Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(8), 968-974
Published Online November 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.68116

Hans汉斯

Sign-Changing Solutions for Two-Point Boundary Value Problems of Three-Order Nonlinear Differential Equations

Hongwei Ji

Department of Mathematics and Physics, Nantong Normal College, Nantong Jiangsu
Email: hwj0606@163.com

Received: Oct. 11th, 2017; accepted: Nov. 1st, 2017; published: Nov. 27th, 2017

Abstract

In this paper, we use the fixed point theorem with Banach lattice structure and topological degree to discuss the three-order two-point boundary value problem $-u'''(t)=f(u(t))$ for all $t\in[0,1]$ subject to $u(0)=u'(0)=u''(1)=0$, where $f\in C(R,R)$. If f satisfies certain conditions, then the existence result of the sign-changing solution is obtained. Moreover, if f is odd for all $t\in[0,1]$, then the problem has two sign-changing solutions.

Keywords

Lattice Structure, Third-Order Two-Point Boundary Value Problem, Sign-Changing Solutions

一类三阶非线性微分方程两点边值问题的变号解

纪宏伟

南通师范高等专科学校数理系，江苏 南通
Email: hwj0606@163.com

收稿日期：2017年10月11日；录用日期：2017年11月1日；发布日期：2017年11月27日

摘 要

利用Banach格与拓扑度相结合的理论讨论带有边值 $u(0)=u'(0)=u''(1)=0$ 的三阶微分方程两点边值问

文章引用: 纪宏伟. 一类三阶非线性微分方程两点边值问题的变号解[J]. 应用数学进展, 2017, 6(8): 968-974.
DOI: 10.12677/aam.2017.68116

题 $-u'''(t)=f(u(t)), t\in[0,1]$，其中 $f\in C(R,R)$，得到所述问题变号解的存在性结果。进一步，如果 f 是奇函数，则问题有两个变号解。

关键词

格结构，三阶两点边值问题，变号解

1. 引言

本文主要研究三阶两点边值问题

$$\begin{cases}-u'''(t)=f(u(t)), t\in[0,1]\\ u(0)=u'(0)=u''(1)=0\end{cases} \tag{1}$$

变号解的存在性，其中 $f\in C(R,R)$。

三阶微分方程来源于应用数学和物理等各方面的领域，在许多科学领域及工程中具有十分广泛的应用[1]。近些年来，有许多文献研究各类边值问题变号解的存在性，所涉及到的理论和方法主要有Leray-Schauder度理论、不动点指数理论、临界群理论、变分法、下降流不变集、特征值等[2]-[8]。然而，在格结构下讨论三阶两点边值问题还比较少见。孙经先等人把格理论与拓扑度理论结合在一起，利用格理论研究非锥映射的拓扑度与不动点指数的计算，得出带有格结构的新的不动点存在定理[9] [10]。文献[11] [12] [13] [14] [15]分别对二阶三点边值问题、三阶两点边值问题、四阶两点边值问题的变号解进行了研究。受这些文献的启发，本文主要利用格结构下的不动点定理，结合所对应的线性问题的特征值以及代数重数，研究问题(1)变号解的存在结果，改进和推广了文[15] [16]的结果。

以下我们给出非线性项 f 的假设

(H_1) $f(0)=0$ 且 $f(u)$ 关于 u 严格递增；

(H_2) $\lim\limits_{|u|\to+\infty}\frac{f(u)}{u}=\beta_1$ 关于 t 在 $[0,1]$ 上一致，且存在正整数 n_1 使得 $\lambda_{2n_1}<\beta_1<\lambda_{2n_1+1}$；其中，$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\lambda_{n+1}<\cdots$ 是方程 $e^{-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\lambda}}+2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}=0$ 的无穷多个正解；

(H_3) $\lim\limits_{u\to0}\frac{f(u)}{u}=\beta_0$ 关于 t 在 $[0,1]$ 一致成立，且 $0<\beta_0<\lambda_1$。

本文的主要结果如下：

定理 1：设条件(H_1) (H_2) (H_3)成立，则边值问题(1)至少存在一个变号解

2. 预备知识

设 P 是 Banach 空间 E 中的锥，E 中的半序由锥 P 导出。若存在常数 $N>0$，使得 $\theta\le x\le y\Rightarrow\|x\|\le N\|y\|$，则称 P 是正规锥。如果 P 含有内点，即 P 的内部 $\operatorname{int}P\ne\varnothing$，则称 P 是体锥。

E 在半序 $\le$ 下成为一个格，即对任意的 $x,y\in E$，$\sup\{x,y\}$ 和 $\inf\{x,y\}$ 都存在。对 $x\in E$，

$x^+=\sup\{x,\theta\}$，$x^-=\sup\{-x,\theta\}$，分别称为 x 的正部和负部，$|x|=x^++x^-$ 称为 x 的模。显然，$x^+\in P$，$x^-\in(-P)$，$|x|\in P$，$x=x^+-x^-$。

为了文中叙述方便，使用下列符号：$x_+=x^+, x_-=-x^-$。于是 $x=x_++x_-, |x|=x_+-x_-$。

设 $E=C[0,1]$，范数 $\|u\|=\max_{t\in[0,1]}|u(t)|$，$P=\{u\in E: u(t)\ge 0, t\in[0,1]\}$。显然 E 是 Banach 空间。P 是 E 的一个正规体锥，且 E 在锥 P 导出的半序"$\le$"下成为一个格。

分别定义算子 K,F 和 A 如下：

$$Ku(t)=\int_0^1 G(t,s)u(s)\mathrm{d}s, t\in[0,1], \forall u\in E$$

$$Fu(t)=f(u(t)), t\in[0,1], \forall u\in E$$

$$A=KF$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases} s\left(t-\dfrac{s}{2}\right), 0\le s\le t\le 1, \\ \dfrac{1}{2}t^2, 0\le t\le s\le 1 \end{cases}$$

是问题(1)所对应的 Green 函数。利用 Green 函数的性质，容易证明 $A: E\to E$ 是全连续算子，并且 $u\in C^3[0,1]$ 是问题(1)的解当且仅当 $u\in E$ 是算子 A 在 E 中的不动点。

引理 1：[7]算子 F 与 $A=KF$ 在格 $E=C[0,1]$ 上都是拟可加的。

引理 2：设 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\lambda_{n+1}<\cdots$ 是方程 $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\lambda}}+2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}=0$ 的正解，则 $\dfrac{1}{\lambda_1}>\dfrac{1}{\lambda_2}>\cdots>\dfrac{1}{\lambda_n}>\dfrac{1}{\lambda_{n+1}}>\cdots>0$ 分别为线性算子 K 的特征值，且每个特征值 $\dfrac{1}{\lambda_i}(i=1,2,\cdots)$ 的代数重数为 1。

证明：先考虑特征值问题

$$\begin{cases} -u'''(t)=\lambda u(t), t\in[0,1] \\ u(0)=u'(0)=u''(1)=0 \end{cases} \tag{2}$$

当 $\lambda>0$ 时，记 $\sqrt[3]{\lambda}=a$，则(2)的通解为

$$u(t)=C_1\mathrm{e}^{-at}+C_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}at+C_3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}at, t\in[0,1]。$$

其中 $C_i(i=1,2,3)$ 是任意常数，由 $u(0)=u'(0)=0$，可得 $C_2=-C_1, C_3=\sqrt{3}C_1$，所以

$$u(t)=C_1\left(\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}at+\sqrt{3}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}at\right), \ t\in[0,1]$$

又由 $u''(1)=0$，可得 $C_1\left(a^2\mathrm{e}^{-a}+2a^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}a}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)=0$，由于 $C_1\ne 0$，故 $a^2\mathrm{e}^{-a}+2a^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}a}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=0$，即 $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}a}+2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=0$。

又因为 $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}a}+2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=0$ 有无穷多个正解，记为 $0<a_1<a_2<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots$，所以

$\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\lambda}}+2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}=0$ 有无穷多个正解 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\lambda_{n+1}<\cdots$，其中 $\lambda_n=a_n^3$，$n=1,2,\cdots$，所以问题(2)有无穷多个正特征值 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$。

设 μ 是线性算子 K 的特征值，$u\in E\setminus\{0\}$ 是对应的特征函数。则

$$\begin{cases}-u'''(t)=\dfrac{1}{\mu}u(t),t\in[0,1]\\ u(0)=u'(0)=u''(1)=0\end{cases}$$

所以 $\frac{1}{\lambda_1}>\frac{1}{\lambda_2}>\cdots>\frac{1}{\lambda_n}>\frac{1}{\lambda_{n+1}}>\cdots$ 是线性算子 K 的正特征值。

记 $\sqrt[3]{\frac{1}{\mu_n}}=\sqrt[3]{\lambda_n}=a$，则对应于特征值 $\frac{1}{\lambda_n}$ 的特征函数为

$$u(t)=C\left(\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}at+\sqrt{3}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}at\right),t\in[0,1],$$

其中 C 是非零常数，所以

$$\dim\ker\left(\frac{1}{\lambda_n}I-K\right)=\dim\ker(I-\lambda_nK)=1 \tag{3}$$

下面我们证明

$$\ker(I-\lambda_nK)=\ker(I-\lambda_nK)^2 \tag{4}$$

显然 $\ker(I-\lambda_nK)\subset\ker(I-\lambda_nK)^2$，从而只需要证明 $\ker(I-\lambda_nK)^2\subset\ker(I-\lambda_nK)$。

设 $u\in\ker(I-\lambda_nK)^2$，如果 $(I-\lambda_nK)u\neq\theta$，那么 $(I-\lambda_nK)u$ 是线性算子 K 对应于特征值 $\frac{1}{\lambda_n}$ 的特征函数，故存在 $\gamma\neq 0$，使得

$$(I-\lambda_nK)u=\gamma\left(\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}at+\sqrt{3}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}at\right),t\in[0,1]$$

两边求导可得

$$\begin{cases}u'''(t)+a^3u(t)=\gamma\left(-a^3\mathrm{e}^{-at}+a^3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}at-a^3\sqrt{3}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}at\right),t\in[0,1]\\ u(0)=u'(0)=u''(1)=0\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}u(t)=&C_1\mathrm{e}^{-at}+C_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}at+C_3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}at\\&-\frac{1}{3}\gamma at\mathrm{e}^{-at}+\frac{1}{3}\gamma at\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}at+\frac{\sqrt{3}}{3}\gamma at\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}at\end{aligned}$$

代入边界条件 $u(0)=u'(0)=0$，得 $u(0)=C_1+C_2=0$，$u'(0)=-aC_1-\frac{1}{2}aC_1+\frac{\sqrt{3}}{2}aC_3-\frac{1}{3}\gamma a+\frac{1}{3}\gamma a=0$，故 $C_2=-C_1,C_3=\sqrt{3}C_1$，从而

$$u(t)=C_1\left(\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}at+\sqrt{3}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}at\right)$$
$$-\frac{1}{3}\gamma at\mathrm{e}^{-at}+\frac{1}{3}\gamma at\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}at+\frac{\sqrt{3}}{3}\gamma at\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}at$$

再代入边界条件 $u''(1)=0$，得

$$u''(1)=C_1\left(a^2\mathrm{e}^{-a}+\frac{1}{2}a^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}a}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{3}{2}a^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}a}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)-\frac{1}{3}\gamma a\left(-2a\mathrm{e}^{-a}+a^2\mathrm{e}^{-a}\right)$$
$$+\frac{1}{3}\gamma a\left(a\mathrm{e}^{\frac{1}{2}a}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}a-\sqrt{3}a\mathrm{e}^{\frac{1}{2}a}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}a^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}a}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}a}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{3}\gamma a\left(a\mathrm{e}^{\frac{1}{2}a}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}a+\sqrt{3}a\mathrm{e}^{\frac{1}{2}a}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}a^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}a}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}a}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)=0$$

因为 $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}a}+2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}a=0$，所以 $\cos\frac{\sqrt{3}}{2}a=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}a}$，代入化简为 $\frac{\gamma}{3}a\left(-\frac{3}{2}a^2\mathrm{e}^{-a}-\sqrt{3}a^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}a}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)=0$。

因为 $\gamma\neq0$，若 $a\neq0$，则 $-\frac{3}{2}a^2\mathrm{e}^{-a}-\sqrt{3}a^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}a}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}a=0$，从而可知 $\sin\frac{\sqrt{3}}{2}a=-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}a}$。又 $\cos\frac{\sqrt{3}}{2}a=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}a}$，所以

$$\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}a}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}a}\right)^2=\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}a}\right)^2=1,$$

解得 $a=0$ 与 $a\neq0$ 矛盾，即(3)式成立，由(3)和(4)可知特征值 $\frac{1}{\lambda_n}$ 的代数重数是 1。

下面的引理是本文主要结果的理论依据。

引理 3：[7]设 E 为带有格结构的 Banach 序空间，P 为 E 的一个正规体锥，全连续算子 A 在 E 上拟可加。如果

1) A 在 $P,-P$ 上严格递增；

2) A'_P,A'_{-P} 存在且 $r(A'_P)>1,r(A'_{-P})>1$，1 不是算子 A'_P 或者 A'_{-P} 的对应于正固有元的固有值；

3) $A\theta=\theta$，A 在 θ 处的导算子 A'_θ 是强正的，且 $r(A'_\theta)<1$；

4) A 在 ∞ 点的导数 A'_∞ 存在，1 不是算子 A'_∞ 的固有值，A'_∞ 在区间 $(1,+\infty)$ 所有固有值代数重数之和为偶数。

那么 A 至少存在三个非零不动点，其中包含一个变号不动点。

3. 结果的证明

定理 1 的证明设 $u_1,u_2\in P$，$u_1<u_2$，由(H_1)，$K\left(P\setminus\{\theta\}\right)\subseteq \mathring{P}$，得

$$Au_2-Au_1=\int_0^1G(t,s)\left[f\left(u_2(s)\right)-f\left(u_1(s)\right)\right]\mathrm{d}s>0,\ t\in[0,1]。$$

因此，A 在 P 上严格递增；类似的，A 在 $-P$ 上严格递增。

由(H_2) $\lim\limits_{|u|\to+\infty}\frac{f(u)}{u}=\beta_1$ 关于 t 在 $[0,1]$ 上一致，即对任意 $\varepsilon>0$，存在 $R>0$ 使得 $\forall t\in[0,1],|u|>R$ 时，有 $\left|f(u)-\beta_1u\right|\leq\varepsilon|u|$。令 $C=\max_{0\leq|u|\leq R}\left|f(u)\right|$，则对 $t\in[0,1]$，有

$$\left|Fu(t)-\beta_1 u(t)\right|=\left|f\left(u(t)\right)-\beta_1 u(t)\right|\le C+\beta_1 R+\varepsilon\|u\|。$$

因此

$$\left|Au(t)-\beta_1 Ku(t)\right|=\left|K\left(Fu-\beta_1 u\right)(t)\right|\le\|K\|\left(C+\beta_1 R+\varepsilon\|u\|\right)。$$

从而 $\lim\limits_{\|u\|\to+\infty}\dfrac{\|Au-\beta_1 Ku\|}{\|u\|}\le\varepsilon\|K\|$，即 $A'_\infty=\beta_1 K$。再由 $\lambda_{2n_1}<\beta_1<\lambda_{2n_1+1}$，可知 1 不是算子 A'_∞ 的固有值，A'_∞ 在区间 $(1,+\infty)$ 所有固有值代数重数之和为偶数。

类似地，有

$$\lim_{u\in P,\|u\|\to+\infty}\frac{\|Au-\beta_1 Ku\|}{\|u\|}\le\varepsilon\|K\|,$$

$$\lim_{u\in -P,\|u\|\to+\infty}\frac{\|Au-\beta_1 Ku\|}{\|u\|}\le\varepsilon\|K\|,$$

因此 $A'_P=A'_{-P}=\beta_1 K$。再由引理 2，$\lambda_{2n_1}<\beta_1<\lambda_{2n_1+1}$，可得 1 不是算子 A'_P 或者 A'_{-P} 的固有值，且 $r\left(A'_P\right)=r\left(A'_{-P}\right)=\dfrac{\beta_1}{\lambda_1}>1$。

由(H_3) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}=\beta_0$，即对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得 $\forall t\in[0,1], 0<|u|<\delta$ 时，有 $\left|f(u)-\beta_0 u\right|\le\varepsilon|u|$。注意到 $f(0)=0$，从而 $A\theta=\theta$，因此，对于 $u\in E$，当 $\|u\|<\delta$ 时，有

$$\left|Au(t)-A\theta-Ku(t)\right|=\left|K\left(Fu-\beta_0 u\right)(t)\right|\le\|K\|\max_{t\in[0,1]}\left|f\left(u(t)\right)-\beta_0 u(t)\right|\le\|K\|\|u\|\varepsilon。$$

从而 $\|Au-A\theta-\beta_0 Ku\|\le\|K\|\|u\|\varepsilon$。故 $\lim\limits_{\|u\|\to 0}\dfrac{\|Au-A\theta-\beta_0 Ku\|}{\|u\|}=0$，即 $A'_\theta=\beta_0 K$，不难得出 $K\left(P\setminus\{\theta\}\right)\subseteq\mathring{P}$，可得 A'_θ 强正且由 $0<\beta_0<\lambda_1$ 得 $r\left(A'_\theta\right)=\dfrac{\beta_0}{\lambda_1}<1$。

至此引理 3 的所有条件满足，故算子 A 至少存在三个非零不动点，其中包含一个变号不动点。从而边值问题(1)至少存在三个非零解，其中包含一个变号解。

注：此结果的创新之处在于得到了变号解的存在性。

推论：若定理 1 的条件满足，且 $f(u)$ 是奇函数，则边值问题(1)至少存在四个非零解，其中包含两个变号解。

基金项目

江苏省高校青蓝工程基金(2014)。

参考文献 (References)

[1] Gregus, M. (1987) Third Order Linear Differential Equations. Math Appl, Reidel, Dordrecht.

[2] Guo, D. and Lakshmikantham, V. (1988) Nonlinear Problems in Abstract Cones. Academic Press, New York.

[3] Mao, A. and Luan, S. (2011) Sign-Changing Solutions of a Class of Nonlocal Quasilinear Elliptic Boundary Value problem. *Math Anal Appl*, **383**, 230-243. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.05.021

[4] Shuai, W. (2015) Sign-Changing Solutions for a Class of Kirchhoff-Type Problem in Bounded Domains. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **259**, 1256-1274. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.02.040

[5] 崔玉军, 邹玉梅, 李红玉. 非线性算子方程的变号解及其应用[J]. 系统科学与数学, 2009, 29(8): 1094-1101.

[6] Clapp, M. and Salazar, D. (2013) Positive and Sign Changing Solutions to a Nonlinear Choquard Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **407**, 115. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.04.081

[7] 魏嘉，王静. 具有变号二阶三点边值问题的两个正解[J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版)，2015，44(2): 162-165.

[8] Wan, A.Y. (2007) Upper and Lower Solutions for Two-Point, Three-Point and Four-Point Discrete Boundary Value Problems. *Journal of Inner Mongolia Normal University* (*Natural Science Edition*), **36**, 134-137.

[9] 孙经先. 非线性泛函分析及其应用[M]. 北京：科学出版社, 2008.

[10] Sun, J.X. and Liu, X.Y. (2008) Computation of Topological Degree for Nonlinear Operators and Applications. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **69**, 4121-4130. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.10.042

[11] 刘进生，乔静. 一类二阶三点边值问题变号解的存在性[J]. 太原理工大学学报, 2007, 38(4): 374-376.

[12] Xu, X. and Sun, J.X. (2004) On Sign-Changing Solution for Some Three-Point Boundary Value Problems. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **59**, 491-505. https://doi.org/10.1016/j.na.2004.07.023

[13] 刘进生，张福伟，王淑丽，等. 四阶方程两点边值问题变号解的存在性[J]. 应用泛函分析学报，2007，9(4): 366-369.

[14] Zhang, X.Q. and Sun, J.X. (2010) On multiple Sign-Changing Solutions for Some Second-Order Integral Boundary Value Problems. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **44**, 1-15. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2010.1.44

[15] 王庆云，刘进生，邹杰涛. 三阶两点边值问题变号解的多重性[J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(23): 207-214.

[16] 王玉萍，赵增勤. 一类非线性三阶微分方程两点边值问题变号解的存在性[J]. 曲阜师范大学学报，2014，40(4): 29-32.