Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(7), 892-895
Published Online October 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.67107

On the Asymptotic Behavior of $x_{n+1} = x_n^2 + x_{n-1}^2$

Shaogao Deng[1], **Lijun Zhu**[2], **Yue Chao**[1]

[1]School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan
[2]School of Mathematics and Information science, North Minzu University, Yinchuan Ningxia
Email: sgdeng@swjtu.edu.cn, zhulijun1995@yahoo.com, 1393326446@qq.com

Received: Oct. 8th, 2017; accepted: Oct. 24th, 2017; published: Oct. 31st, 2017

Abstract

This paper considers a nonlinear difference equation $x_{n+1} = x_n^2 + x_{n-1}^2$ with the initial values $x_0, x_1 \in (0,\infty)$. The sufficient conditions under which the solutions converge to zero or diverge to infinity have been obtained.

Keywords

Difference Equation, Equilibrium Point, Asymptotically Stable

差分方程$x_{n+1} = x_n^2 + x_{n-1}^2$解的渐近性质

邓绍高[1]，**朱立军**[2]，**晁　越**[1]

[1]西南交通大学，数学学院，四川 成都
[2]北方民族大学，数学与信息科学学院，宁夏 银川
Email: sgdeng@swjtu.edu.cn, zhulijun1995@yahoo.com, 1393326446@qq.com

收稿日期：2017年10月8日；录用日期：2017年10月24日；发布日期：2017年10月31日

摘　要

本文讨论了非线性差分方程$x_{n+1} = x_n^2 + x_{n-1}^2$的解的渐近性质，给出了零解的收敛域的一个子域以及得到了初始值x_0, x_1在满足一定的条件下其解发散到无穷大的结论。

文章引用: 邓绍高, 朱立军, 晁越. 差分方程$x_{n+1} = x_n^2 + x_{n-1}^2$解的渐近性质[J]. 应用数学进展, 2017, 6(7): 892-895.
DOI: 10.12677/aam.2017.67107

关键词

差分方程，平衡点，渐近稳定

1. 引言

差分方程在工程技术、经济理论和社会科学中有着十分重要的作用。因此，有许多作者从事差分方程的研究，并取得了很多成果，可参见文献[1] [2] [3] [4]。本文将研究如下的二阶非线性差分方程：

$$x_{n+1} = x_n^2 + x_{n-1}^2 \tag{1.1}$$

其初始 $x_0, x_1 \in (0, +\infty)$。

设 I 为某实数区间，函数 $f: I^{k+1} \to I$ 连续可微， $u = f(v_0, v_1, \cdots, v_k)$，差分方程：

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}), n \in \{k, k+1, \cdots\} \tag{1.2}$$

其初始值 $x_i \in I, i \in N(0,k) = \{0,1,\cdots,k\}$。

关于差分方程的平衡点、平衡点的稳定性和渐近稳定性以及渐近平衡点的吸引域的有关概念请参看文献[5]。

设 β 是方程(1.2)的平衡点，令

$$p_i = \dot{f}_{v_i}(\beta, \beta, \cdots, \beta),\ \ i \in N(0,k)$$

称方程：

$$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1} + \cdots + p_k y_{n-k} \tag{1.3}$$

为方程(1.2)在平衡点 β 处的线性化方程；

称方程：

$$\lambda^{k+1} - p_0 \lambda^k - p_1 \lambda^{k-1} - \cdots - p_k = 0 \tag{1.4}$$

为方程(1.3)的特征方程(参看文献[5])。

引理 1.1 [5]：设 f 是定义在点 $(\beta, \beta, \cdots, \beta) \in I^{k+1}$ 处的某个开邻域内的连续可微函数，其中 β 是方程(1.2)的平衡点。若方程(1.3)的全部特征根的模都小于 1，则方程(1.2)的平衡点 β 是(局部)渐近稳定的；若方程(1.3)至少有一个特征根的模大于 1，则方程(1.2)的平衡点 β 是不稳定的。

上述差分方程(1.1)有两个平衡点 $\beta = 0$ 和 $\beta = 0.5$。在平衡点 $\beta = 0$ 处，其线性化方程的特征根

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

所以平衡点 $\beta = 0$ 是渐近稳定的。在平衡点 $\beta = 0.5$ 处，其线性化方程有一特征根：

$$\lambda = \left(1+\sqrt{5}\right)/2 > 1$$

所以平衡点 $\beta = 0.5$ 是不稳定的。

本文给出了平衡点 $\beta = 0$ 的吸引域的子域。即当初始值 x_0, x_1 在这个子域中时，方程(1.1)的解收敛到

零；同时给出了当初始值 x_0, x_1 在一定的条件下方程(1.1)的解发散到无穷大的结论。

2. 主要结果

在初始值 x_0, x_1 满足条件： $x_0^2 + x_1^2 \geq 1$ 时，方程(1.1)的解发散到无穷。我们在此只给出平衡点 $\beta = 0$ 的吸引域的一个子域。

定理 2.1：设 $D = I^2 \setminus \{(0.5, 0.5)\}$，其中 $I = [0, 0.5]$，则 D 是平衡点 $\beta = 0$ 的吸引域的子域。即 $\forall (x_0, x_1) \in D$ 方程(1.1)的解 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

证明：$\forall (x_0, x_1) \in D$，有 $x_2 = x_0^2 + x_1^2 < 0.5^2 + 0.5^2 = 0.5$，

$$x_3 = x_2^2 + x_1^2 < 0.5^2 + 0.5^2 = 0.5$$

令 $r = 2\max\{x_2, x_3\}$，则 $r < 1, x_2 \leq 0.5r, x_3 \leq 0.5r$，

则，$x_4 = x_3^2 + x_2^2 \leq (0.5r)^2 + (0.5r)^2 = 0.5r^2 \leq 0.5r$，

$$x_5 = x_4^2 + x_3^2 \leq (0.5r)^2 + (0.5r)^2 = 0.5r^2$$

设 $x_{2k} \leq 0.5r^k, x_{2k+1} \leq 0.5r^k, k \geq 1$，则

$$x_{2(k+1)} = x_{2k+1}^2 + x_{2k}^2 \leq (0.5r^k)^2 + (0.5r^k)^2 = 0.5r^{2k} \leq 0.5r^{k+1} \leq 0.5r^k,$$

$$x_{2(k+1)+1} = x_{2(k+1)}^2 + x_{2k+1}^2 \leq (0.5r^k)^2 + (0.5r^k)^2 = 0.5r^{2k} \leq 0.5r^{k+1}.$$

故，$\forall n \in N, x_{2n} \leq 0.5r^n, x_{2n+1} \leq 0.5r^n$ 成立。

由此得 $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = 0, \lim_{n\to\infty} x_{(2n+1)} = 0$。

从而，$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$。证毕。

注记 2.1：定理 2.1 给出了平衡点 $\beta = 0$ 的吸引域的子域，也暗示了在初始值 x_0, x_1 满足条件：$x_0^2 + x_1^2 < 1$ 时，方程(1.1)的解有可能收敛到零，也可能发散到无穷大。

定理 2.2：当 $x_0 \geq 0.5, x_1 > 0.5$ 或 $x_0 > 0.5, x_1 \geq 0.5$ 时，方程(1.1)的解 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 发散到无穷大。即：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

证明：$x_2 = x_1^2 + x_0^2 > 0.5^2 + 0.5^2 = 0.5$，

$$x_3 = x_2^2 + x_1^2 > 0.5^2 + 0.5^2 = 0.5,$$

令 $r = 2\min\{x_2, x_3\}$，

则 $r > 1, x_2 \geq 0.5r, x_3 \geq 0.5r$。

假设 $k \geq 1, x_{2k} \geq 0.5r^k, x_{(2k+1)} \geq 0.5r^k$，

则 $x_{2(k+1)} = x_{2k+1}^2 + x_{2k}^2 \geq (0.5r^k)^2 + (0.5r^k)^2 = 0.5r^{2k} \geq 0.5r^{k+1} \geq 0.5r^k$，

$$x_{2(k+1)+1} = x_{2(k+1)}^2 + x_{2k+1}^2 \geq (0.5r^k)^2 + (0.5r^k)^2 \geq 0.5r^{k+1}.$$

即 $\forall n \in N$，$n \geq 1$，$x_{2n} \geq 0.5r^n$，$x_{(2n+1)} \geq 0.5r^n$。

所以 $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \infty$，$\lim_{n\to\infty} x_{(2n+1)} = \infty$。

从而得 $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ 。证毕。

注记 2.2： 首先，我们可以判断平衡点 $\beta = 0$ 的吸引域的边界曲线是：

$$x_1 = x_1(x_0), (0 \le x_0 \le c),$$

且 x_1 是关于 x_0 单调递减的和经过点 $(0.5, 0.5)$，其中 c 是某个常数。但要具体地求出 c 的值是不容易的，若要确定这条边界曲线那就更复杂了。

下面我们来估计一下常数 c 的取值范围。

设 $x_1 = 0$，则 $x_2 = x_1^2 + x_0^2 = x_0^2$；

$$x_3 = x_2^2 + x_1^2 = x_0^4;$$

$$x_4 = x_3^2 + x_2^2 = x_0^8 + x_0^4 < 1;$$

由此得， $x_0 < \sqrt[4]{0.5\sqrt{5} - 0.5}$ 。

所以， $c < \sqrt[4]{0.5\sqrt{5} - 0.5}$ 。

另一方面，由定理 2.1 知，当 $x_1 = 0$， $x_0 = 0.5$ 时， $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ 。

综上可得， $0.5 \le c < \sqrt[4]{0.5\sqrt{5} - 0.5}$ 。

其次，当 $x_0 = 0$ 时，我们来估计一下 x_1 的取值范围。

$$x_2 = x_1^2 + x_0^2 = x_1^2;$$

$$x_3 = x_2^2 + x_1^2 = x_1^4 + x_1^2 < 1;$$

同上可得， $0.5 \le x_1 < \sqrt{0.5\sqrt{5} - 0.5}$ 。

由于 $\sqrt{0.5\sqrt{5} - 0.5} \approx 0.7862$, $\sqrt[4]{0.5\sqrt{5} - 0.5} \approx 0.8867$ 可知，定理 2.1 中的吸引域的子域已经是吸引域的大部分了。

基金项目

国家自然科学基金(61362033)；四川省科技厅基础研究计划(2011JYZ002)；西南交通大学本科教育教学研究与改革项目(201704010)。

参考文献 (References)

[1] Amleh, A.M., Grove, E.A., Ladas, G. and Georgiou, D.A. (1999) On the Recursive Sequence $x_{n+1} = \alpha + x_{n-1}/x_n$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **233**, 790-798. https://doi.org/10.1006/jmaa.1999.6346

[2] Stevic, S. (2009) Boundedness Character of a Class of Difference Equations. *Nonlinear Analysis*, **70**, 839-848. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.01.014

[3] 徐胜荣，王希超，周营营. 一类差分方程的稳定性研究[J]. 山东农业大学学报(自然科学版), 2013, 44(4): 624-629.

[4] 尤严. 一类非线性二阶差分方程 Robin 问题多个正解的存在性[J]. 吉林大学学报(理学版), 2017, 55(2): 257-261.

[5] Elaydi, S. (2005) An Introduction to Difference Equations. 3rd Edition, Springer-Verlag, Berlin.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org