. \tag{6}$$

由假设条件得到

$$\left(a(t)(z''(t))^{\gamma}\right)' \le -\delta(1-p)^{\gamma}\left[z(\sigma(t,d))\right]^{\gamma} q_1(t).$$

由于 $a(t)(z''(t))^{\gamma}$ 是单调递减函数且 $t>s$ 时

$$a(t)(z''(t))^{\gamma} < a(s)(z''(s))^{\gamma}$$

即

$$\left(\frac{1}{a(s)}\right)^{1/\gamma} z''(t) < \left(\frac{1}{a(t)}\right)^{1/\gamma} z''(s), \tag{7}$$

两边同时对 s 在区间 $[t_0,t]$ 上积分，可得 $\left(\frac{z'(t)}{R(t)}\right)'<0$，则 $\frac{z'(t)}{R(t)}$ 是单调递减函数。因此，当 $t>s$ 时，有 $R(s)z'(t)\le R(t)z'(s)$，即对任意的 $t\ge s\ge t_1$，有

$$\frac{z'(s)}{z'(t)} \ge \frac{R(s)}{R(t)}. \tag{8}$$

将(8)式两边同时对 s 在区间 $[t_0,t]$ 上积分，可得 $z'(t)F(t)\le R(t)z(t)$，即

$$\frac{z(t)}{z'(t)} > \frac{F(t)}{R(t)}. \tag{9}$$

由(8)、(9)得：对任意的 $t\ge s\ge t_1$

$$\frac{z(s)}{z'(t)} = \frac{z(s)}{z'(s)}\frac{z'(s)}{z'(t)} \ge \frac{F(s)}{R(s)}\frac{R(s)}{R(t)} = \frac{F(s)}{R(t)}. \tag{10}$$

取 $u(t)=\rho(t)a(t)\left(\frac{z''(t)}{z'(t)}\right)^{\gamma}$，则有

$$u'(t)-\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}u(t) \le -\delta(1-p)^{\gamma}\rho(t)q_1(t)\left(\frac{F(\sigma(t,d))}{R(t)}\right)^{\gamma} - \gamma\rho(t)a(t)\left(\frac{z''(t)}{z'(t)}\right)^{\gamma+1}. \tag{11}$$

记

$$A(t)=\frac{\rho'(t)}{\rho(t)},\ B(t)=\gamma\left[\frac{1}{\rho(t)a(t)}\right]^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{12}$$

由(11)式，有

$$u'(t)-A(t)u(t)\le -Q(t)-B(t)u^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(t).$$

则对任意的 $t\ge t_1>t_0$ 有

$$\int_{t_1}^{t}H(t,s)Q(s)\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t}h(t,s)H^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}(t,s)u(s)\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t}H(t,s)B(s)u^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(s)\mathrm{d}s\le H(t,t_1)u(t_1). \tag{13}$$

而

$$\begin{aligned}&h(t,s)H^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}(t,s)u(s)+H(t,s)B(s)u^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(s)\\&=h(t,s)H^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}(t,s)u(s)+B(s)\left[H^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}(t,s)u(s)\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}.\end{aligned}$$

令 $F(t,s)=H^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}(t,s)u(s)$，由 Young 不等式得

$$\frac{\left[B^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}(s)F(t,s)\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}{\frac{\gamma+1}{\gamma}}+\frac{\left[\gamma B^{-\frac{\gamma}{\gamma+1}}(s)\frac{h(t,s)}{\gamma+1}\right]^{\gamma+1}}{\gamma+1}\ge\frac{\gamma}{\gamma+1}|h(t,s)|F(t,s),$$

$$\text{即 } B(s)F^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(t,s)+\frac{\rho(s)a(s)h^{\gamma+1}(t,s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\ge|h(t,s)|F(t,s). \tag{14}$$

联立(13)式，有

$$\int_{t_1}^{t}\left[H(t,s)Q(s)-\frac{\rho(s)a(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}h^{\gamma+1}(t,s)\right]\mathrm{d}s\le H(t,t_1)u(t_1)-\int_{t_1}^{t}\left[h(t,s)+|h(t,s)|\right]H(t,s)\mathrm{d}s. \tag{15}$$

利用 H 的单调性，对任意 $t\ge t_1>t_0$

$$\int_{t_1}^{t}\left[H(t,s)Q(s)-\frac{\rho(s)a(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}h^{\gamma+1}(t,s)\right]\mathrm{d}s\le H(t,t_0)u(t_1).$$

因而可得如下不等式：

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\left[H(t,s)Q(s)-\frac{\rho(s)a(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}h^{\gamma+1}(t,s)\right]\mathrm{d}s\le u(t_1).$$

这与(4)矛盾。

情形 2：假设当 $t\ge t_1>t_0$ 时，$z(t)$ 满足结构(III)，即：$z(t)>0,z'(t)>0,z''(t)<0$。

同情形 1，由于 $a(t)(z''(t))^{\gamma}$ 是单调递减函数，则当 $t>s$ 时有

$$a(t)(z''(t))^{\gamma}<a(s)(z''(s))^{\gamma}$$

即：

$$\left(\frac{1}{a(s)}\right)^{1/\gamma}z''(t)<\left(\frac{1}{a(t)}\right)^{1/\gamma}z''(s),$$

两边同时对 s 在区间 $[t_0,t]$ 上积分，可得 $\left(\frac{z'(t)}{R(t)}\right)' < 0$，则 $\frac{z'(t)}{R(t)}$ 是单调递减函数，即

$$\frac{z'(s)}{R(s)} \geq \frac{z'(t)}{R(t)}. \tag{16}$$

由(6)，(9)得

$$x(t) \geq (1-p)z(t) \geq (1-p)\frac{F(t)}{R(t)}z'(t),$$

结合(16)，因而有

$$\begin{aligned}\left(a(t)\left[z''(t)\right]^{\gamma}\right)' &\leq -\delta\int_c^d q(t,\xi)\left[x(\sigma(t,\xi))\right]^{\gamma}\mathrm{d}\xi \\ &\leq -\delta(1-p)^{\gamma}\left[\frac{z'(\sigma(t,d))}{R(\sigma(t,d))}\right]^{\gamma}\left[F(\sigma(t,d))\right]^{\gamma}q_1(t). \\ &\leq -\delta(1-p)^{\gamma}\left[\frac{F(\sigma(t,d))}{R(t)}\right]^{\gamma}\left[z'(t)\right]^{\gamma}q_1(t)\end{aligned}$$

用情形(1)取 $u = \rho(t)a(t)\left[\frac{z''(t)}{z'(t)}\right]^{\gamma}$，则有

$$u'(t) \leq \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}u(t) - Q(t) - \gamma\rho(t)a(t)\left[\frac{z''(t)}{z'(t)}\right]^{\gamma+1} \leq A(t)u(t) - Q(t) - B(t)u^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(t).$$

类似于情形 1 的证明，我们可以得到与(4)矛盾，因此方程(1)振动。■

定理 2 若假设条件及(3)成立，并且存在 $\rho \in C^1\left([t_0,+\infty),R^+\right), \varphi \in \left([t_0,+\infty),R\right), H \in X$，对任意 $T \geq t_0$ 有

$$0 < \inf_{s\geq T}\left[\liminf_{t\to+\infty}\frac{H(t,s)}{H(t,T)}\right] \leq +\infty, \tag{17}$$

$$\limsup_{t\to+\infty}\int_T^t\left[\frac{a(s)\rho(s)}{H(t,T)}h^{\gamma+1}(t,s)\right]\mathrm{d}s < +\infty. \tag{18}$$

并且

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t\left[H(t,s)Q(s) - \frac{\rho(s)a(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}h^{\gamma+1}(t,s)\right]\mathrm{d}s \geq \varphi(T), \tag{19}$$

$$\limsup_{t\to+\infty}\int_T^t\left[\frac{(\varphi_+(s))^{\gamma+1}}{\rho(s)a(s)}\right]^{1/\gamma}\mathrm{d}s = +\infty, \tag{20}$$

其中 Q 如定理 1 所定义，$\varphi_+(s) = \max\{\varphi(s),0\}$，则方程(1)的解振动或趋于零。

证明：**情形 1**：若 $z(t)$ 满足结构(I)，由假设对任意的 $t_1 \geq t_0$

$$\varphi_1(t_1) \leq \limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{H(t,t_1)}\int_{t_1}^t\left[H(t,s)Q(s) - \frac{\rho(s)a(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}h^{\gamma+1}(t,s)\right]\mathrm{d}s$$

根据定理 1 的证明中定义 $B(t)$ 如(12)及 $G(t,s)=\frac{a(s)\rho(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}h^{\gamma+1}(t,s)$，由(13)有

$$\varphi_1(t_1)\le u_1(t_1)-\liminf_{t\to+\infty}\frac{1}{H(t,t_1)}\int_{t_1}^{t}\left[h(t,s)H^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}(t,s)u(s)+H(t,s)B(s)u^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(s)+G(s)\right]\mathrm{d}s,$$

则

$$\begin{aligned}&\liminf_{t\to+\infty}\frac{1}{H(t,t_1)}\int_{t_1}^{t}\left[h(t,s)H^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}(t,s)u(s)+H(t,s)B(s)u^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(s)+G(s)\right]\mathrm{d}s,\\&\le u_1(t_1)-\varphi_1(t_1)<\infty\end{aligned}\tag{21}$$

由(15)，有 $\forall t_1>t_0$ 有：$u_1(t_1)-\varphi_1(t_1)\ge 0$。

记

$$\begin{aligned}\alpha(t)&=\frac{1}{H(t,t_1)}\int_{t_1}^{t}h(t,s)H^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}(t,s)u(s)\mathrm{d}s,\\ \beta(t)&=\frac{1}{H(t,t_1)}\int_{t_1}^{t}H(t,s)B(s)u^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(s)\mathrm{d}s\end{aligned}.$$

由(19)、(21)，则有

$$\liminf_{t\to+\infty}\left[\alpha(t)+\beta(t)\right]<\infty.\tag{22}$$

现在假设

$$\frac{1}{\gamma}\int_{t_1}^{\infty}B(s)u^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(s)\mathrm{d}s=\int_{t_1}^{\infty}\left[\frac{u^{\gamma+1}(s)}{\rho(s)a(s)}\right]^{1/\gamma}\mathrm{d}s=+\infty,\tag{23}$$

由假设可知，存在 $\theta>0$，使得

$$\liminf_{t\to+\infty}\frac{H(t,s)}{H(t,t_0)}>\theta.\tag{24}$$

由(23)式可知，对任意正常数 η，存在 $T_1>t_1$，使得对任意 $t\ge T_1$ 有

$$\int_{t_1}^{t}B(s)u^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(s)\mathrm{d}s\ge\frac{\eta}{\theta}.$$

那么，对任意的 $t\ge T_1$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{H(t,t_1)}\int_{t_1}^{t}H(t,s)B(s)u^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(s)\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{H(t,t_1)}\int_{t_1}^{t}H(t,s)\mathrm{d}\left[\int_{t_1}^{s}B(\xi)u^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\\&=\frac{1}{H(t,t_1)}\int_{t_1}^{t}\left[\int_{t_1}^{s}\frac{u^{\gamma+1}(\xi)}{\rho(\xi)a(\xi)}\mathrm{d}\xi\right]\left[-\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}\right]\mathrm{d}s\\&\ge\frac{\eta}{\theta}\frac{1}{H(t,t_1)}\int_{T_1}^{t}\left[-\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}\right]\mathrm{d}s=\frac{\eta}{\theta}\frac{H(t,T_1)}{H(t,t_1)}\ge\frac{\eta}{\theta}\frac{H(t,T_1)}{H(t,t_0)}\end{aligned}.$$

由(22)式可知，存在一个$T > T_1$。使得对任意的$t \ge T$，有

$$\frac{H(t,T_1)}{H(t,t_0)} \ge \theta.$$

故

$$\frac{1}{H(t,t_1)}\int_{t_1}^{t} H(t,s)\frac{u^{\gamma+1}(s)}{\rho(s)a(s)}\mathrm{d}s \ge \eta.$$

由于η是任意正常数，因此

$$\liminf_{t\to+\infty}\frac{1}{H(t,t_1)}\int_{t_1}^{t} H(t,s)B(s)u^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(s)\mathrm{d}s = +\infty.$$

又完全类似[4]，有

$$\liminf_{t\to+\infty}\left[\alpha(t)+\beta(t)\right] = +\infty.$$

这与(22)矛盾，所以

$$\frac{1}{\gamma}\int_{t_1}^{+\infty} B(s)u^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(s)\mathrm{d}s = \int_{t_1}^{+\infty}\left[\frac{u^{\gamma+1}(s)}{\rho(s)a(s)}\right]^{\frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}s < +\infty. \tag{25}$$

由(20)式

$$\int_{t_1}^{+\infty}\left[\frac{\varphi_+^{\gamma+1}(s)}{\rho(s)a(s)}\right]^{1/\gamma}\mathrm{d}s < \int_{t_1}^{+\infty}\left[\frac{u^{\gamma+1}(s)}{\rho(s)a(s)}\right]^{1/\gamma}\mathrm{d}s < +\infty.$$

这与(19)式矛盾。

情形 2：假设$z(t)$满足结构(III)，由定理 1 的证明结果与情形 1 的证明类似，我们可以得到相应的结论。 ■

基金项目

长沙理工大学研究生科研创新项目(No: cx2016ss18)资助。

参考文献 (References)

[1] Aktas, M.F., Tiryaki, A. and Zafer, A. (2010) Oscillation Criteria for Third Order Nonlinear Functional Differential Equations. *Applied Mathematics Letters*, **23,** 756-762. https://doi.org/10.1016/j.aml.2010.03.003

[2] Grace, S.R., Agarwal, R.P., Pavani, R. and Thandapani, E. (2008) On the Oscillation of Certain Third Order Nonlinear Functional Differential Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **202,** 102-112. https://doi.org/10.1016/j.amc.2008.01.025

[3] Grace, S.R., Agarwal, R.P. and Aktas, M.F. (2008) On the Oscillation of Third Order Functional Differential Equations. *Communications in Applied Analysis*, **42**, 203-222.

[4] Qin, G., Huang, C., Xie, Y. and Wen, F. (2013) Asymptotic Behavior for Third-Order Quasi-Linear Differential Equations. *Advances in Difference Equations*, **2013,** 305. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-305

[5] 仉志余, 王晓霞, 俞元洪. 三阶中立型分布时滞微分方程的振动定理[J]. 工程数学学报, 2013, 30(6): 871-880.

[6] 龙程, 刘轶, 谢永钦. 一类非线性中立型微分方程解的渐近行为[J]. 数学理论与应用, 2017, 录用待发.

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org