Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(5), 685-691
Published Online August 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.65081

Existence of Local Solutions to Perturbed Einstein-Yang/Mills Equations

Xu Wang

Department of Mathematics, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan
Email: 1298842745@qq.com

Received: Jul. 24th, 2017; accepted: Aug. 9th, 2017; published: Aug. 14th, 2017

Abstract

In this paper, we will give a rigorous proof of existence of local solutions to perturbed Einstein-Yang/Mills equations with gauge group SU(2), here we require the existence of zero point for A, and we consider the area in Holder spaces.

Keywords

Einstein-Yang/Mills Equations, Perturbed Term, Holder Spaces, Existence of Solutions

带扰动的Einstein-Yang/Mills方程局部解的存在性

王　旭

云南民族大学，数学与计算机科学学院，云南　昆明
Email: 1298842745@qq.com

收稿日期：2017年7月24日；录用日期：2017年8月9日；发布日期：2017年8月14日

摘　要

本文严格地证明了带扰动的Einstein-Yang/Mills方程在Holder空间中局部解的存在性，这里要求A具有零点。

关键词

Einstein-Yang/Mills方程，扰动项，Holder空间，解的存在性

文章引用: 王旭. 带扰动的 Einstein-Yang/Mills 方程局部解的存在性[J]. 应用数学进展, 2017, 6(5): 685-691.
DOI: 10.12677/aam.2017.65081

1. 引言

Yang/Mills 理论，是现代规范场理论的基础。由杨振宁和米尔斯在 1954 年首先提出来，通过后来许多学者于 1960 年到 1970 年代引入对称性自发破缺与渐进自由的观念，发展成今天的标准模型。杨－米尔斯理论作为克雷数学研究所提出的新前年七大问题之一，在当今物理界和数学界都是热门的问题，本文讨论静态球对称 Einstein-Yang/Mills 方程在 Holder 空间中局部解的存在性，这里 Einstein 度量[1]：

$$\mathrm{d}s^2=-AC^2\mathrm{d}t^2+A^{-1}\mathrm{d}r^2+r^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right) \tag{1.1}$$

SU(2)Yang/Mills 曲率-2 形式[2]：

$$F=w'\tau_1\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta+w'\tau_2\wedge(\sin\theta\mathrm{d}\phi)-\left(1-w^2\right)\tau_3\mathrm{d}\theta\wedge(\sin\theta\mathrm{d}\phi) \tag{1.2}$$

这里 A,C 和 w 都是关于 r 的函数，由(1.1)和(1.2)，得静态球对称 SU(2)EYM 方程为[3] [4]：

$$rA'+\left(1+2w'^2\right)A=1-\frac{\left(1-w^2\right)^2}{r^2} \tag{1.3}$$

$$r^2Aw''+\left[r(1-A)-\frac{\left(1-w^2\right)^2}{r}\right]w'+w\left(1-w^2\right)=0 \tag{1.4}$$

和

$$\frac{C'}{C}=\frac{2w'^2}{r} \tag{1.5}$$

由于(1.3)和(1.4)与 C 无关，所以本文我们主要的工作是耦合方程(1.3)，(1.4)进行分析。

为了使讨论更具有一般性，对原方程加入扰动项，使得(1.4)变为：

$$r^2Aw''+\left[r(1-A)-\frac{\left(1-w^2\right)^2}{r}\right]w'+\lambda w\left(1-w^2\right)=0 \tag{1.6}$$

这里的 λ 在 1 附近扰动。

2. 准备知识

为了使我们讨论方便，定义函数 ϕ：

$$\phi(A,w,r)=r(1-A)-\frac{u^2}{r} \tag{2.1}$$

这里 $u=1-w^2$。

设 $\bar{r}>0, A(\bar{r})=0, \bar{w}=w(\bar{r}), \beta=w'(\bar{r}), c=A'(\bar{r}), d=w''(\bar{r}), e=A''(\bar{r}), z=w'$。则由(1.3)，(1.6)得

$$\phi(\bar{r})\beta+\lambda\bar{w}\left(1-\bar{w}^2\right)=0 \tag{2.2}$$

$$d=-\frac{\beta}{2}\left[\frac{2\left(1-\overline{w}^2\right)^2\Big/\overline{r}^2+4\lambda\overline{w}\beta\left(1-\overline{w}^2\right)\Big/\overline{r}-\left(1-3\overline{w}^2\right)}{\overline{r}-\left(1-\overline{w}^2\right)^2\Big/\overline{r}}\right] \tag{2.3}$$

$$z'=\frac{-\phi z-\lambda w\left(1-w^2\right)}{r^2A} \tag{2.4}$$

$$A'=\frac{1-\left(1-w^2\right)^2\Big/r^2}{r}-\frac{\left(1+2z^2\right)A}{r} \tag{2.5}$$

设 $\rho=r-\overline{r}$，由泰勒展开并引入算子 B 有 $A(r)=c\rho+\frac{1}{2}e\rho^2=c\rho B(r)$，解得 $B(r)=1+\frac{e}{2c}\rho=B(\overline{r})+B'(\overline{r})\rho$，得

$$B'(\overline{r})=\frac{e}{2c} \tag{2.6}$$

3. 局部解的存在唯一性

定理：若 $\phi(\overline{r})=\overline{r}-\frac{\left(1-\overline{w}^2\right)^2}{\overline{r}}\neq 0$，则对于带扰动的静态球对称 EYM 方程(1.3)和(1.6)，在区域 $\overline{r}<r<\overline{r}+s(\overline{w})$ 上，方程解具有存在唯一性。

证明：取 $\varepsilon>0$，我们考虑在 *Holder* 空间下的范数[5]：

$$C^{\alpha}(\overline{r},\overline{r}+\varepsilon):\|f\|_{\alpha}=\sup\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}+|f(\overline{r})|$$

$$C^{1+\alpha}(\overline{r},\overline{r}+\varepsilon):\|f\|_{1+\alpha}=\|f'\|_{\alpha}+|f(\overline{r})|$$

$$C^{2+\alpha}(\overline{r},\overline{r}+\varepsilon):\|f\|_{2+\alpha}=\frac{1}{2}\|f'\|_{1+\alpha}+|f(\overline{r})|$$

并定义集合 $D_i,i=1,2,3$：

$$D_1=D_1(\varepsilon)=\left\{w\in C^{2+\alpha}(\overline{r},\overline{r}+\varepsilon)\right\}$$

$$D_1=D_2(\varepsilon)=\left\{z\in C^{1+\alpha}(\overline{r},\overline{r}+\varepsilon)\right\}$$

$$D_3=D_3(\varepsilon)=\left\{A\in C^{2+\alpha}(\overline{r},\overline{r}+\varepsilon)\right\}$$

因为集合 D_1 是 $C^{2+\alpha}(\overline{r},\overline{r}+\varepsilon)$ 上的闭集，易得 D_1 是完备的度量空间[5]，同理，D_2 和 D_3 也是完备的度量空间。定义 X 为

$$X=D_1\times D_2\times D_3$$

这里 $\theta=(w,z,A)\in X$，定义度量[5]：

$$d(\theta_1,\theta_2)=\max\left\{\|w_1-w_2\|_{2+\alpha},\|z_1-z_2\|_{1+\alpha},\|A_1-A_2\|_{2+\alpha}\right\}$$

若 $w_1,w_2\in D_1$，由于 $w_1(\overline{r})=w_2(\overline{r})=\overline{w},\ w_1'(\overline{r})=w_2'(\overline{r})=\beta$，则：

$$\begin{aligned}\|w_1-w_2\|_{2+\alpha}&=\frac{1}{2}\|w_1'-w_2'\|_{1+\alpha}+|\overline{w}_1-\overline{w}_2|\\&=\frac{1}{2}\|w_1''-w_2''\|_{\alpha}+\frac{1}{2}|\overline{w}_1'-\overline{w}_2'|+|\overline{w}_1-\overline{w}_2|\\&=\frac{1}{2}\sup\frac{|w_2''(x)-w_1''(y)|}{|x-y|^{\alpha}}+\frac{1}{2}\|w_1''-w_2''\|+\frac{1}{2}|\overline{w}_1'-\overline{w}_2'|+|\overline{w}_1-\overline{w}_2|\\&=\frac{1}{2}\sup\frac{|w_2''(x)-w_1''(y)|}{|x-y|^{\alpha}}\end{aligned}$$

同理得

$$\|z_1-z_2\|_{2+\alpha}=\frac{1}{2}\sup\frac{|z_2''(x)-z_1''(y)|}{|x-y|^{\alpha}}$$

$$\|A_1-A_2\|_{2+\alpha}=\frac{1}{2}\sup\frac{|A_2''(x)-A_1''(y)|}{|x-y|^{\alpha}}$$

再定义映射 $T:X\to X$ 为：$T(w,z,A)=(\tilde{w}\cdot\tilde{z},\tilde{A})$，这里

$$\tilde{w}=T_1(w,z,A)=\overline{w}+\int_{\overline{r}}^{r}z(s)\mathrm{d}s$$

$$\tilde{z}=T_2(w,z,A)=\beta-\int_{\overline{r}}^{r}\frac{\lambda uw+\phi z}{s^2A}\mathrm{d}s$$

$$\tilde{A}=T_3(w,z,A)=\int_{\overline{r}}^{r}\frac{\left(1-\frac{u^2}{s^2}\right)-(1+2z^2)A}{s}\mathrm{d}s$$

下面我们证明：对于 $\forall\sigma>0$，$\exists\varepsilon>0$，s.t $T(B_\sigma)\subset B_\sigma$，且 T 是压缩映射[5]。这里 B_σ 表示半径为 σ 的球。用泰勒展开可得：

$$w(r)=w(\overline{r})+w'(r-\overline{r})+\frac{1}{2}w''(r-\overline{r})^2+\cdots$$

$$w'(r)=w'(\overline{r})+w''(r-\overline{r})+\frac{1}{2}w'''(r-\overline{r})^2+\cdots$$

$$A(r)=A(\overline{r})+A'(r-\overline{r})+\frac{1}{2}A''(r-\overline{r})^2+\cdots$$

易得球上的点可表示为：

$$\left(w(r),z(r),A(r)\right)=\left(\overline{w}+\beta(r-\overline{r})+\frac{1}{2}d(r-\overline{r})^2,\beta+d(r-\overline{r}),c(r-\overline{r})+\frac{1}{2}e(r-\overline{r})^2\right)$$

由于 $r-\overline{r}<\varepsilon$，显然当 ε 充分小时，$T(B_\sigma)\subset B_\sigma$，即 T 为自映射得证。

接下来我们证明 T 是压缩映射：

先考虑 T_1，令 $\theta_i=(w_i,z_i,A_i),i=1,2$；则

$$T_1(\theta_1)-T_1(\theta_2)=w_1(\overline{r})-w_2(\overline{r})+\int_{\overline{r}}^{r}z(s_1)\mathrm{d}s-\int_{\overline{r}}^{r}z(s_2)\mathrm{d}s=\int_{\overline{r}}^{r}(z_1-z_2)\mathrm{d}s$$

$$\begin{aligned}\|T_1(\theta_1)-T_1(\theta_2)\|_{2+\alpha}&=\left\|\int_{\bar r}^{r}(z_1-z_2)\mathrm{d}s\right\|_{2+\alpha}\\&=\frac{1}{2}\|z(r_1)-z(r_2)+z_2(\bar r)-z_1(\bar r)\|_{1+\alpha}+\left|\int_{\bar r}^{r}(z_1-z_2)\mathrm{d}s\right|\\&=\frac{1}{2}\|z_1-z_2\|_{1+\alpha}\le\frac{1}{2}\|\theta_1-\theta_2\|_{1+\alpha}\le\frac{1}{2}\|\theta_1-\theta_2\|_{2+\alpha}\end{aligned}$$

则 T_1 为压缩映射得证。接下来证明 T_3 也是压缩映射：

$$T_3(\theta_1)-T_3(\theta_2)=\int_{\bar r}^{r}\left[\left(\frac{1-\frac{u_1^2}{s^2}}{s}-\frac{(1+2z_1^2)A_1}{s}\right)-\left(\frac{1-\frac{u_2^2}{s^2}}{s}-\frac{(1+2z_2^2)A_2}{s}\right)\right]\mathrm{d}s$$

$$\|T_3(\theta_1)-T_3(\theta_2)\|_{2+\alpha}=\frac{1}{2}\left\|\frac{u_2^2-u_1^2}{r^3}+\frac{A_2-A_1}{r}+\frac{2}{r}(z_2^2A_2-z_1^2A_1)\right\|_{1+\alpha}$$

其中，对上式用推广的 Holder 不等式[6]可得

$$\left\|\frac{2}{r}(z_2^2A_2-z_1^2A_1)\right\|_{1+\alpha}\le\frac{2}{r}\left[\|z_2^2(A_2-A_1)\|_{1+\alpha}+\|(z_2^2-z_1^2)A_1\|_{1+\alpha}\right]$$

$$\|z_2^2(A_2-A_1)\|_{1+\alpha}\le\|z_2^2\|_{\infty}\|A_2-A_1\|_{1+\alpha}+\|z_2^2\|_{1+\alpha}\|A_2-A_1\|_{\infty}$$

$$\|(z_2^2-z_1^2)A_1\|_{1+\alpha}\le\|z_2^2-z_1^2\|_{1+\alpha}\|A_1\|_{\infty}+\|z_2^2-z_1^2\|_{\infty}\|A_1\|_{1+\alpha}$$

又因为当 ε 充分小时，$\|A_1\|_{1+\alpha}\to 0$ 且 $\|A_2-A_1\|_{1+\alpha}\to 0$，易得 $\|T_3(\theta_1)-T_3(\theta_2)\|_{2+\alpha}\to 0$，即有 $\|T_3(\theta_1)-T_3(\theta_2)\|_{2+\alpha}\le\delta\|\theta_1-\theta_2\|_{2+\alpha}\ (0<\delta<1)$，于是 T_3 为压缩映射得证[5]。

下面证明 T_2 也是压缩映射。实际上

$$T_2(\theta_1)-T_2(\theta_2)=\int_{\bar r}^{r}\left[\frac{\lambda u_2w_2}{s^2A_2}-\frac{\lambda u_1w_1}{s^2A_1}+\frac{\phi_2z_2}{s^2A_2}-\frac{\phi_1z_1}{s^2A_1}\right]\mathrm{d}s$$

再由(2.2)可得：

$$T_2(\theta_1)-T_2(\theta_2)=\int_{\bar r}^{r}\left[\frac{\lambda u_2w_2-\lambda\overline{uw}}{s^2A_2}-\frac{\lambda u_1w_1-\lambda\overline{uw}}{s^2A_1}+\frac{\phi_2z_2-\bar\phi\bar z}{s^2A_2}-\frac{\phi_1z_1-\bar\phi\bar z}{s^2A_1}\right]\mathrm{d}s$$

为了计算方便，我们引入算子 Δ，并定义 $\Delta(f)=f_1-f_2$，则上式化简为：

$$T_2(\theta_1)-T_2(\theta_2)=\int_{\bar r}^{r}\left[\Delta\left(\frac{uw-\overline{uw}}{s^2A}\right)+\Delta\left(\frac{\phi z-\bar\phi\bar z}{s^2A}\right)\right]\mathrm{d}s$$

则

$$\begin{aligned}\|T_2(\theta_1)-T_2(\theta_2)\|_{1+\alpha}&=\left\|\Delta\left(\frac{uw-\overline{uw}}{r^2A}\right)+\Delta\left(\frac{\phi z-\bar\phi\bar z}{r^2A}\right)\right\|_{\alpha}\\&\le\left\|\Delta\left(\frac{uw-\overline{uw}}{r^2A}\right)\right\|_{\alpha}+\left\|\Delta\left(\frac{\phi z-\bar\phi\bar z}{r^2A}\right)\right\|_{\alpha}\end{aligned}\tag{3.1}$$

由(2.6)有

$$\frac{uw-\overline{uw}}{r^2A}=\frac{1}{cBr^2}\left(\frac{uw-\overline{uw}}{\rho}\right)$$

则当$\varepsilon\to 0$时，有$\left\|\Delta\left(\frac{uw-\overline{uw}}{r^2A}\right)\right\|_\alpha\to 0$。对于(3.1)最右边部分，令

$$\frac{\phi z-\overline{\phi}\,\overline{z}}{r^2A}=\frac{\phi z-\overline{\phi}z}{r^2A}+\frac{\overline{\phi}z-\overline{\phi}\,\overline{z}}{r^2A} \tag{3.2}$$

其中

$$\frac{\phi z-\overline{\phi}z}{r^2A}=\frac{z}{r^2cB}\left(\frac{\phi-\overline{\phi}}{\rho}\right)$$

则当$\varepsilon\to 0$时，有$\left\|\Delta\left(\frac{\phi z-\overline{\phi}z}{r^2A}\right)\right\|_\alpha\to 0$。由于$d,\rho,\overline{\phi}$均与$r_1,r_2$无关，故$\Delta\left(d\rho\overline{\phi}\right)=0$，则对于(3.2)式最后一项，我们有

$$\left\|\Delta\left(\frac{\overline{\phi}z-\overline{\phi}\,\overline{z}}{r^2A}\right)\right\|_\alpha=\left\|\Delta\left(\frac{\overline{\phi}z-d\rho\overline{\phi}-\overline{\phi}\,\overline{z}}{r^2A}\right)\right\|_\alpha=\left\|\Delta\left(\frac{\overline{\phi}z-d\rho\overline{\phi}-\overline{\phi}\,\overline{z}}{cr^2\rho B}\right)\right\|_\alpha \tag{3.3}$$

为了表示方便，令

$$n(r)=\frac{\overline{\phi}z-d\rho\overline{\phi}-\overline{\phi}\,\overline{z}}{cr^2}$$

则

$$\left\|\Delta\left(\frac{\overline{\phi}z-\overline{\phi}\,\overline{z}}{r^2A}\right)\right\|_\alpha=\left\|\frac{n_2}{\rho B_2}-\frac{n_1}{\rho B_1}\right\|_\alpha\le\left\|\frac{n_2}{\rho B_2}-\frac{n_2}{\rho B_1}\right\|_\alpha+\left\|\frac{n_2}{\rho B_1}-\frac{n_1}{\rho B_1}\right\|_\alpha \tag{3.4}$$

其中$\frac{n_2}{\rho B_2}-\frac{n_2}{\rho B_1}=\frac{n_2}{B_1B_2}\left(\frac{B_1-B_2}{\rho}\right)$，则由推广的 Holder 不等式有[6]：

$$\left\|\frac{n_2}{\rho B_2}-\frac{n_2}{\rho B_1}\right\|_\alpha\le\left\|\frac{n_2}{B_1B_2}\right\|_\infty\left\|\frac{B_1-B_2}{\rho}\right\|_\alpha+\left\|\frac{n_2}{B_1B_2}\right\|_\alpha\left\|\frac{B_1-B_2}{\rho}\right\|_\infty$$

则当$\varepsilon\to 0$时，有$\left\|\frac{n_2}{\rho B_2}-\frac{n_2}{\rho B_1}\right\|_\alpha\to 0$。再考虑(3.4)最右式，为表示方便令$h(r)=\frac{\overline{\phi}}{B_1r^2c}$，则

$$\left\|\frac{n_2}{\rho B_1}-\frac{n_1}{\rho B_1}\right\|_\alpha=\left\|\left(\frac{\overline{\phi}}{B_1r^2c}\right)\left(\frac{z_2-z_1}{\rho}\right)\right\|_\alpha=\left\|h\frac{z_2-z_1}{\rho}\right\|_\alpha$$

再由推广的 Holder 不等式[6]得

$$\left\|\frac{n_2}{\rho B_1}-\frac{n_1}{\rho B_1}\right\|_\alpha\le\|h\|_\infty\left\|\frac{z_2-z_1}{\rho}\right\|_\alpha+\|h\|_\alpha\left\|\frac{z_2-z_1}{\rho}\right\|_\infty$$

这里，$\|h\|_\alpha$有界，当$\varepsilon\to 0$时，有$\left\|\frac{z_2-z_1}{\rho}\right\|_\infty\to 0$。又因为$c=\frac{\overline{\phi}}{\overline{r}^2}$，故$h(\overline{r})=1$，$h\in C^{1+\alpha}$，故$(h-1)\in C^{1+\alpha}$，$\|h-1\|_\infty\to 0$ (当$\varepsilon\to 0$时) [6]。于是我们可取$0<\delta<\alpha$，s.t $\|h\|_\infty\le 1+\delta$。则

$$\left\| \frac{n_2}{\rho B_1} - \frac{n_1}{\rho B_1} \right\|_\alpha \le (1+\delta)\frac{1}{1+\alpha}\|z_2 - z_1\|_{1+\alpha} + O(\varepsilon)$$

这里 $(1+\delta)\dfrac{1}{1+\alpha} < 1$，故可得(3.3)左式为：

$$\left\| \Delta\left(\frac{\bar{\phi} z - \bar{\phi}\bar{z}}{r^2 A} \right) \right\|_\alpha \le (1+\delta)\frac{1}{1+\alpha}\|z_2 - z_1\|_{1+\alpha} + O(\varepsilon)$$

故有 $\|T_2(\theta_1) - T_2(\theta_2)\|_{2+\alpha} \le (1+\delta)/(1+\alpha)\|\theta_1 - \theta_2\|_{2+\alpha}$，于是 T_2 为压缩映射得证。

于是，在区域 $\bar{r} \le r \le \bar{r} + s(\bar{w})$ 上，由 Banach 不动点定理，可得 T 存在唯一不动点[5] $(A(r,\bar{w}), w(r,\bar{w}), w'(r,\bar{w})) \in X$ 。

参考文献 (References)

[1] Buzzi, C.A. and Libre, J. (2012) On the Periodic Solutions of the Static, Spherically Symmetric Einstein-Yang-Mills Equations. *Journal of Mathematical Physics*, **53**, 1853-1856. https://doi.org/10.1063/1.4770046

[2] Libre, J. and Yu, J. (2009) On the Periodic Orbits of the Static, Spherically Symmetric Einstein-Yang-Mills Equations. *Communications in Mathematical Physics*, **286**, 277-281. https://doi.org/10.1007/s00220-008-0590-6

[3] Starkov, K.E. (2010) Compact Invariant Sets of the Static Spherically Symmetric Einstein-Yang-Mills Equations. *Physics Letters A*, **374**, 1728-1731. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2010.02.035

[4] Oliynyk, T.A. and Kunzle, H.P. (2002) Local Existence Proofs for the Boundary Value Problem for Static Spherically Symmetric Einstein-Yang-Mills Fields with Compact Gauge Groups. *Journal of Mathematical Physics*, **43**, 2363-2393. https://doi.org/10.1063/1.1463216

[5] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义(上册) [M]. 北京: 北京大学出版社, 2006.

[6] 王明新. 索伯列夫空间[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.