Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(3), 317-326
Published Online May 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.63037

Exact Multiplicity of Positive Solutions for Convex-Concave-Convex Nonlinearities

Zirao Huang, Dingyong Bai

School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou Guangdong
Email: 83261017@qq.com, baidy@gzhu.edu.cn

Received: May 7th, 2017; accepted: May 22nd, 2017; published: May 27th, 2017

Abstract

In this paper we study the bifurcation curve of the Dirichlet boundary value problem with convex-concave-convex nonlinearities. By using Time-map techniques, we prove that the bifurcation curve of the boundary value problem is S-shaped when the nonlinearities are asymptotic sublinear. Consequently, the exact multiplicity of positive solutions is determined.

Keywords

Exact Multiplicity of Positive Solutions, Dirichlet Boundary Value Problem, Bifurcation Curve, Time-Map

具有凸-凹-凸非线性项的边值问题正解的确切个数

黄子饶，白定勇

广州大学数学与信息科学学院，广东 广州
Email: 83261017@qq.com, baidy@gzhu.edu.cn

收稿日期：2017年5月7日；录用日期：2017年5月22日；发布日期：2017年5月27日

摘　要

本文研究了具有凸-凹-凸非线性项的狄利克雷边值问题正解的分支曲线。通过时间映射分析法，证明了在非线性项为渐近次线性时，边值问题的正解分支曲线为S-型曲线，从而确定了边值问题的正解的确切个数。

文章引用：黄子饶，白定勇．具有凸-凹-凸非线性项的边值问题正解的确切个数[J]．应用数学进展, 2017, 6(3): 317-326.
https://doi.org/10.12677/aam.2017.63037

关键词

确切正解个数，狄利克雷边值问题，分支曲线，时间映射

1. 引言

本文考虑以下边值问题：

$$\begin{cases} u''(x)+\lambda f(u(x))=0, -1<x<1 \\ u(-1)=u(1)=0. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\lambda>0$ 为分支参数， $f\in C^2[0,+\infty)$ 。

边值问题正解的分支的研究一直是微分方程领域的重要部分。关于边值问题正解研究，目前比较常用的方法有上下解方法、积分法、分支理论、时间映射分析法等。对于非线性项为凹函数、凸函数、凹-凸函数以及凸-凹函数的研究已有大量的成果。在 1970 年，T. Laetsch [1]就利用积分法研究了边值问题

$$\begin{cases} u''(x)+\lambda f(u(x))=0, 0<x<1 \\ u(0)=u(1)=0. \end{cases} \tag{1.2}$$

在 $f(u)>0,(u\ge 0)$，$f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 为凸函数时，得出了(1.2)的正解的确切个数。2001 年，S.-H. Wang 和 D.-M. Long [2]利用时间映射分析法研究了边值问题

$$\begin{cases} u''(x)+\lambda f(u(x))=0, -L<x<L \\ u(-L)=u(L)=0. \end{cases} \tag{1.3}$$

在 $f(u)>0,(u\ge 0)$，$f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 为凹-凸函数且满足一定条件时，得出了(1.3)的正解的确切个数。2011 年，K.-C. Hung 和 S.-H. Wang [3]利用时间映射分析法证明了当 $f(u)>0,(u\ge 0)$，$f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 为凸-凹函数且为渐近次线性时，(1.1)正解的分支曲线在 $(\lambda,\|u\|_\infty)$-平面上为 S-型曲线。2014 年，P. Korman 和 Y. Li [4]利用分支理论证明了当 $f(u)$ 分别在 $(0,+\infty)$ 为凸-凹函数或凹-凸函数且满足一定条件时，(1.1)正解的分支曲线在 $(\lambda,\|u\|_\infty)$-平面上为 S-型曲线或反 S-型曲线。

当(1.1)的非线性项 $f(u)=e^{\frac{au}{a+u}}, a>0$ 时，即为扰动的 Gelfand 问题。对于此问题，也有大量的成果。通过[5]的证明，存在一个分支值 $a_0>4$，使得当 $0<a\le a_0$，(1.1)正解的分支曲线在 $(\lambda,\|u\|_\infty)$-平面上单调递增；当 $a>a_0$，(1.1)正解的分支曲线在 $(\lambda,\|u\|_\infty)$-平面上为 S-型曲线。在[3] [6] [7] [8]中都对 a_0 取近似值，最新的结果为[8]中的 $a_0\approx 4.069$ 。对于此问题的研究，还可参考[9] [10] [11] [12] [13]。

不难注意到，很多文献都是对非线性项为凸函数或凹-凸函数或凸-凹函数时进行研究，而很少有对非线性项为凹-凸-凹函数或凸-凹-凸函数时的研究，这是因为在这两类情况下，时间映射的图形十分复杂，讨论其单调性及极值点将变得十分麻烦。本文对非线性项为凸-凹-凸函数进行研究，证明了当非线性项为渐近次线性时，(1.1)正解的分支曲线在 $(\lambda,\|u\|_\infty)$-平面上为 S-型曲线。

2. 准备工作

定义(1.1)正解的分支曲线

$$S=\left\{\left(\lambda,\|u_\lambda\|_\infty\right):\lambda>0\text{且}u_\lambda\text{为}(1.1)\text{的正解}\right\}.$$

则分支曲线在$\left(\lambda,\|u\|_\infty\right)$-平面上为 S-型曲线即为 S 恰好存在 2 个转向点$\left(\lambda^*,\|u_{\lambda^*}\|_\infty\right),\left(\lambda_*,\|u_{\lambda_*}\|_\infty\right)$，其中$0<\lambda_*<\lambda^*$，使得：

1) $\|u_{\lambda^*}\|_\infty<\|u_{\lambda_*}\|_\infty$。

2) 分支曲线 S 在$\left(\lambda^*,\|u_{\lambda^*}\|_\infty\right)$向左转向。

3) 分支曲线 S 在$\left(\lambda_*,\|u_{\lambda_*}\|_\infty\right)$向右转向。

首先，设$f\in C^2[0,+\infty)$，且有以下假设条件：

(H1) $f(u)>0,u\in[0,+\infty)$。

(H2) $f(u)$在$(0,+\infty)$上是凸-凹-凸函数，即存在$0<\gamma_1<\gamma_2$，使得

$$f''(u)\begin{cases}>0 & u\in(0,\gamma_1),\\ =0 & u=\gamma_1\text{或}\gamma_2,\\ <0 & u\in(\gamma_1,\gamma_2),\\ >0 & u\in(\gamma_2,+\infty).\end{cases}$$

(H3) $f(u)$为渐近次线性，即：$\lim_{u\to+\infty}\dfrac{f(u)}{u}=0$。

为了提出下面的假设条件，先定义以下函数：

$$F(u)=\int_0^u f(t)\mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

$$\theta(u)=2F(u)-uf(u). \tag{2.2}$$

因此

$$\theta'(u)=f(u)-uf'(u). \tag{2.3}$$

$$\theta''(u)=-uf''(u).$$

由(H2)知，$\theta(u)$在$(0,+\infty)$上是凹-凸-凹函数，即

$$\theta''(u)\begin{cases}<0 & u\in(0,\gamma_1),\\ =0 & u=\gamma_1\text{或}\gamma_2,\\ >0 & u\in(\gamma_1,\gamma_2),\\ <0 & u\in(\gamma_2,+\infty).\end{cases} \tag{2.4}$$

若$\theta(\gamma_1)\le 0$，则由(2.4)，(H3)以及$\theta'(0)=f(0)>0$，易得：存在$p_1\in(0,\gamma_1),p_2\in(\gamma_1,\gamma_2)$，使得：

$$\theta'(u)\begin{cases}>0 & u\in[0,p_1),\\ <0 & u\in(p_1,p_2),\\ >0 & u\in(p_2,+\infty).\end{cases} \tag{2.5}$$

其中 p_1, p_2 均为 $\theta(u)$ 的极值点。

再定义 $H(u)$：

$$H(u)=3\int_0^u tf(t)\mathrm{d}t-u^2 f(u). \tag{2.6}$$

则：

$$H'(u)=uf(u)-u^2 f'(u)=u\theta'(u). \tag{2.7}$$

因此在 $u>0$ 时， $H(u)$ 与 $\theta(u)$ 有着相同的单调性以及极值点。

有了以上的定义，再提出以下的假设：

(H4) $\theta(\gamma_1)\le 0$。

(H5) $\theta(\gamma_2)\le 0\le H(\gamma_2)$ 或 $0\le\gamma_1\theta(\gamma_2)\le H(\gamma_2)$，即 $H(\gamma_2)\ge\gamma_1\max\{0,\theta(\gamma_2)\}$。

以下为本文的主要结果：

定理 2.1 设 $f\in C^2[0,+\infty)$，若 $f(u)$ 满足(H1)-(H5)，则(1.1)正解的分支曲线在 $(\lambda,\|u\|_\infty)$-平面上为 S-型曲线，即存在两个正数 $\lambda_2>\lambda_1$，当 $\lambda\in(0,\lambda_1)$ 或 $(\lambda_2,+\infty)$ 时，(1.1)存在唯一正解，当 $\lambda=\lambda_1$ 或 λ_2 时，(1.1)恰好存在两个正解，当 $\lambda\in(\lambda_1,\lambda_2)$ 时，(1.1)恰好存在三个正解；且 $p_1<\|u_{\lambda_2}\|_\infty<\gamma_1<p_2<\|u_{\lambda_1}\|_\infty<\gamma_2$。

3. 主要结果的证明

本文使用 J. Smoller 和 A. Wasserman [14]以及 T. Laetsch [1]使用过的时间映射分析法对(1.1)进行分析，时间映射等式为：

$$\sqrt{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\alpha\frac{\mathrm{d}u}{[F(\alpha)-F(u)]^{\frac{1}{2}}},\quad 0<\alpha<+\infty. \tag{3.1}$$

u 为(1.1)的正解当且仅当

$$\|u\|_\infty=\alpha,\ T(\alpha)=\sqrt{\lambda}. \tag{3.2}$$

因此，研究(1.1)正解的个数等同于研究时间映射 $T(\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的图像。

为了证明定理 2.1，给出以下引理：

引理 3.1 [1]设 $f\in C^2[0,+\infty)$，若 $f(u)$ 满足(H1)-(H3)，则

$$\lim_{\alpha\to 0}T(\alpha)=0,\ \lim_{\alpha\to+\infty}T(\alpha)=+\infty. \tag{3.3}$$

且 $T(\alpha)$ 在 $(0,\gamma_1)$ 最多只有一个极值点，且为极大值点。

引理 3.2 设 $f\in C^2[0,+\infty)$，若 $f(u)$ 满足(H1)-(H5)，则 $T'(\gamma_1)<0$，且 $T(\alpha)$ 在 $[\gamma_1,+\infty)$ 上恰好有一个极值点，且为极小值点，此极值点在 (γ_1,γ_2) 上。

证明：分几步进行证明，首先证明 $T'(\gamma_1)<0$。

由(3.1)计算得：

$$T'(\alpha)=\frac{1}{2\sqrt{2}\alpha}\int_0^\alpha\frac{\theta(\alpha)-\theta(u)}{[F(\alpha)-F(u)]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u. \tag{3.4}$$

由 (H4),$\theta(0)=0$ 及(2.5)可知：对任意的 $u\in(0,\gamma_1)$，有 $\theta(\gamma_1)<\theta(u)$，且 $\theta(\gamma_1)\le\theta(0)=0$，所以

$$T'(\gamma_1)=\frac{1}{2\sqrt{2}\gamma_1}\int_0^{\gamma_1}\frac{\theta(\gamma_1)-\theta(u)}{\left[F(\gamma_1)-F(u)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u<0. \tag{3.5}$$

接下来证明 $T(\alpha)$ 在 (γ_1,γ_2) 上存在唯一的极值点，且为极小值点。把区间 (γ_1,γ_2) 分为 $(\gamma_1,p_2]$ 以及 (p_2,γ_2)，分几步进行证明：

1) 由上面证明 $T'(\gamma_1)<0$ 的过程以及(2.5)，易得:对任意的 $\alpha\in(\gamma_1,p_2]$，有 $T'(\alpha)<0$。因此 $T(\alpha)$ 在 $(\gamma_1,p_2]$ 上单调递减，从而不存在任何极值点。

2) 接下来证明 $T'(\gamma_2)>0$。

a) 若 $\theta(\gamma_2)\le 0\le H(\gamma_2)$，因为 $\theta(0)=0,\ f(u)>0,\ u\in[0,+\infty)$，所以由(2.5)得:存在 $\overline{\gamma}\in(p_1,p_2)$，使得：

$$\theta(\gamma_2)-\theta(u)\begin{cases}>0 & u\in(0,\overline{\gamma}),\\ =0 & u=\overline{\gamma},\\ <0 & u\in(\overline{\gamma},\gamma_2).\end{cases}$$

以及

$$F(\gamma_2)-F(u)=\int_0^{\gamma_2}f(t)\mathrm{d}t\begin{cases}>F(\gamma_2)-F(\overline{\gamma}) & u\in(0,\overline{\gamma}),\\ <F(\gamma_2)-F(\overline{\gamma}) & u\in(\overline{\gamma},\gamma_2).\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}2\sqrt{2}\gamma_2T'(\gamma_2)&=\int_0^{\gamma_2}\frac{\theta(\gamma_2)-\theta(u)}{\left[F(\gamma_2)-F(u)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\\&=\int_0^{\overline{\gamma}}\frac{\theta(\gamma_2)-\theta(u)}{\left[F(\gamma_2)-F(u)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u+\int_{\overline{\gamma}}^{\gamma_2}\frac{\theta(\gamma_2)-\theta(u)}{\left[F(\gamma_2)-F(u)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\\&>\int_0^{\overline{\gamma}}\frac{\theta(\gamma_2)-\theta(u)}{\left[F(\gamma_2)-F(\overline{\gamma})\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u+\int_{\overline{\gamma}}^{\gamma_2}\frac{\theta(\gamma_2)-\theta(u)}{\left[F(\gamma_2)-F(\overline{\gamma})\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{\left[F(\gamma_2)-F(\overline{\gamma})\right]^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\gamma_2}\left[\theta(\gamma_2)-\theta(u)\right]\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{\left[F(\gamma_2)-F(\overline{\gamma})\right]^{\frac{3}{2}}}\left[\gamma_2\theta(\gamma_2)-\int_0^{\gamma_2}\theta(u)\mathrm{d}u\right]\\&=\frac{1}{\left[F(\gamma_2)-F(\overline{\gamma})\right]^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\gamma_2}u\theta'(u)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{\left[F(\gamma_2)-F(\overline{\gamma})\right]^{\frac{3}{2}}}H(\gamma_2)\ge 0\end{aligned}. \tag{3.6}$$

不难注意到等号不能取，所以 $T'(\gamma_2)>0$。

b) 若 $0\le\gamma_1\theta(\gamma_2)\le H(\gamma_2)$，则存在 $\overline{\gamma}_1\in(0,p_1),\overline{\gamma}_2\in(p_1,\gamma_1)$，使得：

$$\theta(\gamma_2)-\theta(u)\begin{cases} >0 & u\in(0,\bar{\gamma}_1), \\ =0 & u=\bar{\gamma}_1 \\ <0 & u\in(\bar{\gamma}_1,\bar{\gamma}_2), \\ =0 & u=\bar{\gamma}_2 \\ >0 & u\in(\bar{\gamma}_2,\gamma_2). \end{cases}$$

以及

$$F(\gamma_2)-F(u)=\int_0^{\gamma_2} f(t)\,\mathrm{d}t\begin{cases} >F(\gamma_2)-F(\bar{\gamma}_2) & u\in(0,\bar{\gamma}_2), \\ <F(\gamma_2)-F(\bar{\gamma}_2) & u\in(\bar{\gamma}_2,\gamma_2). \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}
&2\sqrt{2}\gamma_2 T'(\gamma_2)=\int_0^{\gamma_2}\frac{\theta(\gamma_2)-\theta(u)}{\left[F(\gamma_2)-F(u)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u \\
&=\int_0^{\bar{\gamma}_1}\frac{\theta(\gamma_2)-\theta(u)}{\left[F(\gamma_2)-F(u)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u+\int_{\bar{\gamma}_1}^{\bar{\gamma}_2}\frac{\theta(\gamma_2)-\theta(u)}{\left[F(\gamma_2)-F(u)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u+\int_{\bar{\gamma}_2}^{\gamma_2}\frac{\theta(\gamma_2)-\theta(u)}{\left[F(\gamma_2)-F(u)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u \\
&>\int_0^{\bar{\gamma}_1}\frac{\theta(\gamma_2)-\theta(u)}{\left[F(\gamma_2)-F(u)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u+\int_{\bar{\gamma}_1}^{\bar{\gamma}_2}\frac{\theta(\gamma_2)-\theta(u)}{\left[F(\gamma_2)-F(\bar{\gamma}_2)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u+\int_{\bar{\gamma}_2}^{\gamma_2}\frac{\theta(\gamma_2)-\theta(u)}{\left[F(\gamma_2)-F(\bar{\gamma}_2)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u \\
&=\int_0^{\bar{\gamma}_1}\frac{\theta(\gamma_2)-\theta(u)}{\left[F(\gamma_2)-F(u)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u+\int_{\bar{\gamma}_1}^{\gamma_2}\frac{\theta(\gamma_2)-\theta(u)}{\left[F(\gamma_2)-F(\bar{\gamma}_2)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u \\
&=\int_0^{\bar{\gamma}_1}\frac{\theta(\gamma_2)}{\left[F(\gamma_2)-F(u)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u-\int_0^{\bar{\gamma}_1}\frac{\theta(u)}{\left[F(\gamma_2)-F(u)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u+\frac{1}{\left[F(\gamma_2)-F(\bar{\gamma}_2)\right]^{\frac{3}{2}}}\int_{\bar{\gamma}_1}^{\gamma_2}\left[\theta(\gamma_2)-\theta(u)\right]\mathrm{d}u \\
&>\int_0^{\bar{\gamma}_1}\frac{\theta(\gamma_2)}{\left[F(\gamma_2)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u-\int_0^{\bar{\gamma}_1}\frac{\theta(u)}{\left[F(\gamma_2)-F(\bar{\gamma}_2)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u+\frac{1}{\left[F(\gamma_2)-F(\bar{\gamma}_2)\right]^{\frac{3}{2}}}\int_{\bar{\gamma}_1}^{\gamma_2}\left[\theta(\gamma_2)-\theta(u)\right]\mathrm{d}u \\
&=\int_0^{\bar{\gamma}_1}\frac{\theta(\gamma_2)}{\left[F(\gamma_2)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u-\frac{1}{\left[F(\gamma_2)-F(\bar{\gamma}_2)\right]^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\bar{\gamma}_1}\theta(u)\mathrm{d}u+\frac{1}{\left[F(\gamma_2)-F(\bar{\gamma}_2)\right]^{\frac{3}{2}}}\int_{\bar{\gamma}_1}^{\gamma_2}\left[\theta(\gamma_2)-\theta(u)\right]\mathrm{d}u \\
&=\int_0^{\bar{\gamma}_1}\frac{\theta(\gamma_2)}{\left[F(\gamma_2)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u+\frac{1}{\left[F(\gamma_2)-F(\bar{\gamma}_2)\right]^{\frac{3}{2}}}\left[\int_{\bar{\gamma}_1}^{\gamma_2}\theta(\gamma_2)\mathrm{d}u-\int_0^{\gamma_2}\theta(u)\mathrm{d}u\right] \\
&=\frac{1}{\left[F(\gamma_2)\right]^{\frac{3}{2}}}\bar{\gamma}_1\theta(\gamma_2)+\frac{1}{\left[F(\gamma_2)-F(\bar{\gamma}_2)\right]^{\frac{3}{2}}}\left\{(\gamma_2-\bar{\gamma}_1)\theta(\gamma_2)-\left[\gamma_2\theta(\gamma_2)-\int_0^{\gamma_2}u\theta'(u)\mathrm{d}u\right]\right\} \\
&=\frac{1}{\left[F(\gamma_2)\right]^{\frac{3}{2}}}\bar{\gamma}_1\theta(\gamma_2)+\frac{1}{\left[F(\gamma_2)-F(\bar{\gamma}_2)\right]^{\frac{3}{2}}}\left[H(\gamma_2)-\bar{\gamma}_1\theta(\gamma_2)\right]
\end{aligned}$$

因为 $0\le\gamma_1\theta(\gamma_2)\le H(\gamma_2)$，所以 $H(\gamma_2)-\bar{\gamma}_1\theta(\gamma_2)\ge H(\gamma_2)-\gamma_1\theta(\gamma_2)\ge 0$。因此

$$\begin{aligned}2\sqrt{2}\gamma_2 T'(\gamma_2) &> \frac{1}{[F(\gamma_2)]^{\frac{3}{2}}}\overline{\gamma}_1\theta(\gamma_2)+\frac{1}{[F(\gamma_2)-F(\overline{\gamma}_2)]^{\frac{3}{2}}}[H(\gamma_2)-\overline{\gamma}_1\theta(\gamma_2)] \\ &\ge \frac{1}{[F(\gamma_2)]^{\frac{3}{2}}}\overline{\gamma}_1\theta(\gamma_2)+\frac{1}{[F(\gamma_2)]^{\frac{3}{2}}}[H(\gamma_2)-\overline{\gamma}_1\theta(\gamma_2)]=\frac{1}{[F(\gamma_2)]^{\frac{3}{2}}}H(\gamma_2)\ge 0\end{aligned}. \tag{3.7}$$

不难注意到等号不能取，所以$T'(\gamma_2)>0$。

因此，无论是$\theta(\gamma_2)\le 0\le H(\gamma_2)$还是$0\le\gamma_1\theta(\gamma_2)\le H(\gamma_2)$，都有$T'(\gamma_2)>0$。

3) 下面证明在(p_2,γ_2)内，$T''(\alpha)+\frac{2}{\alpha}T'(\alpha)>0$。

由(3.4)可计算得：

$$T''(\alpha)=\frac{1}{2\sqrt{2}\alpha^2}\int_0^\alpha \frac{\frac{3}{2}[\theta(\alpha)-\theta(u)][\alpha f(\alpha)-uf(u)]+[F(\alpha)-F(u)][\alpha\theta'(\alpha)-u\theta'(u)]}{[F(\alpha)-F(u)]^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}u \tag{3.8}$$

所以

$$\begin{aligned}&2\sqrt{2}\alpha^2\left[T''(\alpha)+\frac{2}{\alpha}T'(\alpha)\right] \\ &=\int_0^\alpha \frac{\frac{3}{2}[\theta(\alpha)-\theta(u)]^2+[F(\alpha)-F(u)][\varnothing(\alpha)-\varnothing(u)]}{[F(\alpha)-F(u)]^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}u \\ &\ge \int_0^\alpha \frac{\varnothing(\alpha)-\varnothing(u)}{[F(\alpha)-F(u)]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\end{aligned}. \tag{3.9}$$

其中$\varnothing(u)=u\theta'(u)-\theta(u)$，所以$\varnothing(0)=0$，且：

$$\varnothing'(u)=u\theta''(u)\begin{cases}<0 & u\in(0,\gamma_1),\\ =0 & u=\gamma_1\text{或}\gamma_2,\\ >0 & u\in(\gamma_1,\gamma_2),\\ <0 & u\in(\gamma_2,\infty).\end{cases} \tag{3.10}$$

下面分两种情况讨论：

a) 若$\varnothing(\alpha)\ge 0$，则对任意的$u\in(0,\alpha),\varnothing(\alpha)>\varnothing(u)$且$\varnothing(\alpha)\ge\varnothing(0)=0$，所以易得$T''(\alpha)+\frac{2}{\alpha}T'(\alpha)>0$。

b) 若$\varnothing(\alpha)<0$，因为$\varnothing(0)=0$，所以由(3.10)得：存在$\overline{\alpha}\in(0,\gamma_1)$，使得：

$$\varnothing(\alpha)-\varnothing(u)\begin{cases}<0 & u\in(0,\overline{\alpha}),\\ =0 & u=\overline{\alpha},\\ >0 & u\in(\overline{\alpha},\alpha).\end{cases}$$

以及

$$F(\alpha)-F(u)=\int_u^\alpha f(t)\mathrm{d}t\begin{cases}>F(\alpha)-F(\overline{\alpha}) & u\in(0,\overline{\alpha}),\\ <F(\alpha)-F(\overline{\alpha}) & u\in(\overline{\alpha},\alpha).\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}2\sqrt{2}\alpha^2\left[T''(\alpha)+\frac{2}{\alpha}T'(\alpha)\right] &\ge \int_0^\alpha \frac{\varnothing(\alpha)-\varnothing(u)}{\left[F(\alpha)-F(u)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\bar\alpha} \frac{\varnothing(\alpha)-\varnothing(u)}{\left[F(\alpha)-F(u)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u + \int_{\bar\alpha}^{\alpha} \frac{\varnothing(\alpha)-\varnothing(u)}{\left[F(\alpha)-F(u)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u \\ &> \int_0^{\bar\alpha} \frac{\varnothing(\alpha)-\varnothing(u)}{\left[F(\alpha)-F(\bar\alpha)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u + \int_{\bar\alpha}^{\alpha} \frac{\varnothing(\alpha)-\varnothing(u)}{\left[F(\alpha)-F(\bar\alpha)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\left[F(\alpha)-F(\bar\alpha)\right]^{\frac{3}{2}}}\int_0^\alpha\left[\varnothing(\alpha)-\varnothing(u)\right]\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\left[F(\alpha)-F(\bar\alpha)\right]^{\frac{3}{2}}}\left[\alpha\varnothing(\alpha)-\int_0^\alpha\varnothing(u)\mathrm{d}u\right] \\ &= \frac{1}{\left[F(\alpha)-F(\bar\alpha)\right]^{\frac{3}{2}}}\int_0^\alpha u\varnothing'(u)\mathrm{d}u\end{aligned} \qquad (3.11)$$

注意到 $p_2\in(\gamma_1,\alpha)$，且 $H(u)$ 与 $\theta(u)$ 有相同的单调性及极值点 $(u>0)$，所以由(2.5)及(3.10)，可得：

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha u\varnothing'(u)\mathrm{d}u &> \int_0^{p_2}u\varnothing'(u)\mathrm{d}u=\int_0^{p_2}u^2\theta''(u)\mathrm{d}u=\int_0^{p_2}u^2\mathrm{d}\left[\theta'(u)\right] \\ &= p_2^2\theta'(p_2)-2\int_0^{p_2}u\theta'(u)\mathrm{d}u=-2H(p_2)\end{aligned}.$$

下面简单地证明 $H(p_2)<0$。在 $[0,p_1]$，有 $\theta'(u)\ge 0$，$\frac{u}{p_1}\le 1$，所以 $\frac{u}{p_1}\theta'(u)\le\theta'(u)$；而在 $[p_1,p_2]$，有 $\theta'(u)\le 0$，$\frac{u}{p_1}\ge 1$，所以 $\frac{u}{p_1}\theta'(u)\le\theta'(u)$。因此在 $[0,p_2]$ 上，都有 $\frac{u}{p_1}\theta'(u)\le\theta'(u)$，即 $\frac{1}{p_1}H'(u)\le\theta'(u)$，对其从 0 到 p_2 积分，可得：$\frac{1}{p_1}H(p_2)\le\theta(p_2)<0$。所以 $H(p_2)<0$。

因此由(3.11)得：对所有在 (p_2,γ_2) 上且满足 $\varnothing(\alpha)<0$ 的 α，都有：

$$\begin{aligned}2\sqrt{2}\alpha^2\left[T''(\alpha)+\frac{2}{\alpha}T'(\alpha)\right] &> \frac{1}{\left[F(\alpha)-F(\bar\alpha)\right]^{\frac{3}{2}}}\int_0^\alpha u\varnothing'(u)\mathrm{d}u \\ &> \frac{1}{\left[F(\alpha)-F(\bar\alpha)\right]^{\frac{3}{2}}}\left[-2H(p_2)\right]>0\end{aligned}. \qquad (3.12)$$

所以对所有的 $\alpha\in(p_2,\gamma_2)$，都有 $T''(\alpha)+\frac{2}{\alpha}T'(\alpha)>0$。

由前面的证明可知 $T'(p_2)<0$，$T'(\gamma_2)>0$，所以 $T(\alpha)$ 在 (p_2,γ_2) 上至少有一个极值点，且为极小值点。又因为对所有的 $\alpha\in(p_2,\gamma_2)$，都有 $T''(\alpha)+\frac{2}{\alpha}T'(\alpha)>0$。设 α^* 为 $T(\alpha)$ 在 (p_2,γ_2) 内的任意一个极值点，则由(3.12)，当 $T'(\alpha^*)=0$ 时必有 $T''(\alpha^*)>0$，因此 $T(\alpha^*)$ 必为极小值，从而 α^* 是唯一的。所以 $T(\alpha)$ 在 (γ_1,γ_2) 上存在唯一的极值点，且为极小值点。

最后证明 $T(\alpha)$ 在 $[\gamma_2,+\infty)$ 上不存在任何极值点。

对任意的$\alpha\in(\gamma_2,+\infty)$，由(2.5)易得$\theta(\alpha)>\theta(\gamma_2)$，因此

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{2}\alpha T'(\alpha) &= \int_0^{\alpha}\frac{\theta(\alpha)-\theta(u)}{\left[F(\alpha)-F(u)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u \\
&> \int_0^{\gamma_2}\frac{\theta(\alpha)-\theta(u)}{\left[F(\alpha)-F(u)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u . \\
&> \int_0^{\gamma_2}\frac{\theta(\gamma_2)-\theta(u)}{\left[F(\alpha)-F(u)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

按照证明(3.7)的过程，同样可得$T'(\alpha)>0$ (只是被积函数的分母不同，对证明结果没有影响)，就不再加以证明。所以对任意的$\alpha\in[\gamma_2,+\infty)$，都有$T'(\alpha)>0$。因此$T(\alpha)$在$[\gamma_2,+\infty)$上单调递增，从而不存在任何极值点。

定理 2.1 的证明 由(2.5)知：$\theta(u)$在$[0,p_1)$单调递增，又由前面的讨论，易得：对任意的$\alpha\in(0,p_1]$，$T'(\alpha)>0$，因此$T'(p_1)>0$，又$T'(\gamma_1)<0$，所以$T(\alpha)$在(p_1,γ_1)上至少有一个极值点，且为极大值点。又由引理 3.1 知，$T(\alpha)$在$(0,\gamma_1)$上最多只有一个极值点，且为极大值点。因此$T(\alpha)$在$(0,\gamma_1)$上存在唯一的极值点，且为极大值点，此极值点在(p_1,γ_1)上。

因此，$T(\alpha)$在$[0,+\infty)$一共有两个极值点，一个在(p_1,γ_1)中，为极大值点；另一个在(p_2,γ_2)中，为极小值点；在其他区间没有极值点。设这两个极值点分别为α_1,α_2，且$\alpha_1<\alpha_2$，则α_1为极大值点，α_2为极小值点，因此$T(\alpha)$在$(0,+\infty)$上的单调性为：

$$
T'(\alpha)\begin{cases} >0 & \alpha\in(0,\alpha_1), \\ =0 & \alpha=\alpha_1, \\ <0 & \alpha\in(\alpha_1,\alpha_2), \\ =0 & \alpha=\alpha_2, \\ >0 & \alpha\in(\alpha_2,+\infty). \end{cases} \tag{3.14}
$$

又由(3.3)有：

$$
\lim_{\alpha\to 0}T(\alpha)=0,\ \lim_{\alpha\to+\infty}T(\alpha)=+\infty .
$$

因此(1.1)正解的分支曲线在$\left(\lambda,\|u\|_\infty\right)$-平面上的轨迹为一条 S-型曲线，它从$(0,0)$点出发向右移动，到达$\left(\lambda_2,\|u_{\lambda_2}\|_\infty\right)$点后向左转向，到达$\left(\lambda_1,\|u_{\lambda_1}\|_\infty\right)$点后向右转向，此后不再发生转向且趋于无穷。即存在两个正数$\lambda_2>\lambda_1>0$，当$\lambda\in(0,\lambda_1)$或$(\lambda_2,+\infty)$时，(1.1) 存在唯一正解，当$\lambda=\lambda_1$或λ_2时，(1.1)恰好存在两个正解，当$\lambda\in(\lambda_1,\lambda_2)$时，(1.1)恰好存在三个正解；且$p_1<\|u_{\lambda_2}\|_\infty<\gamma_1<p_2<\|u_{\lambda_1}\|_\infty<\gamma_2$。

参考文献 (References)

[1] Laetsch, T. (1970) The Number of Solution of a Nonlinear Two Point Boundary Value Problem. *Indiana University Mathematics Journal*, **20**, 1-13. https://doi.org/10.1512/iumj.1971.20.20001

[2] Wang, S.-H. and Long, D.-M. (2001) An Exact Multiplicity Theorem Involving Concave-Convex Nonlinearities and Its Application to Stationary Solutions of a Singular Diffusion Problem. *Nonlinear Analysis*, **44**, 469-486. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(99)00272-2

[3] Hung, K.-C. and Wang, S.-H. (2011) A Theorem on S-Shaped Bifurcation Curve for a Positone Problem with Convex-Concave Nonlinearity and its Applications to the Perturbed Gelfand Problem. *Journal of Differential Equations*,

251, 223-237. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.03.017

[4] Korman, P. and Li, Y. (2014) Exact Multiplicity of Positive Solutions for Concave-Convex and Convex-Concave Nonlinearities. *Journal of Differential Equations*, **257**, 3730-3737. https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.07.007

[5] Brown, K.J., Ibrahim, M.M.A. and Shivaji, R. (1981) S-Shaped Bifurcation Curves. *Nonlinear Analysis*, **5**, 475-486. https://doi.org/10.1016/0362-546X(81)90096-1

[6] Korman, P. and Li, Y. (1999) On the Exactness of an S-Shaped Bifurcation Curve. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **127**, 1011-1020. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-99-04928-X

[7] Huang, S.-Y. and Wang, S.-H. (2015) On S-Shaped Bifurcation Curves for a Two-Point Boundary Value Problem Arising in Theory of Thermal Explosion. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **35**, 4839-4858. https://doi.org/10.3934/dcds.2015.35.4839

[8] Huang, S.-Y. and Wang, S.-H. (2016) Proof of a Conjecture for the One-Dimensional Perturbed Gelf and Problem from Combustion Theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **222**, 769-825. https://doi.org/10.1007/s00205-016-1011-1

[9] Wang, S.-H. (1994) On S-Shaped Bifurcation Curves. *Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications*, **22**, 1475-1485. ttps://doi.org/10.1016/0362-546X(94)90183-X

[10] Du, Y. (2005) Bifurcation and Related Topics in Elliptic Problems. *Handbook of Differential Equations Stationary Partial Differential Equations*, **2**, 127-209. https://doi.org/10.1016/S1874-5733(05)80011-7

[11] Y.Du, Y.Lou (2001) Proof of a Conjecture for the Perturbed Gelfand Equation from Combustion Theory, Journal of Differential Equations, **173**, 213-230. https://doi.org/10.1006/jdeq.2000.3932

[12] Korman, P. (2006) Global Solution Branches and Exact Multiplicity of Solutions for Two Point Boundary Value Problems. *Handbook of Differential Equations Ordinary Differential Equations*, **3**, 547-606. https://doi.org/10.1016/S1874-5725(06)80010-6

[13] Korman, P., Li, Y. and Ouyang, T. (2005) Computing the Location and the Direction of Bifurcation. *Mathematical Research Letters*, **12**, 933-944. https://doi.org/10.4310/MRL.2005.v12.n6.a13

[14] Smoller, J. and Wasserman, A. (1981) Global Bifurcation of Steady-State Solutions. *Journal of Differential Equations*, **39**, 269-290. https://doi.org/10.1016/0022-0396(81)90077-2