

Based on the Catenary Equation Analysis of the Mooring System State

Yingxue Guo¹, Qing Yao², Yifeng Fan³, Zongjun Li⁴, Xingkui Fan⁴

¹Department College of Mechanical Engineering, Qingdao University of Technology, Qingdao Shandong

²Department College of Automobile and Traffic Engineering, Qingdao University of Technology, Qingdao Shandong

³Department College of Computer Engineering, Qingdao University of Technology, Qingdao Shandong

⁴Department College of Science, Qingdao University of Technology, Qingdao Shandong

Email: 1392290558@qq.com

Received: May 6th, 2017; accepted: May 21st, 2017; published: May 27th, 2017

Abstract

According to adjusting the type and length of the anchor chain model, and mass of the ball, the draft depth and moving area and the minimum value of the inclined angle of the buoy are determined. This article is divided into two parts to make a systematic study on the design of mooring system. Firstly, in the case of single parameter change, using the method of isolation to make the force analysis towards each structure of the transmission node in turn, the anchor chain can be regarded as a catenary, and Taylor series expansion is used for formula processing. Secondly, in the comprehensive consideration of the balance conditions of wind, drag force and water depth, the balance conditions of force and torque are established to determine the type of anchor chain model, length and weight of the ball, and analyze the tilt angle of steel drum and steel pipe, anchor's shape, and draft depth and moving area of buoy under different parameters. Finally, using MATLAB to write algorithm of each nonlinear equations and provide graphic description, and has carried on the reasonable test and objective advantages and disadvantages evaluation about whole model, and the promotion in other areas, and has put forward the improvement on stress analysis, improve the practicability and reality of the model.

Keywords

Mooring System, Catenary Equation, Taylor Series Expansion, Static Equilibrium

基于悬链线方程的系泊系统状态分析

郭迎雪¹, 姚 晴², 樊懿锋³, 李宗军⁴, 范兴奎⁴

¹青岛理工大学机械工程学院, 山东 青岛

²青岛理工大学汽车与交通学院, 山东 青岛

³青岛理工大学计算机工程学院, 山东 青岛

⁴青岛理工大学理学院, 山东 青岛
Email: 1392290558@qq.com

收稿日期: 2017年5月6日; 录用日期: 2017年5月21日; 发布日期: 2017年5月27日

摘要

根据调整锚链的型号、长度和重物球的质量, 确定浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角度的极小值。本文分为两个部分对系泊系统的设计作系统的研究。首先, 在考虑单一参数变化的情况下, 运用隔离法依次对传输节点的各个结构进行受力分析, 其中, 锚链可近似看成一条悬链线, 利用泰勒级数展开进行公式处理。其次, 在综合考虑风力、水流力和水深的情况下, 由力和力矩的平衡条件建立模型, 确定出锚链型号、长度、重物球的质量, 并分析求解不同参数变化下钢桶、钢管的倾角, 锚链形状, 浮标的吃水深度和游动区域。最后, 运用MATLAB对各个非线性方程组编写算法以及提供图形描述, 并对整个模型进行了合理性检验与客观的优缺点评价, 以及在其他领域的推广使用, 并提出了在受力分析上的改进, 提高了模型的实用性与现实性。

关键词

系泊系统, 悬链线方程, 泰勒级数展开, 静力平衡

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

目前常见的海洋结构物定位方法有两种: 一为动力定位, 二为用锚链系泊定位。但是锚链系泊定位由于其结构简单、工作安全可靠、经济性好等优点, 成为在海洋中对移动式海洋结构物定位的主要形式。目前在海上油田开发、船舶防风以及援救打捞作业场布置中都有十分广泛的应用。在舰艇防风方面, 单点系泊具有安全度高、位置精确、标志明显、系泊方便等特点, 在援救打捞作业场布置中, 利用浮筒系泊系统, 给救援工作的开展既能节省时间提高效率, 又能提高系统的稳定性, 尤其对救援周期比较长、需频繁进出作业场的情况, 其优点就特别明显。2016年全国大学生数学建模竞赛A题是通过确定在不同条件下锚链的型号、长度和重物球的质量, 使得浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角度尽可能小, 从而实现对系泊系统状态的分析。本文基于悬链线方程, 在对锚链的处理中, 将其近似看成一条悬链线, 并利用泰勒级数展开进行公式处理。同时以分析系泊系统的静力平衡状态为主线, 逐步建立理论递推模型。

2. 单个参数变化时的理论递推模型

漂浮于海平面上的浮标, 在恒定的风力作用下将产生漂移运动, 但由于系泊系统的牵制作用, 浮标漂移至一定距离后, 一定会处于某一静力平衡状态[1]。假设浮标在海平面上的运动为定常和慢漂运动, 忽略系泊系统本身的动态效应。可以运用隔离法依次对传输节点各个结构进行受力分析, 其中将上面的钢桶和钢管分别作为刚体来处理, 将下部的锚链简化为悬链线, 画出各自对应的受力分析图, 并列静力平衡方程组。每个结构所求的变量夹角均可以用浮标的倾斜角度和吃水深度 h_c 表示出来, 为了避免复

杂性, 可以将这些方程提取出来, 再构造一投影方程与之联立。符号说明见表 1。

首先对浮标进行受力分析。假设系泊系统对浮标的拉力始终与浮标的轴线平行, 以浮标质心为原点建立平面直角坐标系, 具体受力见图 1。由图 1 可列静力平衡方程:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & F_N - F_{x1} = 0 \\ \sum F_y = 0 & F_F - F_{y1} - G = 0 \end{cases}$$

其中, $F_N = 0.625 \cdot S \cdot v^2$, S 为物体在风向法平面的投影面积, v 为风速。由于浮标迎风面可近似认为是矩形, 故 $S = 2r(h - h_1) \sin \alpha$ 。

对于浮力: $F_F = \rho_h g V_p$, $V_p = \frac{1}{2}(h_1 + h_2) S_d$, $S_d = \pi r^2$, $h_2 = h_1 + \frac{2r}{\tan \alpha}$, V_p 为浮标排开水的体积, h 为浮标总高度, h_1 、 h_2 见图 1 所示, r 为浮标底面圆半径, S_d 为浮标的底面面积。

根据以上公式, 可求得:

$$\begin{cases} F_{y1} = \frac{\pi g \rho_h h_c r^2}{\sin \alpha} - G \\ F_{x1} = 1.25 r v^2 (h \sin \alpha - h_c + r \cos \alpha) \end{cases} \quad (1)$$

故,

$$\tan \alpha = \frac{F_{y1}}{F_{x1}} = \frac{\frac{\pi g \rho_h h_c r^2}{\sin \alpha} - G}{1.25 r v^2 (h \sin \alpha - h_c + r \cos \alpha)} \quad (2)$$

对钢管 1 进行受力分析。其受力为浮力 F_{F1} 、重力 G_1 、拉力 T'_1 与 T_2 , 钢管 1 的倾角为 α_1 。以钢管 1 的质心为坐标原点, 建立平面直角坐标系, 具体受力见图 2。

由图 2 可列静力平衡方程:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & F'_{x1} - F_{x2} = 0 \\ \sum F_y = 0 & F_{F1} + F'_{y1} - F_{y2} - G_1 = 0 \\ \sum M_O = 0 & \frac{l}{2}(F'_{y1} + F_{y2}) \sin \alpha_1 - \frac{l}{2}(F'_{x1} + F_{x2}) \cos \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

其中, $F_{F1} = \rho_h g V_{p1}$, V_{p1} 为钢管 1 排开水的体积。

由此可求得:

$$\begin{cases} F_{x2} = F'_{x1} \\ F_{y2} = F'_{y1} + \rho_h g V_{p1} - G_1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} = \frac{F'_{x1} + F_{x2}}{F'_{y1} + F_{y2}} = \frac{2F'_{x1}}{F'_{y1} + \rho_h g V_{p1} - G_1}$$

因为 F'_{x1} 与 F_{x1} 、 F'_{y1} 与 F_{y1} 互为作用力与反作用力, 大小相等、方向相反, 由公式(1)得:

$$\tan \alpha_1 = \frac{2.5 r v^2 (h \sin \alpha - h_c + r \cos \alpha)}{\frac{2 \pi g \rho_h h_c r^2}{\sin \alpha} - 2G + \rho_h g V_{p1} - G_1} \quad (4)$$

同理, 对钢管 2、3、4 进行受力分析, 其受力分析图、所列静力平衡方程均与钢管 1 的相似, 在此不再赘述, 所求结果分别为:

Table 1. Symbol description
表 1. 符号说明

符号	说明
$\alpha_i (i = 1, 2, 3, 4)$	第 i 节钢管的倾斜角度
α_5	钢桶的倾斜角度
h_c	浮标的吃水深度
ρ_h	海水的密度

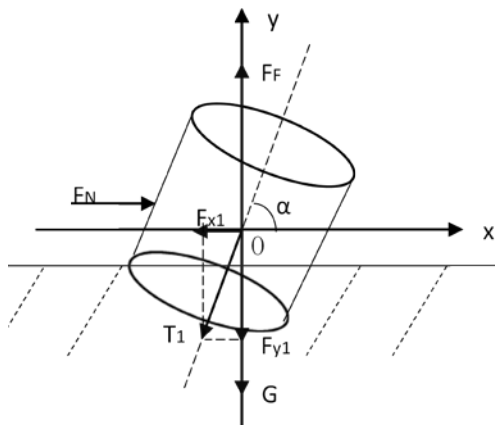


Figure 1. The stress analysis diagram of buoy
图 1. 浮标受力分析图

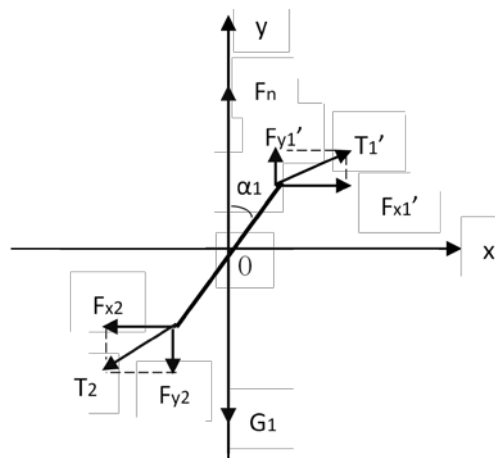


Figure 2. The stress analysis diagram of steel pipe 1
图 2. 钢管 1 受力分析图

对钢管 2 有:

$$\begin{cases} F_{x3} = F'_{x2} \\ F_{y3} = F'_{y2} + \rho_h g V_{p2} - G_2 \end{cases} \quad (5)$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{2.5rv^2(h \sin \alpha - h_c + r \cos \alpha)}{2(\pi g \rho_h h_c r^2 / \sin \alpha + \rho_h g V_{p1} - G - G_1) + \rho_h g V_{p2} - G_2} \quad (6)$$

对钢管 3 有:

$$\begin{cases} F_{x4} = F'_{x3} \\ F_{y4} = F'_{y3} + \rho_h g V_{p3} - G_3 \end{cases} \quad (7)$$

$$\tan \alpha_3 = \frac{2.5rv^2(h \sin \alpha - h_c + r \cos \alpha)}{2(\pi g \rho_h h_c r^2 / \sin \alpha + \rho_h g V_{p1} + \rho_h g V_{p2} - G - G_1 - G_2) + \rho_h g V_{p3} - G_3} \quad (8)$$

对钢管 4 有:

$$\begin{cases} F_{x5} = F'_{x4} \\ F_{y5} = F'_{y4} + \rho_h g V_{p4} - G_4 \end{cases} \quad (9)$$

$$\tan \alpha_4 = \frac{2.5rv^2(h \sin \alpha - h_c + r \cos \alpha)}{2(\pi g \rho_h h_c r^2 / \sin \alpha + \rho_h g V_{p1} + \rho_h g V_{p2} + \rho_h g V_{p3} - G - G_1 - G_2 - G_3) + \rho_h g V_{p4} - G_4} \quad (10)$$

对钢桶进行受力分析。其受力为浮力 F_{F5} 、重力 G_5 、拉力 T'_5 与 T_6 ，重物球对其的拉力 G'_5 ，钢桶的倾角为 α_5 。以钢桶的质心为坐标原点，建立平面直角坐标系，具体受力见图 3。忽略重物球的浮力，其对钢桶的拉力即为自身的重力。

由图 3 可列静力平衡方程:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & F'_{x5} - F_{x6} = 0 \\ \sum F_y = 0 & F_{F5} + F'_{y5} - F_{y6} - G_5 - G'_5 = 0 \\ \sum M_o = 0 & \frac{l_1}{2}(F'_{y5} + F_{y6} + G'_5) \sin \alpha_5 - \frac{l_1}{2}(F'_{x5} + F_{x6}) \cos \alpha_5 = 0 \end{cases}$$

其中， $F_{F5} = \rho_h g V_{p5}$ ， V_{p5} 为钢桶排开水的体积。

由此可求得:

$$\begin{cases} F_{x6} = F'_{x5} \\ F_{y6} = F'_{y5} + \rho_h g V_{p5} - G_5 - G'_5 \end{cases} \quad (11)$$

$$\tan \alpha_5 = \frac{\sin \alpha_5}{\cos \alpha_5} = \frac{F'_{x5} + F_{x6}}{F'_{y5} + F_{y6} + G'_5} = \frac{2F'_{x5}}{2F'_{y5} + \rho_h g V_{p5} - G_5}$$

因为 F'_{x5} 与 F_{x5} 、 F'_{y5} 与 F_{y5} 互为作用力与反作用力，大小相等、方向相反，由公式(1)、公式(3)、公式(5)、公式(7)、公式(9)得:

$$\tan \alpha_5 = \frac{2.5rv^2(h \sin \alpha - h_c + r \cos \alpha)}{2(\pi g \rho_h h_c r^2 / \sin \alpha + \rho_h g V_{p1} + \rho_h g V_{p2} + \rho_h g V_{p3} + \rho_h g V_{p4} - G') + \rho_h g V_{p5} - G_5}$$

其中,

$$G' = G + G_1 + G_2 + G_3 + G_4 \quad (12)$$

对锚链进行受力分析。忽略其在水中的浮力，受到重力 G_6 、拉力 T'_6 与 T_7 ，锚链末端与锚的链接处的切线方向与海床的夹角为 α_6 。以锚链与锚的链接处为坐标原点，建立平面直角坐标系，具体受力见图 4。

由图 4 可列静力平衡方程:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & F'_{x6} - F_{x7} = 0 \\ \sum F_y = 0 & F'_{y6} - F_{y7} - G_6 = 0 \end{cases}$$

求得:

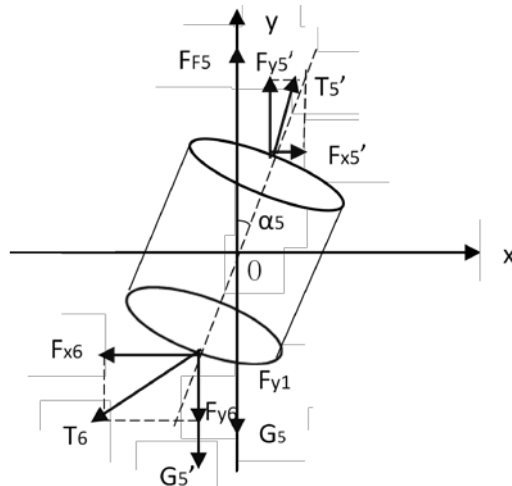


Figure 3. The stress analysis diagram of steel drum
图 3. 钢桶受力分析图

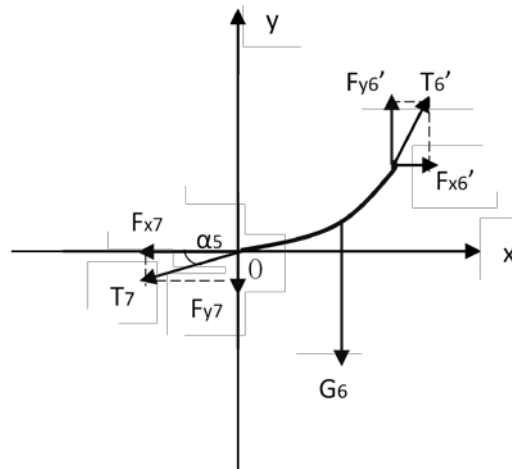


Figure 4. The stress analysis diagram of anchor chain
图 4. 锚链受力分析图

$$\begin{cases} F_{x7} = F'_{x6} \\ F_{y7} = F'_{y6} - G_6 \end{cases} \quad (13)$$

因为 F'_{x6} 与 F_{x6} 、 F'_{y6} 与 F_{y6} 互为作用力与反作用力，大小相等、方向相反，由公式(1)、公式(3)、公式(5)、公式(7)、公式(9)、公式(11)得：

$$\tan \alpha_6 = \frac{F_{y7}}{F_{x7}} = \frac{\pi g \rho_h h_c r^2 / \sin \alpha + \rho_h g V_{p1} + \rho_h g V_{p2} + \rho_h g V_{p3} + \rho_h g V_{p4} + \rho_h g V_{p5} - G' - G_5 - G'_5 - G_6}{1.25 r v^2 (h \sin \alpha - h_c + r \cos \alpha)} \quad (14)$$

锚链曲线方程可近似为悬链线方程[2] [3]，即

$$y = \frac{H}{\rho} \left[\sec \alpha_6 \left(\cosh \frac{x \cdot \rho}{H} - 1 \right) + \tan \alpha_6 \cdot \sinh \frac{x \cdot \rho}{H} \right] \quad (15)$$

其中 ρ 为锚链的线密度， H 为最低点处受水平向左的拉力。

对悬链线方程进行求导以及利用弧长公式整理得：

$$b = 44.1 + H \left[\frac{\sin \alpha - \sinh\left(\frac{2b\rho}{H}\right) + \frac{\sinh\left(\frac{2b\rho}{H}\right)\cos^2 \alpha}{2} - \cosh\left(\frac{2b\rho}{H}\right)\sin \alpha}{\rho \cos^2 \alpha} \right] \quad (16)$$

令 $\frac{2b\rho}{H} = X$ ，根据泰勒公式对式(16)进行展开。

由 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$ ， $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{e^{-\theta x}}{(n+1)!}(-x)^{n+1}$ ，泰勒展开式中保留前三项得：

$$\sinh\left(\frac{2b\rho}{H}\right) = \sinh(X) = \frac{e^X - e^{-X}}{2} = X = \frac{2b\rho}{H}$$

$$\cosh\left(\frac{2b\rho}{H}\right) = \cosh(X) = \frac{e^X + e^{-X}}{2} = 1 + \frac{X^2}{2} = 1 + 2\left(\frac{b\rho}{H}\right)^2$$

将其带入公式(16)，整理得：

$$b = \sqrt{\frac{H^2}{4\sin^2 \alpha \cdot \rho^2} + \frac{22.05 \cos^2 \alpha \cdot H}{\sin \alpha \cdot \rho}} - \frac{H}{2\sin \alpha \cdot \rho} \quad (17)$$

当 $x = b$ 时，用泰勒展开近似求解为：

$$y = \frac{\rho \sec \alpha_6}{2H} \left(\sqrt{\frac{H^2}{4\sin^2 \alpha \cdot \rho^2} + \frac{22.05 \cos^2 \alpha \cdot H}{\sin \alpha \cdot \rho}} - \frac{H}{2\sin \alpha \cdot \rho} \right)^2$$

$$+ \sqrt{\frac{H^2}{4\sin^2 \alpha \cdot \rho^2} + \frac{22.05 \cos^2 \alpha \cdot H}{\sin \alpha \cdot \rho}} - \frac{H}{2\sin \alpha \cdot \rho} \tan \alpha_6$$

对整体进行受力分析可得：

$$H = F_N = 0.625 \times 2rv^2 (h - h_1) \sin \alpha$$

$$= 1.25rv^2 (h \sin \alpha - h_c + r \cos \alpha)$$

将锚链、钢桶、四节钢管、与浮标的吃水深度向竖直的 y 轴进行投影，得一投影方程：

$$\frac{\rho \sec \alpha_6}{2H} \left(\sqrt{\frac{H^2}{4\sin^2 \alpha \cdot \rho^2} + \frac{22.05 \cos^2 \alpha \cdot H}{\sin \alpha \cdot \rho}} - \frac{H}{2\sin \alpha \cdot \rho} \right)^2$$

$$+ \sqrt{\frac{H^2}{4\sin^2 \alpha \cdot \rho^2} + \frac{22.05 \cos^2 \alpha \cdot H}{\sin \alpha \cdot \rho}} - \frac{H}{2\sin \alpha \cdot \rho} \tan \alpha_6$$

$$+ l_1 \cos \alpha_5 + l (\cos \alpha_4 + \cos \alpha_3 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1) + h_c = 18 \quad (18)$$

其中 l_1 表示钢桶的长度， l 表示每节钢管的长度。

联立公式(2)、公式(4)、公式(6)、公式(8)、公式(10)、公式(12)、公式(14)、公式(18)，可得到非线性方程组。

由题目所给信息：

$$G = mg, \quad G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = m_1 g, \quad G_5 = m_2 g, \quad G'_5 = m_3 g, \quad G_6 = m_4 g,$$

$$H = F_N = 0.625 \times 2rv^2 (h - h_1) \sin \alpha = 1.25rv^2 (h \sin \alpha - h_c + r \cos \alpha),$$

$$\rho_h = 1.025 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad r = 1 \text{ m}, \quad h = 2 \text{ m}, \quad \rho = 7 \text{ kg/m}^3, \quad l = l_1 = 1 \text{ m},$$

$$m = 1000 \text{ kg}, m_1 = 10 \text{ kg}, m_2 = 100 \text{ kg}, m_3 = 1200 \text{ kg}, m_4 = 22.05 \times 7 = 154.35 (\text{kg}),$$

$$V_{p1} = V_{p2} = V_{p3} = V_{p4} = 0.025^2 \pi = 0.002 (\text{m}^3), V_{p5} = 0.15^2 \pi = 0.071 (\text{m}^3)$$

利用 MATLAB [4] 对以上 8 个公式组成的非线性方程组编程求解。

对于 12 m/s 风速对应的求解：对应于上述非线性方程组的所有未知数的取值见表 2。

将所求得的数据带入公式(15)，可得锚链形状为：

$$y = 92.07 \cosh(0.012x) - 92.07 + 3.8 \sinh(0.012x)$$

利用 MATLAB 绘出其图形[5]，见图 5。

浮标的移动区域为一半径为 R 的圆，由公式(17)求得 $b = 8.45 \text{ m}$ ；四节钢管与钢桶在水平面上的投影长度为：

$$b_1 = l_1 \sin \alpha_5 + l(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \sin \alpha_3 + \sin \alpha_4) = 0.0921 \text{ m}, b_2 = \frac{h_c}{\tan \alpha} = 0.0858 \text{ m},$$

$R = b + b_1 + b_2 = 8.8 \text{ m}$ ，故浮标的移动区域为 $R = 8.8 \text{ m}$ 的圆。

对于 24 m/s 风速对应的求解：对应于上述非线性方程组的所有未知数的取值见表 3。

将所求得的数据带入公式(15)，可得锚链形状为：

$$y = 125.6 \cosh(0.008x) - 125.6 + 22 \sinh(0.008x)$$

利用 MATLAB 绘出其图形，见图 6。

浮标的移动区域为一半径为 R 的圆，由公式(17)求得 $b = 13.7 \text{ m}$ ；四节钢管与钢桶在水平面上的投影长度为：

$$b_1 = l_1 \sin \alpha_5 + l(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \sin \alpha_3 + \sin \alpha_4) = 0.26 \text{ m}, b_2 = \frac{h_c}{\tan \alpha} = 0.13 \text{ m},$$

$R = b + b_1 + b_2 = 14.09 \text{ m}$ ，故浮标的移动区域为 $R = 14.09 \text{ m}$ 的圆。

对于 36 m/s 风速对应的求解：对应于上述非线性方程组的所有未知数的取值见表 4。

Table 2. The resulting data of 12 m/s wind speed

表 2. 12 m/s 风速对应的结果

α/rad	α_1/rad	α_2/rad	α_3/rad	α_4/rad	α_5/rad	α_6/rad	h_c/m
1.4673	0.0181	0.0182	0.0183	0.0184	0.0191	0.4260	0.8256
84.07°	1.037°	1.043°	1.049°	1.054°	1.094°	24.41°	0.8256

Table 3. The resulting data of 24 m/s wind speed

表 3. 24 m/s 风速对应的结果

α/rad	α_1/rad	α_2/rad	α_3/rad	α_4/rad	α_5/rad	α_6/rad	h_c/m
1.4325	0.0508	0.0509	0.0510	0.0511	0.0551	0.1765	0.9168
82.08°	2.91°	2.92°	2.92°	2.93°	3.16°	10.11°	0.9168

Table 4. The resulting data of 36 m/s wind speed

表 4. 36 m/s 风速对应的结果

α/rad	α_1/rad	α_2/rad	α_3/rad	α_4/rad	α_5/rad	α_6/rad	h_c/m
0.4429	0.1280	0.1287	0.1293	0.1299	0.1374	0.9065	0.2526
25.39°	7.34°	7.38°	7.41°	7.45°	7.82°	51.62°	0.2526

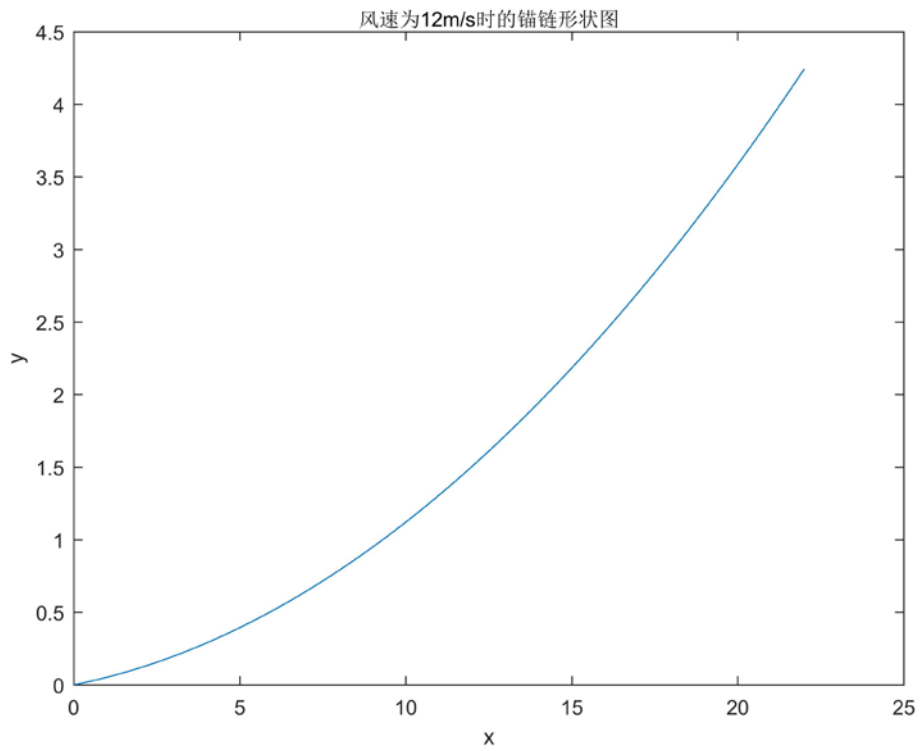


Figure 5. 12 m/s: The shape of the anchor chain
图 5. 风速为 12 m/s 时的锚链形状示意图

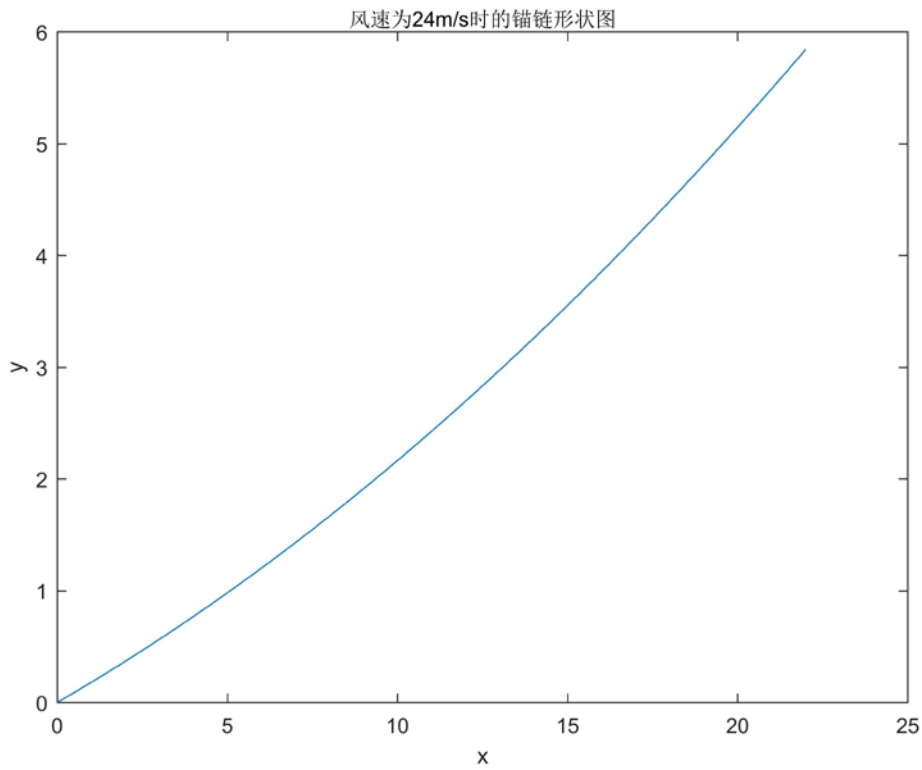


Figure 6. 24 m/s: The shape of the anchor chain
图 6. 风速为 24 m/s 时的锚链形状示意图

将所求得的数据带入公式(15), 可得锚链形状为:

$$y = 561.7 \cosh(0.003x) - 561.7 + 440 \sinh(0.003x)$$

浮标的移动区域为一半径为 R 的圆, 由公式(17), 求得 $b = 17.27 \text{ m}$; 四节钢管与钢桶在水平面上的投影长度为:

$$b_1 = l_1 \sin \alpha_5 + l(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \sin \alpha_3 + \sin \alpha_4) = 0.548 \text{ m}, \quad b_2 = \frac{h_c}{\tan \alpha} = 0.53 \text{ m},$$

$R = b + b_1 + b_2 = 18.35 \text{ m}$, 故浮标的移动区域为 $R = 18.35 \text{ m}$ 的圆。

对钢桶和锚链分别进行受力分析, 根据所得的变量之间的关系表达式(见公式(12)、公式(14)、公式(2)), 结合题目要求即钢桶的倾斜角度不超过 5 度, 锚链在锚点与海床的夹角不超过 16 度。考虑其极限情况, 取等号可以得出钢桶的倾斜角与重物球质量的关系式。由此可得方程组(19)。

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \alpha_5 = \frac{2.5rv^2(h \sin \alpha - h_c + r \cos \alpha)}{2(\pi g \rho_g h_c r^2 / \sin \alpha + \rho_h g V_{p1} + \rho_h g V_{p2} + \rho_h g V_{p3} + \rho_h g V_{p4} - G') + \rho_h g V_{p5} - G_5} = \tan 5^\circ \\ \tan \alpha_6 = \frac{\pi g \rho_g h_c r^2 / \sin \alpha + \rho_h g V_{p1} + \rho_h g V_{p2} + \rho_h g V_{p3} + \rho_h g V_{p4} + \rho_h g V_{p5} - G' - G_5 - G_5' - G_6}{1.25rv^2(h \sin \alpha - h_c + r \cos \alpha)} = \tan 16^\circ \\ \tan \alpha = \frac{F_{y1}}{F_{x1}} = \frac{\frac{\pi g \rho_g h_c r^2}{\sin \alpha} - G}{1.25rv^2(h \sin \alpha - h_c + r \cos \alpha)} \end{array} \right. \quad (19)$$

通过 MATLAB 编程即可求解重物球质量不应小于 $M = 4930.6 \text{ kg}$ 。

3. 多个参数变化时的数学模型

为给出考虑风力、水流力和水深情况下的系泊系统设计, 分析不同情况下钢桶、钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域, 取风向与水流方向一致的情形进行分析, 当风速和水流速度同时达到最大值时, 各自相应的力也是最大值。对系泊系统采用“先整体后隔离”的思想, 对各个结构进行受力分析, 并列静力学平衡方程, 在第一个模型的基础上, 可推出模型二的非线性方程组[6] [7]。在风速, 水速达到极限值时, 考虑到水深在 16 m 到 20 m 之间, 不同型号对应的链长, 即可求出不同水深时所对应的钢桶、钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

我们取风的方向与水流方向一致的情形进行分析, 当风速和水流速度同时达到最大值时, 各自相应的力也是最大值。在综合考虑水流力的情况下, 即在只考虑风力 F_N 时对各个结构的受力分析的基础上, 又增加了一个过质心的水平方向的水流力 F_l 。可知, 在各个结构的平衡方程中, 力矩方程和竖直方向的方程均不改变, 只是水平方向的平衡方程发生了改变。因此:

浮标水平方向的平衡方程为: $F_{x1} = F_N + F_{t1}$

$$\text{四个钢管水平方向的平衡方程为: } \begin{cases} F_{x2} = F_N + F_{t1} + F_{t2} \\ F_{x3} = F_N + F_{t1} + F_{t2} + F_{t3} \\ F_{x4} = F_N + F_{t1} + F_{t2} + F_{t3} + F_{t4} \\ F_{x5} = F_N + F_{t1} + F_{t2} + F_{t3} + F_{t4} + F_{t5} \end{cases}$$

钢桶水平方向的平衡方程为: $F_{x6} = F_N + F_{t1} + F_{t2} + F_{t3} + F_{t4} + F_{t5} + F_{t6}$

锚链水平方向的平衡方程为: $F_{x7} = F_{x6}$

其中

$$\begin{cases} F_N = 0.625Sv^2 = 1.25rv^2 (h \sin \alpha - h_c + r \cos \alpha) \\ F_{i1} = 374S_1 \cdot v_i^2 = 374 \cdot 2r \cdot h_c \cdot v_i^2 \\ F_{i2} = 374 \cdot 2r_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot v_i^2 \\ F_{i3} = 374 \cdot 2r_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot v_i^2 \\ F_{i4} = 374 \cdot 2r_3 \cdot \cos \alpha_3 \cdot v_i^2 \\ F_{i5} = 374 \cdot 2r_4 \cdot \cos \alpha_4 \cdot v_i^2 \\ F_{i6} = 374 \cdot 2r_5 \cdot \cos \alpha_5 \cdot v_i^2 \end{cases},$$

且联立由仅考虑风速的公式(1), (3), (5), (7), (9), (11), (13), (18), 可推出综合考虑风速, 水流速度的非线性方程组(20)。其中, H_C 为布放海域的实测水深, $F'_F = \rho_h g V_{p1} + \rho_h g V_{p2} + \rho_h g V_{p3} + \rho_h g V_{p4}$, $r' \cos \alpha' = r_1 \cdot \cos \alpha_1 + r_2 \cdot \cos \alpha_2 + r_3 \cdot \cos \alpha_3 + r_4 \cdot \cos \alpha_4$, $G' = G + G_1 + G_2 + G_3 + G_4$, $H = 1.25r(h \sin \alpha - h_c + r \cos \alpha) \cdot v^2 + 748v_i^2(rh_c + r' \cos \alpha' + r_5 \cdot \cos \alpha_5)$ 。

考虑锚链型号与长度, 重物球的质量, 水深, 风速及水流速度在不同定值情况下, 由 MATLAB 编程可得钢桶及钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。进而比较风力、水流力和水深的不同情况下, 设计出合理的系泊系统。

对于 $v_1 = 36 \text{ m/s}$, $v_2 = 1.5 \text{ m/s}$, $H_C = 16 \sim 20 \text{ m}$, 我们考虑几个典型值的情况, 如下述所示:

- 1) $v = 36 \text{ m/s}$, $v_i = 1.5 \text{ m/s}$, $H_C = 18 \text{ m}$, $M = 4930.6 \text{ kg}$, $L = 22.05 \text{ m}$, II 型锚链,
- 2) $v = 36 \text{ m/s}$, $v_i = 1.5 \text{ m/s}$, $H_C = 20 \text{ m}$, $M = 4930.6 \text{ kg}$, $L = 22.05 \text{ m}$, II 型锚链,
- 3) $v = 36 \text{ m/s}$, $v_i = 1.5 \text{ m/s}$, $H_C = 20 \text{ m}$, $M = 4930.6 \text{ kg}$, $L = 22.05 \text{ m}$, V 型锚链,
- 4) $v = 36 \text{ m/s}$, $v_i = 1.5 \text{ m/s}$, $H_C = 18 \text{ m}$, $M = 4930.6 \text{ kg}$, $L = 22.05 \text{ m}$, V 型锚链。

由于此处与模型一的求解过程类似, 在此不再赘述所求结果。

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{F_{y1}}{F_{x1}} = \frac{\frac{\pi g \rho_h h_c r^2}{\sin \alpha} - G}{1.25rv^2 (h \sin \alpha - h_c + r \cos \alpha) + 748v_i^2 rh_c} \\ \tan \alpha_1 = \frac{F'_{x1} + F_{x2}}{F'_{y1} + F_{y2}} = \frac{2.5r(h \sin \alpha - h_c + r \cos \alpha) \cdot v^2 + 748v_i^2 (2rh_c + r_1 \cdot \cos \alpha_1)}{2(\pi g \rho_h h_c r^2 / \sin \alpha) - 2G + \rho_h g V_{p1} - G_1} \\ \tan \alpha_2 = \frac{F'_{x2} + F_{x3}}{F'_{y2} + F_{y3}} = \frac{2.5r(h \sin \alpha - h_c + r \cos \alpha) \cdot v^2 + 748v_i^2 (2rh_c + 2r_1 \cdot \cos \alpha_1 + r_2 \cdot \cos \alpha_2)}{2(\pi g \rho_h h_c r^2 / \sin \alpha + \rho_h g V_{p1} - G - G_1) + \rho_h g V_{p2} - G_2} \\ \tan \alpha_3 = \frac{F'_{x3} + F_{x4}}{F'_{y3} + F_{y4}} = \frac{2.5r(h \sin \alpha - h_c + r \cos \alpha) \cdot v^2 + 748v_i^2 (2rh_c + 2r_1 \cdot \cos \alpha_1 + 2r_2 \cdot \cos \alpha_2 + r_3 \cdot \cos \alpha_3)}{2(\pi g \rho_h h_c r^2 / \sin \alpha + \rho_h g V_{p1} + \rho_h g V_{p2} - G - G_1 - G_2) + \rho_h g V_{p3} - G_3} \\ \tan \alpha_4 = \frac{F'_{x4} + F_{x5}}{F'_{y4} + F_{y5}} = \frac{2.5r(h \sin \alpha - h_c + r \cos \alpha) \cdot v^2 + 748v_i^2 (2rh_c + 2r_1 \cdot \cos \alpha_1 + 2r_2 \cdot \cos \alpha_2 + 2r_3 \cdot \cos \alpha_3 + r_4 \cdot \cos \alpha_4)}{2(\pi g \rho_h h_c r^2 / \sin \alpha + \rho_h g V_{p1} + \rho_h g V_{p2} + \rho_h g V_{p3} - G - G_1 - G_2 - G_3) + \rho_h g V_{p4} - G_4} \\ \tan \alpha_5 = \frac{F'_{x5} + F_{x6}}{F'_{y5} + F_{y6}} = \frac{2.5r(h \sin \alpha - h_c + r \cos \alpha) \cdot v^2 + 748v_i^2 (2rh_c + 2r' \cos \alpha' + r_5 \cdot \cos \alpha_5)}{2(\pi g \rho_h h_c r^2 / \sin \alpha + F'_F - G') + \rho_h g V_{p5} - G_5} \\ \tan \alpha_6 = \frac{F_{y7}}{F_{x7}} = \frac{\pi g \rho_h h_c r^2 / \sin \alpha + F'_F + \rho_h g V_{p5} - G' - G_5 - G'_5 - G_6}{1.25r(h \sin \alpha - h_c + r \cos \alpha) \cdot v^2 + 748v_i^2 (rh_c + r' \cos \alpha' + r_5 \cdot \cos \alpha_5)} \\ \frac{\rho \sec \alpha_6}{2H} \left(\sqrt{\frac{H^2}{4 \sin^2 \alpha \cdot \rho^2} + \frac{22.05 \cos^2 \alpha \cdot H}{\sin \alpha \cdot \rho}} - \frac{H}{2 \sin \alpha \cdot \rho} \right)^2 + \sqrt{\frac{H^2}{4 \sin^2 \alpha \cdot \rho^2} + \frac{22.05 \cos^2 \alpha \cdot H}{\sin \alpha \cdot \rho}} - \frac{H}{2 \sin \alpha \cdot \rho} \tan \alpha_6 \\ + l_1 \cos \alpha_5 + l(\cos \alpha_4 + \cos \alpha_3 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1) + h_c = H_C \end{cases} \quad (20)$$

4. 算法描述

结合题目中所给的重物球的质量、锚链长度、锚链在锚点的夹角等数据,运用隔离法依次对传输节点的各个结构进行受力分析,用 AutoCAD 画出对应的受力图,并列静力平衡方程,从中提取出每个结构所求的变量倾角关于浮标的倾斜角度 α 和吃水深度 h_c 的方程共 7 个。其中,锚链可近似看成一条悬链线,利用泰勒级数展开得到锚链最高点横坐标表达式。构造一竖直面投影方程与提取出的 7 个方程联立成非线性方程组,计算出浮标吃水深度、锚点的水平力和竖直力的大小,且数值求解在不同风速下锚链对应的悬链线方程式。

其次,调节弧长,令第三段悬链线的末端与浮标下端高度相等,数值求解合适的重物球的质量。在综合考虑风力、水流力和水深的情况下,由力和力矩的平衡条件建立模型,确定出锚链型号、长度、重物球的质量,并分析求解出不同参数变化下钢桶、钢管的倾角,锚链形状,浮标的吃水深度和游动区域。

最后,运用 MATLAB 对各个非线性方程组编写算法以及提供图形描述,并对整个模型进行了合理性检验与客观的优缺点评价,以及在海上油田开发、船舶防风以及援救打捞作业场布置中的推广使用。

5. 总结

本文核心思路是基于悬链线方程,在对锚链的处理中,将其近似看成一条悬链线,并利用泰勒级数展开进行公式处理。同时以分析系泊系统的静力平衡状态为主线,逐步建立理论递推模型。

在考虑多个参数变化的情况,即更接近于实际情况时:首先,分析者告知选用重物球的质量 M ,水深 H ,锚链的型号以及长度,风速 v ,由此可代入所得非线性方程组(20),运用 MATLAB 中的 fsolve 函数即可求解,得出对应情况下的钢桶及钢管的倾斜角度,浮标的吃水深度 h_c ;然后借助公式

$b = \sqrt{\frac{H^2}{4 \sin^2 \alpha \cdot \rho^2} + \frac{22.05 \cos^2 \alpha \cdot H}{\sin \alpha \cdot \rho}} - \frac{H}{2 \sin \alpha \cdot \rho}$ 求出锚链的在水平面的投影长度,同时借助公式

$b_1 = l_1 \sin \alpha_5 + l(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \sin \alpha_3 + \sin \alpha_4)$ 和公式 $b_2 = \frac{h_c}{\tan \alpha}$, 求出四节钢管与钢桶在水平面上的投影长度 b_1 和 b_2 , 进而利用公式 $R = b + b_1 + b_2$, 求出浮标的移动区域为 R 的圆;在此基础上,最后借助于公式

$y = \frac{H}{\rho} \left[\sec \alpha_6 \left(\cosh \frac{x \cdot \rho}{H} - 1 \right) + \tan \alpha_6 \cdot \sinh \frac{x \cdot \rho}{H} \right]$, 求出对应条件下的锚链形状,运用 MATLAB 编写程序即可绘制出锚链对应的图形。

本文中的模型通过对单个物体进行受力分析,利用简单力学知识求解未知变量,方法简单且准确程度较高。同时在列举静力平衡方程时不会漏掉未知力,考虑较为全面。采用受力分析图与静力平衡方程相结合的方法,使得分析更加直观明了。

基金项目

山东省本科高校教学改革研究面上项目(2015M091);山东省教育科学“十二五”规划 2015 年度高等教育学科教学专项课题(CBS15010)。

参考文献 (References)

- [1] 姚恩瑜. 理论力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2009.
- [2] 胡灵斌, 唐军. 悬链线方程的求解及其应用[J]. 文学研究, 2004(1): 17-20.
- [3] 韩伟, 刘汉明. 单点系泊系统研究综述[C]. 中国航海学会救捞专业委员会 2009 年年会暨救捞发展论坛论文集, 2009: 267-270.
- [4] 张志涌, 杨祖樱. MATLAB 教程[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2010.
- [5] 贺超英. MATLAB 应用与实验教程[M]. 北京: 电子工业出版社, 2010.
- [6] 卓金武. MATLAB 在数学建模中的应用[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2010.
- [7] Meerschaert, M.M. 数学建模方法与分析[M]. 北京: 机械工业出版社, 2016.

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：aam@hanspub.org