Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2017, 6(9), 1056-1062**
Published Online December 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.69128

Hans汉斯

A Generalized Rational-Exponent Function Solution with Multi-Parameter for Wick-Type Stochastic mKdV Equation

Qing Liu

Institute of Optics and Electronics, School of Engineering, Lishui University, Lishui Zhejiang
Email: lsxylq@163.com

Received: Nov. 22nd, 2017; accepted: Dec. 4th, 2017; published: Dec. 11th, 2017

Abstract

With the help of Hermite transformation, white noise theory and a rational-exponent function solution of Riccati equation, a rational-exponent function solution with multiple arbitrary parameters for Wick-type stochastic mKdV equation is obtained. From this rational-exponent function solution, the influence of variety of different parameters on the dynamics behavior of Wick-type stochastic mKdV equation by restricted Riccati equation is showed. It provides a more effective method, which can be used to investigate the influence of external conditions and internal factors on behavior of nonlinear stochastic dynamics model.

Keywords

Wick-Type Stochastic mKdV Equation, Rational-Exponent Function Solution, White Noise, Hermite Transformation

Wick型随机mKdV方程带多参量的广义的有理指数函数解

留　庆

丽水学院工学院光电研究所，浙江　丽水
Email: lsxylq@163.com

收稿日期：2017年11月22日；录用日期：2017年12月4日；发布日期：2017年12月11日

文章引用: 留庆. Wick 型随机 mKdV 方程带多参量的广义的有理指数函数解[J]. 应用数学进展, 2017, 6(9): 1056-1062.
DOI: 10.12677/aam.2017.69128

摘　要

借助Hermite变换、白噪声理论和Riccati方程的有理指数函数解，获得了Wick型随机mKdV方程带多参量的广义的有理指数函数解，借助这个解可以揭示出不同的Riccati方程约束条件下，不同的参量的变化对Wick型随机mKdV方程动力学行为产生的影响及变化规律。它为深入研究外部条件和内部因素对非线性随机模式行为产生的影响，提供了一种更加有效的方法。

关键词

Wick型随机mKdV方程，有理指数函数解，白噪声理论，Hermite变换

1. 引言

Wadati 最先研究了随机偏微分 KdV 方程和在高斯白噪声条件下 KdV 方程的孤子色散[1]，接着研究了高斯白噪声条件下有阻尼和无阻尼 KdV 方程[2]，随后提出了一种描述波在任意介质传播的非线性偏分方程[3]。此外，de Bouard [4] [5]、Debussche [6] [7]、Konotop [8]、Printems [9]、Holden [10]等人对随机偏微分方程的研究也做大量的工作。

近来，许多研究者把白噪声函数方法应用到随机偏微分方程并获得许多随机偏微分方程的解析解，如谢英超[11] [12]、韦才敏[13]、戴朝卿[14] [15]和留庆[16] [17] [18] [19]等，借助 Hermite 变换和各种方法，获得了多个 Wick 型随机方程不同类型的解析解。

在这篇论文中，下列 Wick 型随机 mKdV 方程被给出[17]

$$U_t - K_1(t)\Diamond\left(U_{xxx} - 6U^{\Diamond 2}\Diamond U_x\right) - 4K_2(t)\Diamond U_x + H(t)\Diamond\left(U + xU_x\right) = 0, \tag{1}$$

其中 $H(t)$ 和 $K_i(t)\,(i=1,2)$ 是白噪声函数，$\Diamond$ 是在 Hida 分布空间的 Wick 积。

本论文利用 Hermite 变换和 Riccati 方程的有理指数函数解，方程(1)带有多个任意参量的有理指数函数解被得到。借助高斯白噪声理论，我们得到了在高斯白噪声条件下，Wick 型随机 mKdV 方程带有多个任意参量的有理指数函数解。通过选择设置这个有理指数函数解中包含的多个参量的不同值，Wick 型随机 mKdV 方程丰富的有理指数函数解被得到。进而揭示出了不同约束条件下，不同因素参量变化对 Wick 型随机方程(1)动力学行为产生的影响。由此，提出借助带有多个任意参量的有理指数函数解，研究不同条件的变化对 Wick 型随机模型动力学行为影响新的思路。

论文的结构如下，第 2 节简述在高斯白噪声条件下，求解 Wick 型随机方程带有多个任意参量有理指数函数解的主要步骤。第 3 节，把这种方法用于研究 Wick 型随机 mKdV 方程，并得到了该方程带有多个任意参量的有理指数函数解。最后一节，对本工作研究的总结。

2. 主要步骤

步骤一. 借助 Hermite 变换，把下列 Wick 型随机方程

$$A^{\Diamond}\left(t, x, \partial_t, \nabla_x, U, \omega\right) = 0, \tag{2}$$

转化成下普通积的

$$\tilde{A}\left(t,x,\partial_t,\nabla_x,\tilde{U},z_1,z_2,\cdots\right)=0, \tag{3}$$

变系数偏微分方程。

步骤二. 通过下列变换

$$\tilde{U}(t,x,z)=u(t,x,z)=u(\xi),\xi=f(t,z)x+g(t,z), \tag{4}$$

其中 $f(t,z)$ 和 $g(t,z)$ 待定函数。把偏微分方程(3)化简为下列常微分方程

$$A\left(u,u_\xi,u_{\xi\xi},u_{\xi\xi\xi},\cdots\right)=0, \tag{5}$$

步骤三. 假设方程(5)有下列形式的解

$$u(\xi)=\sum_{i=0}^{n}a_i(t,z)F^i(\xi), \tag{6}$$

而变量 $F(\xi)$ 是下列 Riccati 方程

$$kF_\xi=q+pF^2(\xi), \tag{7}$$

步骤四. 通过平衡方程(5)最高阶微分项和最高阶非线性项，得到 n 的值。把 n 的值代入方程(6)，写出方程(5)解的具体形式

$$u(\xi)=a_0(t,z)+a_1(t,z)F(\xi)+\cdots+a_n(t,z)F^n(\xi). \tag{8}$$

步骤五. 把方程(8)和方程(7)代入方程(5)，并设 F^i,xF^i 所有幂的系数为零，得到一组方程。求解这组方程得到参量 $f,g,a_i\ (i=0,1,\cdots,n)$ 的函数表达式。把求得的这些结果连同 Riccati 方程的有理指数解和 $\xi=f(t,z)x+g(t,z)$ 一起代入方程(8)，得到 $u(t,x,z)$ 为方程(3)带多参量的有理指数函数解。

步骤六. 对步骤五得到 $u(t,x,z)$ 进行逆 Hermite 变换，获得 $U(t,x)$。这个 $U(t,x)$ 就是 Wick 型随机方程(2)的解。

步骤七. 利用高斯白噪声和布朗运动之间的关系，以及斯科罗霍德积分，得到方程(2)的带多参量的有理指数孤波解。

3. Wick 型随机 mKdV 方程的有理指数函数解

对方程(1)进行 Hermite 变换，得到下列方程：

$$\begin{aligned}&\tilde{U}_t(t,x,z)-\tilde{K}_1(t,z)\left(\tilde{U}_{xxx}(t,x,z)-6\tilde{U}^2(t,x,z)\tilde{U}_x(t,x,z)\right)\\&-4\tilde{K}_2(t,z)\tilde{U}_x(t,x,z)+\tilde{H}(t,z)\left(\tilde{U}(t,x,z)+x\tilde{U}_x(t,x,z)\right)=0,\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $z=(z_1,z_2,\cdots)$ 是一个矢量参数。

为了方便起见，设

$$u(t,x,z)=\tilde{U}(t,x,z),H(t,z)=\tilde{H}(t,z),K(t,z)=\tilde{K}_i(t,z)\ (i=1,2),$$

方程(9)解的形式为：

$$u=u(\xi),\xi=f(t,z)x+g(t,z), \tag{10}$$

其中 $f(t,z)$ 和 $g(t,z)$ 待定函数。假定方程(9)有下列形式的拟解

$$u(\xi)=a_0(t,z)+a_1(t,z)F(\xi)+\cdots+a_n(t,z)F^n(\xi) \tag{11}$$

其中 $a_i(t,z)\,(i=0,1,\cdots,n)$ 是待定函数，n 是需要平衡方程(9)的最高阶线性项和最高阶非线性来确定，$F(\xi)$ 是下列广义 Riccati 方程

$$kF_{\xi}=q+pF^{2}(\xi), \tag{12}$$

的解，其中 p,q 为任意常量。

已知 Riccati 方程(12)有下列形式的带有多个任意参量的有理指数解[20]

$$F(\xi)=\frac{A_1\left(A_1\mathrm{e}^{\xi}+A_{-1}\right)}{B_1\left(A_1\mathrm{e}^{\xi}-A_{-1}\right)}, \tag{13}$$

其中 A_1,B_1,A_{-1},p,q 是任意常量，且 $k=2\sqrt{-pq}$。

把方程(10)代入方程(9)，可得

$$\left(f_t x+g_t\right)u_{\xi}-K_1\left(f^3u_{\xi\xi\xi}-6fu^2u_{\xi}\right)-4K_2fu_{\xi}+H\left(u+fxu_{\xi}\right)=0. \tag{14}$$

平衡 u^2u_{ξ} 和 $u_{\xi\xi\xi}$，得到 $n=1$，方程(14)的拟解形式可以写成如下

$$u(\xi)=a_0(t,z)+a_1(t,z)F(\xi). \tag{15}$$

根据方程(12)，可得

$$F_{\xi\xi}=-\frac{1}{2}F-\frac{p}{2q}F^3, \tag{16}$$

$$F_{\xi\xi\xi}=-\frac{1}{4\sqrt{-pq}}\left(q+4pF^2+\frac{3}{q}p^2F^4\right). \tag{17}$$

把方程(15)连同方程(12)、方程(16) 和方程(17)一起代入方程(14)，可得

$$\begin{aligned}&3K_1\sqrt{-\frac{p}{q}}fa_1\left(\frac{p}{4q}f^2-a_1^2\right)F^4+6fK_1\sqrt{-\frac{p}{q}}a_0a_1^2F^3+\sqrt{-\frac{p}{q}}a_1\left(-3K_1fa_1^2\frac{q}{p}+K_1f^3+\frac{1}{2}g_t+3K_1fa_0^2-2K_2f\right)F^2\\&+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{p}{q}}a_1\left(f_t+Hf\right)xF^2+\left(a_{1t}+Ha_1+6kK_1\sqrt{-\frac{q}{p}}fa_0a_1^2\right)F+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{q}{p}}a_1\left(f_t+Hf\right)x\\&+\left(a_{0t}+Ha_0-2K_2\sqrt{-\frac{q}{p}}fa_1+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{q}{p}}a_1g_t+3K_1\sqrt{-\frac{q}{p}}fa_0^2a_1+\frac{1}{4}K_1\sqrt{-\frac{q}{p}}f^3a_1\right)=0.\end{aligned} \tag{18}$$

令 $F^i,xF^i\,(i=0,1,2,3,4)$ 所有系数分别都为零，得到下列一组关于未知量 a_0,a_1 的代数方程，即

$$3K_1\sqrt{-\frac{p}{q}}fa_1\left(\frac{p}{4q}f^2-a_1^2\right)=0, \tag{19}$$

$$6fK_1\sqrt{-\frac{p}{q}}a_0a_1^2=0, \tag{20}$$

$$\sqrt{-\frac{p}{q}}a_1\left(-3K_1fa_1^2\frac{q}{p}+K_1f^3+\frac{1}{2}g_t+3K_1fa_0^2-2K_2f\right)=0, \tag{21}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{p}{q}}a_1\left(f_t+Hf\right)=0, \tag{22}$$

$$\left(a_{1t}+Ha_1+6kK_1\sqrt{-\frac{q}{p}}fa_0a_1^2\right)=0, \tag{23}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{q}{p}}a_1\left(f_t+Hf\right)=0, \tag{24}$$

$$\left(a_{0t}+Ha_0-2K_2\sqrt{-\frac{q}{p}}fa_1+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{q}{p}}a_1g_t+3K_1\sqrt{-\frac{q}{p}}fa_0^2a_1+\frac{1}{4}K_1\sqrt{-\frac{q}{p}}f^3a_1\right)=0. \tag{25}$$

由方程(20)可得

$$a_0\left(t,z\right)=0. \tag{26}$$

把方程(26)代入方程(19)~(25)，得

$$3K_1\sqrt{-\frac{p}{q}}fa_1\left(\frac{p}{4q}f^2-a_1^2\right)=0, \tag{27}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{p}{q}}a_1\left(f_t+Hf\right)=0, \tag{28}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{q}{p}}a_1\left(f_t+Hf\right)=0, \tag{29}$$

$$a_{1t}+Ha_1=0, \tag{30}$$

$$\sqrt{-\frac{q}{p}}a_1\left(-2K_2f+\frac{1}{2}g_t+\frac{1}{4}K_1f^3\right)=0, \tag{31}$$

$$\sqrt{-\frac{p}{q}}a_1\left(-3K_1fa_1^2\frac{q}{p}+K_1f^3+\frac{1}{2}g_t-2K_2f\right)=0. \tag{32}$$

由方程(27)~(30)，得

$$f\left(t,z\right)=C_1\mathrm{e}^{\left(-\int^t H(s,z)\mathrm{d}s\right)}, \tag{33}$$

$$a_1\left(t,z\right)=\pm\sqrt{\frac{p}{4q}}C_1\mathrm{e}^{\left(-\int^t H(s,z)\mathrm{d}s\right)}, \tag{34}$$

其中 C_1 是一个任意常数。

由方程(31)~(32)，得

$$g\left(t,z\right)=\int^t\left(-4C_2K_2\left(s,z\right)\mathrm{e}^{\left(-\int^s H(\tau,z)\mathrm{d}\tau\right)}+\frac{1}{2}C_2^3K_1\left(s,z\right)\mathrm{e}^{\left(-3\int^s H(\tau,z)\mathrm{d}\tau\right)}\right)\mathrm{d}s+C_3, \tag{35}$$

其中 C_2, C_3 是一个任意常数。

把方程(31)~(32)代入方程(10)和方程(15)，得到方程(9)的解

$$u\left(t,x,z\right)=\pm\sqrt{\frac{p}{4q}}C_1\mathrm{e}^{\left(-\int^t H(s,z)\mathrm{d}s\right)}F\left(\xi\right), \tag{36}$$

$$\xi=C_1x\mathrm{e}^{\left(-\int^t H(s,z)\mathrm{d}s\right)}+\int^t\left(-4C_2K_2\left(s,z\right)\mathrm{e}^{\left(-\int^s H(\tau,z)\mathrm{d}\tau\right)}+\frac{1}{2}C_2^3K_1\left(s,z\right)\mathrm{e}^{\left(-3\int^s H(\tau,z)\mathrm{d}\tau\right)}\right)\mathrm{d}s+C_3 \tag{37}$$

设

$$K_1\left(t\right)=b_1W\left(t\right),K_2\left(t\right)=b_2W\left(t\right),H\left(t\right)=h\left(t\right)+b_3W\left(t\right), \tag{38}$$

其中 $W\left(t\right)$ 是高斯白噪声， $B\left(t\right)$ 是布朗运动，它们之间存在 $W\left(t\right)=\dot{B}\left(t\right)$ 关系。

对方程(38)进行 Hermite 变换，可得

$$K_1(t,z)=b_1\tilde{W}(t,z),\ K_2(t,z)=b_2\tilde{W}(t,z),\ H(t,z)=h(t)+b_3\tilde{W}(t,z).$$

对方程(36)~(37)进行逆 Hermite 变换，可以得到方程(1)下列 Wick 型随机解析解

$$U(t,x)=\pm\sqrt{\frac{p}{4q}}C_1\mathrm{e}^{\diamond\left(-\int^t H(s)\mathrm{d}s\right)}F^{\diamond}(\bar{\xi}), \tag{39}$$

$$\bar{\xi}=C_1x\mathrm{e}^{\diamond\left(-\int^t H(s)\mathrm{d}s\right)}+\int^t\left(-4C_2K_2(s)\diamond\mathrm{e}^{\diamond\left(-\int^s H(\tau)\mathrm{d}\tau\right)}+\frac{1}{2}C_2^3K_1(s)\diamond\mathrm{e}^{\diamond\left(-3\int^s H(\tau)\mathrm{d}\tau\right)}\right)\mathrm{d}s+C_3. \tag{40}$$

其中 C_1,C_2,C_3 是一个任意常数。

因为存在下恒等关系

$$\mathrm{e}^{\diamond(B(t))}=\mathrm{e}^{\left(B(t)-\frac{1}{2}t^2\right)},\quad \int_R\psi(t)\diamond W(t)\mathrm{d}t=\int_R\psi(t)\delta B(t),\quad W(t)=\dot{B}(t), \tag{41}$$

其中 $\int(\cdot)\delta B(t)$ 为斯科罗霍德积分(Skorohod integral)。

把方程(38)和方程(41)一起代入方程(39)~(40)，可得Wick型随机方程(1)下列孤波解

$$U(t,x)=\pm\sqrt{\frac{p}{4q}}C_1\mathrm{e}^{\left(-\int^t h(s)\mathrm{d}s-b_3B(t)+\frac{1}{2}b_3t^2\right)}F(\theta) \tag{42}$$

$$\theta=xC_1\mathrm{e}^{\left(-\int^t h(s)\mathrm{d}s-b_3B(t)+\frac{1}{2}b_3t^2\right)}+\int^t\left(-4C_2b_2\mathrm{e}^{\left(-\int^s h(\tau)\mathrm{d}\tau-b_3B(s)+\frac{1}{2}b_3s^2\right)}+\frac{1}{2}C_2^3b_1\mathrm{e}^{\diamond\left(-3-\int^s h(\tau)\mathrm{d}\tau-3b_3B(s)+\frac{3}{2}b_3s^2\right)}\right)\delta B(s)+C_3. \tag{43}$$

令 $\xi=\theta$，然后把方程(13)代入方程(42)，在高斯白噪声条件下随机方程(1)一种带有多个任意参量的有理指数函数解被得到

$$U(t,x)=\pm\sqrt{\frac{p}{4q}}C_1\mathrm{e}^{\left(-\int^t h(s)\mathrm{d}s-b_3B(t)+\frac{1}{2}b_3t^2\right)}\frac{A_1\left(A_1\mathrm{e}^{\theta}+A_{-1}\right)}{B_1\left(A_1\mathrm{e}^{\theta}-A_{-1}\right)}, \tag{44}$$

其中 θ 满足方程(43)，$A_1,B_1,A_{-1},p,q,C_1,C_2,C_3$ 都是任意参数。由于参量 p,q 是约束条件 Riccati 方程的参量，而参量 A_1,B_1,A_{-1} 与随机方程(1)系统的内部因素有关，所以方程(44)揭示出了随约束条件参量的变化，不同内部因素参量变化对 Wick 型随机方程(1)动力学行为产生的变化规律。

4. 结论

借助 Hermite 变换、白噪声理论和 Riccati 方程的有理指数函数解，随机 mKdV 方程一种带多参量的广义的有理指数函数解被得到。由于这个有理指数函数解中包含多个任意参量，对应不同的参量值，可以写出不同解析解，这样的解实际上可以写出无穷多个。这些解实际上表示不同 Riccati 方程约束条件下，不同内部因素作用下随机 mKdV 方程的动力行为的变化规律。这给我们提供了一个重要的启示，可以借助这个带多参量的广义的有理指数函数解来研究在不同的 Riccati 方程约束条件下，不同的参量的变化下，Wick 型随机 mKdV 方程动力学行为的变化规律。这种方法也能被推广用于其它的 Wick 型随机方程的动力行为的研究。

本论文研究了求解随机方程带多参量的广义的有理指数函数解方法，并得到了随机 mKdV 方程一种带多参量的广义的有理指数函数解。但没有具体研究不同 Riccati 方程约束条件和不同参量变化，对其行为的影响，以及变化规律，这些重要的课题有待进一步研究。

基金项目

浙江省自然科学基金项目(LY13A050001)。

参考文献 (References)

[1] Wadati, M. (1983) Stochastic Korteweg-de Vries Equation. *Journal of the Physical Society of Japan*, **52**, 2642-2648. https://doi.org/10.1143/JPSJ.52.2642

[2] Wadati, M. and Akutsu, Y. (1984) Stochastic Korteweg-de Vries Equation with and without Damping. *Journal of the Physical Society of Japan*, **53**, 3342-3350. https://doi.org/10.1143/JPSJ.53.3342

[3] Wadati, M. (1990) Deformation of Solitons in Random Media. *Journal of the Physical Society of Japan*, **59**, 4201-4203. https://doi.org/10.1143/JPSJ.59.4201

[4] Bouard, A.D. and Debussche, A. (1998) On the Stochastic Korteweg-de Vries Equation. *Journal of Functional Analysis*, **154**, 215-251. https://doi.org/10.1006/jfan.1997.3184

[5] Bouard, A.D. and Debussche, A. (1999) White Noise Driven Korteweg-de Vries Equation. *Journal of Functional Analysis*, **169**, 532-258. https://doi.org/10.1006/jfan.1999.3484

[6] Debussche, A. and Printems, J. (1999) Numerical Simulation of the Stochastic Korteweg-de Vries Equation. *Physica D*, **134**, 200-226. https://doi.org/10.1016/S0167-2789(99)00072-X

[7] Debussche, A. and Printems, J. (2001) Effect of a Localized Random Forcing Term on the Korteweg-de Vries Equation. *Journal of Computational Analysis and Applications*, **3**, 183-206. https://doi.org/10.1023/A:1011596026830

[8] Konotop, V.V. and Vźquez, L. (1994) Nonlinear Random Waves. World Scientific, Singapore. https://doi.org/10.1142/2320

[9] Printems, J. (1999) The Stochastic Korteweg-de Vries Equation in L(R2). *Journal of Differential Equations*, **153**, 338-373. https://doi.org/10.1006/jdeq.1998.3548

[10] Holden, H., Øsendal, B., Ubøe, J. and Zhang, T. (1996) Stochastic Partial Differential Equations. BirhKäuser, Boston. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9215-6

[11] Xie, Y.C. (2003) Exact Solutions for Stochastic KdV Equations. *Physics Letters A*, **310**, 161-167. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(03)00265-2

[12] Xie, Y.C. (2004) Exact Solutions of the Wick-Type Stochastic Kadomtsev-Petviashvili Equations. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **21**, 473-480. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2003.12.058

[13] Wei, C.M., Ren, Y.H. and Xia, Z.Q. (2005) Symmetry Reductions and Soliton-Like Solutions for Stochastic MKdV Equation. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **26**, 1507-1513. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.04.018

[14] Dai, C.Q. and Chen, J.L. (2009) Exact Solutions of (2+1)-Dimensional Stochastic Broer-Kaup Equation. *Physics Letters A*, **373**, 1218-1225. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2009.02.018

[15] Dai, C.Q. and Zhang, J.F. (2009) Application of He's Exp-function Method to the Stochastic mKdV Equation. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, **10**, 675-680. https://doi.org/10.1515/IJNSNS.2009.10.5.675

[16] Liu, Q. (2006) Various Types of Exact Solutions for Stochastic mKdV Equation via a Modified Mapping Method. *Europhysics Letters*, **74**, 377-383. https://doi.org/10.1209/epl/i2005-10556-5

[17] Liu, Q. (2007) Some Exact Solutions for Stochastic mKdV equation. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **32**, 1224-1230. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.11.044

[18] Liu, Q., Jia, D.L. and Wang, Z.H. (2010) Three Types of Exact Solutions to Wick-Type Generalized Stochastic Korteweg-de Vries Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 3495-3500. https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.10.014

[19] Liu, Q., Lan, J.C., Wu, H.Y. and Wang, Z.H. (2010) A Series of Exact Solutions for (2+1)-Dimensional Wick-Type Stochastic Generalized Broer-Kaup System via a Modified Variable-Coefficient Projective Riccati Equation Mapping Method. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 629-638. https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.05.100

[20] Liu, Q., Shen, S.Y. and Wang, Z.H. (2013) The Rational Solutions to a Generalized Riccati Equation and Their Application. *International Journal of Modern Physics B*, **27**, 1350013. https://doi.org/10.1142/S0217979213500136

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org