Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(3), 348-356
Published Online May 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.63040

Hans汉斯

Existence of Periodic Solutions of a Second-Order Singular Damped Differential Equation

Yanhua Wang, Shengjun Li*

College of Information Science and Technology, Hainan University, Haikou Hainan
Email: 1072130708@qq.com, *shjli626@126.com

Received: May 7th, 2017; accepted: May 24th, 2017; published: May 27th, 2017

Abstract

Singular differential equations have important applications in astronomy, physics, biology and many other applied sciences. In this paper, by using variational methods, we prove the existence of at least a non-trivial periodic solution for the second-order singular damped differential equation

$$u''(t)+q(t)u'(t)-\frac{1}{u^{\gamma}(t)}=g(t).$$

Keywords

Variational Methods, Singular Differential Equations, Periodic Solutions, Existence

一类具阻尼的二阶奇异微分方程周期解的存在性

王燕华，李胜军*

海南大学，信息科学技术学院，海南 海口
Email: 1072130708@qq.com, *shjli626@126.com

收稿日期：2017年5月7日；录用日期：2017年5月24日；发布日期：2017年5月27日

摘 要

奇异微分方程在天文学、物理学、生物学等学科中有着广泛的应用，本文应用变分方法，证明了二阶阻

*通讯作者。

文章引用: 王燕华, 李胜军. 一类具阻尼的二阶奇异微分方程周期解的存在性[J]. 应用数学进展, 2017, 6(3): 348-356.
https://doi.org/10.12677/aam.2017.63040

尼奇异微分方程 $u''(t)+q(t)u'(t)-\frac{1}{u^{\gamma}(t)}=g(t)$ 至少有一个非平凡周期解的存在性结果。

关键词

变分方法，奇异微分方程，周期解，存在性

1. 引言及主要结果

变分学是研究泛函极值(以及更一般的临界值)的一个数学分支；变分问题内容非常丰富，从经典力学到规范场论，物质运动的规律都遵从变分原理。临界点理论是近几十年来变分学发展最快的分支，同时也有许多应用，特别是在微分方程解的存在性的证明中它是直接方法的一个重要补充[1]-[6]。

本文应用“山路引理”研究奇异阻尼微分方程

$$u''(t)+q(t)u'(t)-\frac{1}{u^{\gamma}(t)}=g(t) \tag{1}$$

T-周期解的存在性，其中 $q,g\in C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z},\mathbb{R}),\gamma>1$，$\int_0^T q(t)\mathrm{d}t=0$，显然非线性项 $-\frac{1}{u^{\gamma}(t)}$ 在原点具有排斥奇异性，即 $\lim\limits_{u\to0^+}-\frac{1}{u^{\gamma}(t)}=-\infty$。最近，方程(1)周期解的存在性也受到少数几个专家学者的关注。在文献[7]中，应用度的同伦不变性，对同伦方程的解进行先验估计，然后利用经典的重合度理论，得到方程至少有一个正周期解；在文献[8]和[9]中，通过考虑其 Green 函数的正性，分别应用 Leray-Schauder 二择一原理和 Schauder 不动点定理，研究了其周期解的存在性。一般情况下，当 $\int_0^T q(t)\mathrm{d}t>0$，对于方程(1)很难应用变分法。本文，我们考虑 $\int_0^T q(t)\mathrm{d}t=0$ 的情形，通过合理的假设，在适当的 Sobolev 空间上建立方程(1)的相应的变分结构，利用“山路引理”，证明方程(1)至少有一个非平凡的 T-周期解。

定理 1. 假定条件

(H_1) $q,g\in C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}),\gamma>1$，且 $\int_0^T q(t)\mathrm{d}t=0$；

(H_2) $\lim\limits_{u\to0^+}F(u)=+\infty$，其中 $F(u)=\int_1^u\frac{1}{u^{\gamma}(s)}\mathrm{d}s$；

(H_3) $M:=\sup\left\{\frac{1}{u^{\gamma}(s)}:0<s<+\infty\right\}$ 是有界的；

(H_4) $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(F(u)-\bar{g}u\right)=+\infty$，其中 $\bar{g}$ 定义为 $\bar{g}:=\int_0^T g(t)\mathrm{d}t$。

成立，则方程(1)至少有一个非平凡 T-周期解。

2. 引理

首先，定义截断函数 $f_{\lambda}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ (0<\lambda<1)$ 如下：

$$f_\lambda(u)=\begin{cases} f(u)=-\dfrac{1}{u^\gamma}, & u\ge\lambda, \\ f(\lambda)=-\dfrac{1}{\lambda^\gamma}, & u<\lambda. \end{cases}$$

我们知道 f_λ 关于 $u\in\mathbb{R}$ 是连续的。

下面，对 $\lambda\in[0,1]$，我们考虑方程

$$u''(t)+q(t)u'(t)+f_\lambda(u(t))=g(t). \tag{2}$$

设

$$Q(t)=\int_0^t q(s)\mathrm{d}s,\quad F_\lambda(u)=\int_1^u f_\lambda(s)\mathrm{d}s$$

同时定义如下 Hilbert 空间

$$H_T^1=\left\{u:[0,T]\to\mathbb{R}\text{是绝对连续的}; u(0)=u(T), u'\in L^2([0,T];\mathbb{R})\right\},$$

其范数为

$$\|u\|=\left(\int_0^T u(t)^2\,\mathrm{d}t+\int_0^T u'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

方程(2)在空间 H_T^1 上对应的泛函为

$$\Phi_\lambda(u)=\int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}\left[\frac{1}{2}u'(t)^2+F_\lambda(u(t))+g(t)u(t)\right]\mathrm{d}t. \tag{3}$$

在定理 1 的假设条件下，类似于文献[10]定理 2.1 的证明，令 $L(t,x,y)=\mathrm{e}^{Q(t)}\left[\frac{1}{2}y^2-F_\lambda(x)+g(t)x\right]$，其中 $x,y\in\mathbb{R}$，$t\in[0,T]$，则 $L(t,x,y)$ 满足[3]中定理 1.4 的所有条件。我们知道函数 Φ_λ 连续可微，且在 H_1^T 上弱下半连续。同时对所有的 $u,v\in H_1^T$ 有

$$\Phi_\lambda'(u)v=\int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}\left[u'(t)v'(t)-f_\lambda(u(t))v(t)+g(t)v(t)\right]\mathrm{d}t. \tag{4}$$

引理 1 如果 $u\in H_1^T$ 是欧拉方程 $\Phi_\lambda'(u)=0$ 的解，则 u 是方程(2)的 T-周期解。

证明：由 $\Phi_\lambda'(u)=0$，则对所有的 $v\in H_1^T$，

$$0=\Phi_\lambda'(u)v=\int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}u'(t)v'(t)\mathrm{d}t+\int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}\left[-f_\lambda(u(t))v(t)+g(t)v(t)\right]\mathrm{d}t.$$

即

$$\int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}u'(t)v'(t)\mathrm{d}t=\int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}\left[f_\lambda(u(t))v(t)-g(t)v(t)\right]\mathrm{d}t.$$

容易知道 $\mathrm{e}^{Q(t)}u'(t)$ 有弱导数，且

$$\left[\mathrm{e}^{Q(t)}u'(t)\right]'=\mathrm{e}^{Q(t)}\left[g(t)-f_\lambda(u(t))\right], \tag{5}$$

$$\mathrm{e}^{Q(t)}u'(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{Q(s)}\left[g(s)-f_\lambda(u(s))\right]\mathrm{d}s+c, \tag{6}$$

$$\int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}\left[g(t)-f_\lambda(u(t))\right]\mathrm{d}t=0, \tag{7}$$

其中 c 为常数。由(6)，(7)，存在 $u'(t)$，满足

$$u'(0)-u'(T)=u(0)-u(T)=0.$$

进一步，由(5)，有

$$u''(t)+q(t)u'(t)+f_\lambda(u(t))=g(t).$$

故泛函 $\Phi_\lambda(u)$ 的临界点就是方程(2)的 T-周期。

引理 2 [3] (Wirtinger 不等式) 设 $u\in H_T^1$，且 $\int_0^T u(t)\mathrm{d}t=0$，则

$$\int_0^T |u(t)|^2 \mathrm{d}t \le \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |u'(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

为了证明我们的主要结果，将应用下面的山路引理。

引理 3 [3]设 X 是 Banach 空间，$\varphi\in C^1(X,R)$，满足 P.S.条件，$x_0,x_1\in X$，Ω 是 x_0 的开邻域，$x_1\in X\setminus\bar{\Omega}$，假定

$$\max\{\varphi(x_0),\varphi(x_1)\}<\inf_{x\in\partial\Omega}\varphi(u).$$

令

$$c=\inf_{h\in\Gamma}\max_{s\in[0,1]}\varphi(h(s)),$$

其中，

$$\Gamma=\{h\in C([0,1],X):h(0)=x_0,h(1)=x_1\},$$

那么 c 必是 φ 的临界点，且 $c>\max\{\varphi(x_0),\varphi(x_1)\}$。

3. 定理的证明

下面，我们给出定理 1 的证明。

证明：对该定理的证明我们总共分为四步。

首先，我们验证 Φ_λ 满足 P.S.条件。

设序列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset H_T^1$，使得 $\{\Phi_\lambda(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是有界的且当 $n\to+\infty$ 时，$\Phi'_\lambda(u_n)\to 0$。即对所有的 n，存在常数 $c_1>0$ 以及序列 $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^+$ (当 $n\to+\infty$ 时，$\varepsilon_n\to 0$)使得

$$\left|\int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}\left[\frac{1}{2}u_n'(t)^2-F_\lambda(u_n(t))+g(t)u_n(t)\right]\mathrm{d}t\right|\le c_1, \tag{8}$$

和

$$\left|\int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}\left[u_n'(t)v'(t)-f_\lambda(u_n(t))v(t)+g(t)v(t)\right]\mathrm{d}t\right|\le\varepsilon_n\|v\|_{H_T^1}, \tag{9}$$

其中 $v\in H_T^1$。

我们只须证 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 H_T^1 中有界。

事实上，在(9)中，取 $v(t)\equiv -1$，我们得到

$$\left|\int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}\left[f_\lambda(u_n(t))-g(t)\right]\mathrm{d}t\right|\le\varepsilon_n\sqrt{T}.$$

于是，

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T e^{Q(t)} f_\lambda\left(u_n(t)\right)dt\right| &\le \varepsilon_n\sqrt{T}+\left|\int_0^T e^{Q(t)} g(t)dt\right| \\ &\le \varepsilon_n\sqrt{T}+e^{\|q\|_{L^1}}\int_0^T |g(t)|dt \\ &= \varepsilon_n\sqrt{T}+e^{\|q\|_{L^1}}\|g\|_{L^1} := c_2\end{aligned} \tag{10}$$

设

$$I_{1,n} := \left\{t\in[0,T]: f_\lambda\left(u_n(t)\right)\ge 0\right\},$$

以及

$$I_{2,n} := \left\{t\in[0,T]: f_\lambda\left(u_n(t)\right)< 0\right\}.$$

由(10)式，得到

$$\left|\int_{I_{2,n}} e^{Q(t)} f_\lambda\left(u_n(t)\right)dt\right| \le c_2+\int_{I_{1,n}} e^{Q(t)} f_\lambda\left(u_n(t)\right)dt \le c_2+TMe^{\|q\|_{L^1}},$$

其中 M 如(H_3)中定义。因此，对所有的 n，存在常数 $c_3>0$ 使得

$$\int_0^T e^{Q(t)}\left|f_\lambda\left(u_n(t)\right)\right|dt \le c_3. \tag{11}$$

另一方面，如果在(9)中取 $v(t)\equiv w_n(t) := u_n(t)-\bar{u}_n$ (其中 $\bar{u}_n(t)=\frac{1}{T}\int_0^T u_n(t)dt$)，同时注意(11)式，我们得到

$$\begin{aligned} c_4\|w_n\|_{H_T^1} &\ge \left|\int_0^T e^{Q(t)}\left[\frac{1}{2}w_n'(t)^2-f_\lambda\left(u_n(t)\right)w_n(t)+g(t)w_n(t)\right]dt\right| \\ &\ge \frac{e^{-\|q\|_{L^1}}}{2}\|w_n'\|_{L^2}^2-\left(c_3+e^{\|q\|_{L^1}}\|g\|_{L^1}\right)\|w_n\|_{L^\infty} \\ &\ge \frac{e^{-\|q\|_{L^1}}}{2}\|w_n'\|_{L^2}^2-c_5\|w_n\|_{H_T^1}\end{aligned}.$$

由于在 Sobolev 空间 H_T^1 中，$\bar{w}_n(t)=\bar{u}_n(t)-\bar{u}_n(t)=0$，由 Poincaré-Wirtinger 不等式，存在常数 $c_6>0$，使得

$$\|u_n'\|_{L^2} \le \|w_n\|_{H_T^1} \le c_6. \tag{12}$$

下面，用反证法证明 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的有界性。假设 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 无界，即

$$\|u_n\|_{H_T^1}\to+\infty,\ \text{当}\ n\to+\infty,$$

由(12)式，则或者

$$M_n := \max u_n \to +\infty,\ \text{当}\ n\to+\infty, \tag{13}$$

或者

$$m_n := \min u_n \to -\infty,\ \text{当}\ n\to+\infty, \tag{14}$$

(i) 我们假设(13)成立，则有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}\left[F_\lambda\left(u_n(t)\right)-g(t)u_n(t)\right]\mathrm{d}t \\
&=\int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}\left[\int_1^{u_n(t)} f_\lambda(s)\mathrm{d}s-g(t)u_n(t)\right]\mathrm{d}t \\
&=\int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}\left[\left(\int_1^{M_n} f_\lambda(s)\mathrm{d}s-\int_{u_n(t)}^{M_n} f_\lambda(s)\mathrm{d}s\right)-g(t)u_n(t)\right]\mathrm{d}t \\
&=\int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}\left[F_\lambda(M_n)-M_n g(t)\right]\mathrm{d}t-\int_0^T\left[\int_{u_n(t)}^{M_n}\mathrm{e}^{Q(t)}\left(f_\lambda(s)-g(t)\right)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t \\
&\ge \int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}\left[F_\lambda(M_n)-M_n g(t)\right]\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{\|q\|_{L^1}}\|M-g\|_{L^1}\|M_n-u_n\|_C
\end{aligned},
$$

因此，由 Sobolev 不等式和 Ponicaré 不等式，以及(12)式，得到

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}\left[F_\lambda(M_n)-M_n g(t)\right]\mathrm{d}t \\
&\le \int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}\left[F_\lambda\left(u_n(t)\right)-g(t)u_n(t)\right]\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{\|q\|_{L^1}}\|M-g\|_{L^1}\|M_n-u_n\|_C . \\
&\le \int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}\left[F_\lambda\left(u_n(t)\right)-g(t)u_n(t)\right]\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{\|q\|_{L^1}}\|M-g\|_{L^1}\sqrt{T}c_6
\end{aligned}
$$

考虑到(8)式，我们知道

$$\int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}\left[F_\lambda(M_n)-M_n g(t)\right]\mathrm{d}t$$

有界，与条件(H_4)矛盾。

(ii) 我们假设(14)成立，即当 $n\to+\infty$ 时， $m_n\to-\infty$ 。我们用 $-m_n$ 代替 M_n ，类似(i)的证明过程，得出矛盾。

因此， Φ_λ 满足 P.S.条件。

其次，对任意的 $\lambda\in(0,1)$，证明存在 $m>0$ 使得

$$\inf_{u\in\partial\Omega}\Phi_\lambda(u)\ge -m .$$

这里

$$\Omega:=\left\{u\in H_T^1:\min u>1\right\},$$

以及

$$\partial\Omega=\left\{u\in H_T^1: u(t)\ge 1,\ \forall t\in[0,T],\ \exists t_u\in(0,T)\ s.t.\ u(t_u)=1\right\}.$$

对任意的 $u\in\partial\Omega$，存在某个 t_u 满足 $\min u=u(t_u)=1$，由(3)，我们得到

$$
\begin{aligned}
\Phi_\lambda(u)&=\int_{t_u}^{t_u+T}\mathrm{e}^{Q(t)}\left[\frac{1}{2}u'(t)^2-F_\lambda\left(u(t)\right)+g(t)u(t)\right]\mathrm{d}t \\
&=\int_{t_u}^{t_u+T}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{Q(t)}u'(t)^2\,\mathrm{d}t-\left[\int_{t_u}^{t_u+T}\mathrm{e}^{Q(t)}\left(M-g(t)\right)\left(u(t)-1\right)\mathrm{d}t-\int_{t_u}^{t_u+T}\mathrm{e}^{Q(t)}g(t)\mathrm{d}t\right]
\end{aligned}.
$$

由 Hölder 不等式，同时注意到 $u'(t)=\left(u(\cdot)-1\right)'(t)$，有

$$\Phi_\lambda(u)\ge\frac{\mathrm{e}^{-\|q\|_{L^1}}}{2}\left\|\left(u(\cdot)-1\right)'\right\|_{L^2}^2-\mathrm{e}^{\|q\|_{L^1}}\|M-g\|_{L^2}\|u(\cdot)-1\|_{L^2}-\mathrm{e}^{\|q\|_{L^1}}\|g\|_{L^1} .$$

另一方面，应用 Ponicaré 不等式，得

$$\Phi_\lambda(u)\ge\frac{\mathrm{e}^{-\|q\|_{L^1}}}{2}\|u'\|_{L^2}^2-T^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{\|q\|_{L^1}}\|M-g\|_{L^2}\|u'\|_{L^2}-\mathrm{e}^{\|q\|_{L^1}}\|g\|_{L^1} .$$

由以上两个不等式得出

$$\Phi_\lambda(u)\to+\infty\text{，当}\|u'\|_{L^2}\to+\infty.$$

由于 $\min u=1$，于是 $\|u(\cdot)-1\|_{H_T^1}\to+\infty$ 等价于 $\|u'\|_{L^2}\to+\infty$。因此

$$\Phi_\lambda(u)\to+\infty\text{，当}\|u\|_{H_T^1}\to+\infty\text{，}\quad u\in\partial\Omega.$$

即 Φ_λ 是强制的，存在最小序列。由 Φ_λ 的弱下半连续性，我们知道

$$\inf_{u\in\partial\Omega}\Phi_\lambda(u)>-\infty.$$

所以，对任意的 $\lambda\in(0,1)$，证明存在 $m>0$ 使得 $\inf_{u\in\partial\Omega}\Phi_\lambda(u)\ge-m$。

再次，我们证明存在常数 $\lambda_0\in(0,1)$，对任意的 $\lambda\in(0,\lambda_0)$，方程(2)的解 u 满足 $\Phi_\lambda(u)\ge-m$，且 $\min u\ge\lambda_0$。

用反证法，假设存在序列 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得

(i) $\lambda_n\le\dfrac{1}{n}$；

(ii) u_n 是方程(1.7)当 $\lambda=\lambda_n$ 时的解；

(iii) $\Phi_{\lambda_n}(u_n)\ge-m$；

(iv) $\min u_n<\dfrac{1}{n}$。

由于

$$\int_0^T e^{Q(t)}\left[f_{\lambda_n}(u_n(t))-g(t)\right]dt=0,\tag{15}$$

于是存在常数 $c_7>0$，使得

$$\left\|e^{Q(\cdot)}f_{\lambda_n}(u_n(\cdot))\right\|_{L^1}\le c_7.$$

另一方面，据边值条件 $u_n(0)=u_n(T)$，存在 $\tau_n\in(0,T)$ 满足 $u_n'(\tau_n)=0$。因此，得到

$$e^{Q(t)}u_n'(t)-e^{Q(\tau_n)}u_n'(\tau_n)=\int_{\tau_n}^t e^{Q(s)}\left[f_\lambda(u_n(s))-g(s)\right]ds,$$

同时据(15)，存在常数 $c_8>0$，使得

$$\|u_n'\|_{L^\infty}\le c_8.\tag{16}$$

由条件 $\Phi_{\lambda_n}(u_n)>-m$ 知，存在正常数 R_1 和 R_2 (不防设 $0<R_1<R_2$)使得

$$\max\{u_n(t):t\in[0,T]\}\in[R_1,R_2].$$

否则，假设 u_n 一致趋于 0 或 $+\infty$。据(H_2)，(H_4)以及(16)式，当 $n\to+\infty$ 时，

$$\Phi_{\lambda_n}(u_n)\to-\infty,$$

与 $\Phi_{\lambda_n}(u_n)>-m$ 的事实相矛盾。

当 n 充分大时，设 τ_n^1，τ_n^2 满足

$$u_n(\tau_n^1)=\frac{1}{n}<R_1=u_n(\tau_n^2).$$

方程(2)两边乘以u_n'，并对其在$\left[\tau_n^1,\tau_n^2\right]$ (或$\left[\tau_n^2,\tau_n^1\right]$)上积分，得到

$$\begin{aligned}J &:= \int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} u_n''(t)u_n'(t)\mathrm{d}t + \int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} q(t)u_n'(t)^2\mathrm{d}t + \int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} f_{\lambda_n}\left(u_n(t)\right)u_n'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} g(t)u_n'(t)\mathrm{d}t\end{aligned}.$$

显然，

$$J = J_1 + \frac{1}{2}\left[u_n'^2\left(\tau_n^1\right) - u_n'^2\left(\tau_n^2\right)\right] + \int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} q(t)u_n'^2(t)\mathrm{d}t,$$

其中

$$J_1 = \int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} f_{\lambda_n}\left(u_n(t)\right)u_n'(t)\mathrm{d}t.$$

由于q有界，g可积，且$\|u_n'\|_{L^\infty} \le c_8$，从而$J$有界，$J_1$也有界。另一方面，我们有

$$f_{\lambda_n}\left(u_n(t)\right)u_n'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[F_{\lambda_n}\left(u_n(t)\right)\right],$$

两边在$\left[\tau_n^1,\tau_n^2\right]$上积分，得

$$J_1 = F_{\lambda_n}(R_1) - F_{\lambda_n}\left(\frac{1}{n}\right).$$

与(H$_2$)得出的J_1无界矛盾。即方程(2)的解u满足$\Phi_\lambda(u) \ge -m$，且$\min u \ge \lambda_0$。因此u是方程(1.1)的解。

最后，我们证明当$\lambda \le \lambda_0$，Φ_λ满足山路几何条件。

由排斥奇异性，可以固定$\lambda \in (0,\lambda_0)$使得$f(\lambda) < 0$。从而，有

$$\begin{aligned}F_\lambda(0) &= \int_1^0 f_\lambda(s)\mathrm{d}s = -\int_0^1 f_\lambda(s)\mathrm{d}s \\ &= -\int_0^\lambda f(\lambda)\mathrm{d}s - \int_\lambda^1 f_\lambda(s)\mathrm{d}s \\ &= -\lambda f(\lambda) - \int_\lambda^1 f_\lambda(s)\mathrm{d}s\end{aligned}.$$

因此，

$$F_\lambda(0) > -\int_\lambda^1 f_\lambda(s)\mathrm{d}s = \int_1^\lambda f_\lambda(s)\mathrm{d}s = F_\lambda(\lambda).$$

所以

$$\Phi_\lambda(0) = -\int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}F_\lambda(0)\mathrm{d}t + \int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}g(t)0\mathrm{d}t \le -\int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}F_\lambda(\lambda)\mathrm{d}t. \tag{17}$$

据排斥奇异性，选择$\lambda \in (0,\lambda_0]$，使得对任意的$t \in [0,T]$，

$$F_\lambda(\lambda) > \frac{m}{T}\mathrm{e}^{\|q\|_{L^1}}.$$

由(17)，知$\Phi_\lambda(0) < -m$。

又据条件(H$_4$)，选择足够大的R使得$R > 1$，且

$$-\int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}\left[F_\lambda(R) - g(t)R\right]\mathrm{d}t < -m,$$

于是，

$$\Phi_\lambda(R) < -m .$$

因为Ω是R的邻域，$0 \notin \Omega$，且

$$\max\{\Phi_\lambda(0), \Phi_\lambda(R)\} < \inf_{u\in\partial\Omega} \Phi_\lambda(u).$$

由第一步和第二步的证明，我们知道Φ_λ有临界点u_λ使得

$$\Phi_\lambda(u_\lambda) = \inf_{\eta\in\Gamma} \max_{0\le s\le 1} \Phi_\lambda(\eta(s)) \ge \inf_{u\in\partial\Omega} \Phi_\lambda(u),$$

其中$\Gamma = \left\{\eta \in C\left([0,1], H_T^1\right) : \eta(0) = 0, \eta(1) = R\right\}$.

又由$\inf_{u\in\partial\Omega} \Phi_\lambda(u) \ge -m$，以及第三步的证明，$u_\lambda$是方程(1)的解。

基金项目

海南省自然科学基金(117005)，国家自然科学基金(11461016)，海南省高等学校教育教学改革研究项目(Hnjg2017-6)，海南大学教育教学研究项目(hdjy1715)。

参考文献 (References)

[1] Boccara, N. (1990) Functional Analysis. Academic Press, New York.

[2] Fonda, A., Manásevich, R. and Zanolin, F. (1993) Subharmonic Solutions for Some Second Order Differential Equations with Singularities. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **24**, 1294-1311. https://doi.org/10.1137/0524074

[3] Daoudi-Merzagui, N., Derrab, F. and Boucherif, A. (2012) Subharmonic Solutions of Nonautonomous Second Order Differential Equations with Singular Nonlinearities. *Abstract and Applied Analysis*, **2012**, Article ID 903281.

[4] Mawhin, J. and Willem, M. (1989) Critical Point Theory and Hamiltonian Systems. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2061-7

[5] Rabinowitz, P.H. (1986) Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. In: *Cbms Regional Conference Series in Mathematics*, Vol. 65, American Mathematical Society, Provodence, RI. https://doi.org/10.1090/cbms/065

[6] Schechter, M. (1999) Linking Methods in Critical Point Theory. Birkhauser, Boston. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1596-7

[7] Zhang, M. (1998) A Relationship between the Periodic and the Dirchlet BVPs of Singular Differential Equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*, **128**, 1099-1114. https://doi.org/10.1017/S0308210500030080

[8] Cheng, Z. and Ren, J. (2013) Studies on a Damped Differential Equation with Repulsive Singularity. *Mathematical Methods in Applied Sciences*, **36**, 983-992. https://doi.org/10.1002/mma.2659

[9] Li, X. and Zhang, Z. (2009) Periodic Solutions for Damped Differential Equations with a Weak Repulsive Singularity. *Nonlinear Analysis*, **70**, 2395-2399. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.03.023

[10] Wu, X., Chen, S. and Teng, K. (2008) On Variational Mathods for a Class of Damped Vibration Problems. *Nonlinear Analysis*, **68**, 1432-1441.