

# An Epidemic Model Research of the Mobile Phone Virus Based on Fractional Differential Equations

Xingyang Ye

School of Science, Jimei University, Xiamen Fujian

Email: yexingyang@jmu.edu.cn

Received: Dec. 5<sup>th</sup>, 2017; accepted: Dec. 22<sup>nd</sup>, 2017; published: Dec. 29<sup>th</sup>, 2017

---

## Abstract

With the increasing popularity of mobile phones, the spread of mobile virus has become increasingly serious. Therefore, the study of the spread of the virus is necessary. In this paper, we first establish an epidemic model of mobile phone virus based on the fractional differential equation. Then by means of the theory of fractional differential equations, we analyse the existence and stability condition of the equilibrium of the model. It is showed that if the basic reproduction number is less than 1, the infection free equilibrium is locally asymptotically stable and virus will die out, and if the basic reproductive number is greater than 1, the infection equilibrium is stable and the virus will spread. Some numerical experiments are carried out to confirm the obtained results. In addition, some effective measures are given to control the spread of the mobile virus, which provides referential support for virus prediction, control and prevention.

## Keywords

Mobile Virus, Fractional Differential Equation, Equilibrium Point, Stability

---

# 基于分数阶微分方程的手机病毒传播模型研究

叶星昶

集美大学理学院, 福建 厦门

Email: yexingyang@jmu.edu.cn

收稿日期: 2017年12月5日; 录用日期: 2017年12月22日; 发布日期: 2017年12月29日

---

## 摘要

随着手机普及率的提高, 手机病毒的传播也愈发严重。因此, 对于病毒传播规律的研究必不可少。本文

文章引用: 叶星昶. 基于分数阶微分方程的手机病毒传播模型研究[J]. 应用数学进展, 2017, 6(9): 1229-1235.

DOI: 10.12677/aam.2017.69148

建立并研究了一类基于分数阶微分方程的手机病毒传播模型，利用分数阶微分方程的相关理论，详细分析了平衡点的存在性及其局部稳定性，并通过数值试验验证了理论结果的正确性。通过研究，我们得到在基本再生数小于1的情况下，未感染平衡点是局部渐进稳定的，病毒会消亡；在基本再生数大于1时，感染平衡点局部渐近稳定，病毒将扩散。根据所得到的理论结果给出了控制手机病毒传播的有效措施，为手机病毒的预测、控制和防治提供了重要的参考依据。

## 关键词

手机病毒，分数阶微分方程，平衡点，稳定性

Copyright © 2017 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

由于智能手机的便携性和简便性，手机病毒与恶意软件带来的风险甚至高于电脑之间的病毒传播。从手机病毒的传播形式来看，主要是利用蓝牙设备、网页浏览、下载软件、短信彩信和电脑连接等多种途径。从智能手机的技术性能来看，它的移动存储功能和近距离无线传输技术，实现了网络到手机、手机与手机之间数据的频繁交换，增大了病毒的传播概率。

在手机高速发展和 4G 网络的年代，手机智能程度也增加，随着安卓和 iOS 系统取代塞班系统，由于安卓系统的开放性，针对安卓系统的病毒呈指数式暴涨[1]。腾讯安全实验室发布的《2016 年度互联网安全报告》[2]中指出，2016 年手机木马病毒感染用户达到 5 亿，垃圾短信举报次数达 10.7 亿，其中诈骗短信占 2 成，其他手机病毒也创新高。目前，手机病毒的攻击方式有八大类型，包括恶意扣费、隐私窃取、资费消耗、远程控制、恶意传播、系统破坏、流氓软件、诱骗欺诈等类型[3]。这些手机病毒造成的破坏性极为强大，从个人层面，会导致个人隐私的泄露，财产受到威胁；对于国家，会导致国家私密外泄，安全信息遭到他人窃取，国家利益受损。因此有必要建立手机病毒传播的数学模型来预测手机病毒的发展趋势，以便更好地建立防治措施。

## 2. 模型

根据手机病毒的特点，把手机分为 3 类，分别为：① 易感染类  $S$ 。该类手机目前未被病毒感染，但是有被感染的可能性存在，在  $t$  时刻其数量记为  $S(t)$ ；② 感染类  $I$ 。该类手机已经被病毒感染，并且具有感染其它手机的能力，在  $t$  时刻其数量记为  $I(t)$ ；③ 免疫类  $R$ ，该类手机因为安装杀毒软件或系统升级而对病毒具有免疫能力，在  $t$  时刻其数量记为  $R(t)$ 。我们考虑如下的手机病毒传播的微分方程仓室模型：

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - p_1SI - d_1S + p_2I \\ \frac{dI}{dt} = p_1SI - (p_2 + p_3 + d_2)I \\ \frac{dR}{dt} = p_3I - d_3R \end{cases} \quad (1)$$

在模型(1)中， $A$  表示在一定时间内进入系统的手机的总数量。 $p_1$  为感染率，指的是在一定时间内，易感染的手机因为没有进行补丁从而感染上病毒，并且每个手机都具有感染多个手机的能力。所以，由易感

染的手机转变成感染手机总数可表示为  $p_1 SI$ 。 $p_2$  指的是感染上病毒的手机只进行杀毒却没有打补丁或升级系统从而再次变为易感染类的概率。 $p_3$  表示感染上病毒的手机在进行杀毒后打补丁或升级系统从而获得永久免疫的概率。 $d_1, d_2, d_3$  分别表示在一定时间内, 手机从易感染类, 感染类, 免疫类移出系统的概率。

近几十年来, 由于一些学科新现象新定律的发现, 分数阶微积分已成为一个研究热点。随着分数阶微分方程的发展, 分数阶模型更加接近实际情况, 能对生物系统进行更为细致深入的研究, 越来越多的数学、生物工作者开始关注分数阶传染病模型[4] [5] [6]。然而, 根据我们的调查, 目前尚无文献考虑利用分数阶方程模型来研究手机病毒的传播情况。研究资料表明, 分数阶微分方程在研究一些具有记忆过程、遗传性质、异质材料及远程扩散过程比整数阶方程模型更具有优势。由于智能手机的便携性和简便性, 手机病毒与恶意软件带来的风险甚至高于电脑之间的病毒传播。从智能手机的技术性能来看, 它的移动存储功能和近距离无线传输技术, 实现了网络到手机、手机与手机之间数据的频繁交换, 增大了病毒的传播概率和范围。经典的整数阶方程, 如反应扩散方程就很难准确地描述智能手机病毒的这种大范围的频繁扩散现象。而分数阶导数的全局性使得分数阶微分方程更能准确地描述手机病毒的这种频繁扩散现象。因此, 借鉴文[7]的方法, 我们在模型(1)的基础上引入分数阶导数, 得到如下的分数阶微分方程模型:

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha S = A^\alpha - p_1^\alpha SI - d_1^\alpha S + p_2^\alpha I \\ {}^c D_t^\alpha I = p_1^\alpha SI - (p_2^\alpha + p_3^\alpha + d_2^\alpha) I \\ {}^c D_t^\alpha R = p_3^\alpha I - d_3^\alpha R \end{cases} \quad (2)$$

其中,  ${}^c D_t^\alpha (0 < \alpha \leq 1)$  表示  $\alpha$  阶 Caputo 分数阶导数[8]。

### 3. 平衡点分析

设基本再生数

$$R_0 = \frac{A^\alpha p_1^\alpha}{d_1^\alpha (d_2^\alpha + p_2^\alpha + p_3^\alpha)}$$

我们可得到模型(2)平衡点的存在情况如下:

**定理 1:** 当  $R_0 < 1$  时, 模型(2)有唯一一个未感染平衡点  $E_1 \left( \frac{A^\alpha}{d_1^\alpha}, 0, 0 \right)$ , 当  $R_0 > 1$  时, 模型除了一个未感染平衡点  $E_1$  外, 还有一个感染平衡点  $E_2 (S^*, I^*, R^*)$ , 其中

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{d_2^\alpha + p_2^\alpha + p_3^\alpha}{p_1^\alpha}, \\ I^* &= \frac{d_1^\alpha (d_2^\alpha + p_2^\alpha + p_3^\alpha) (R_0 - 1)}{p_1^\alpha (d_2^\alpha + p_3^\alpha)}, \\ R^* &= \frac{p_3^\alpha}{d_3^\alpha} I^*. \end{aligned}$$

证明: 模型(2)的平衡点满足如下的方程组:

$$\begin{cases} A^\alpha - p_1^\alpha SI - d_1^\alpha S + p_2^\alpha I = 0 \\ p_1^\alpha SI - (p_2^\alpha + p_3^\alpha + d_2^\alpha) I = 0 \\ p_3^\alpha I - d_3^\alpha R = 0 \end{cases} \quad (3)$$

由方程组(3)的第二个式子可以得到

$$I = 0 \text{ 或 } p_1^\alpha S - (p_2^\alpha + p_3^\alpha + d_2^\alpha) = 0.$$

当  $I = 0$  时, 由方程组(3)易知模型(2)存在未感染平衡点  $E_1$ 。

当  $p_1^\alpha S - (p_2^\alpha + p_3^\alpha + d_2^\alpha) = 0$  时, 可得

$$S^* = \frac{d_2^\alpha + p_2^\alpha + p_3^\alpha}{p_1^\alpha},$$

将其代入(3)的第一个和第三个式子可得

$$I^* = \frac{A^\alpha p_1^\alpha - d_1^\alpha (d_2^\alpha + p_2^\alpha + p_3^\alpha)}{p_1^\alpha (d_2^\alpha + p_3^\alpha)} = \frac{d_1^\alpha (d_2^\alpha + p_2^\alpha + p_3^\alpha) (R_0 - 1)}{p_1^\alpha (d_2^\alpha + p_3^\alpha)},$$

$$R^* = \frac{p_3^\alpha}{d_3^\alpha} I^*.$$

当  $R_0 > 1$  时,  $I^*$  恒大于 0. 因此, 当  $R_0 > 1$  时, 模型(2)还存在一个感染平衡点  $E_2 (S^*, I^*, R^*)$ 。

**定理 2:** 当  $R_0 < 1$  时, 模型(2)的未感染平衡点  $E_1$  是局部渐进稳定的; 当  $R_0 > 1$  时, 未感染平衡点  $E_1$  是不稳定的。

证明: 模型(2)在未感染平衡点  $E_1$  处的 Jacobian 矩阵为

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -d_1^\alpha & -\frac{A^\alpha p_1^\alpha}{d_1^\alpha} + p_2^\alpha & 0 \\ 0 & \frac{A^\alpha p_1^\alpha}{d_1^\alpha} - p_2^\alpha - d_2^\alpha - p_3^\alpha & 0 \\ 0 & p_3^\alpha & -d_3^\alpha \end{bmatrix}.$$

如果 Jacobian 矩阵  $J(E_1)$  的所有特征值满足条件[9]

$$|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$$

那么未感染平衡点  $E_1$  是渐近稳定的。容易求得  $J(E_1)$  的所有特征值为

$$\lambda_1 = -d_1^\alpha < 0, \lambda_2 = -d_3^\alpha < 0, \lambda_3 = \frac{A^\alpha p_1^\alpha}{d_1^\alpha} - p_2^\alpha - d_2^\alpha - p_3^\alpha.$$

显然, 当  $R_0 < 1$  时,  $\lambda_3 < 0$ , 从而模型(2)的未感染平衡点  $E_1$  是局部渐进稳定的; 当  $R_0 > 1$  时,  $\lambda_3 > 0$ , 未感染平衡点  $E_1$  是不稳定的。

**定理 3:** 当  $R_0 > 1$  时, 模型(2)的感染平衡点  $E_2$  是局部渐进稳定的。

证明: 模型(2)在感染平衡点  $E_2$  的 Jacobian 矩阵为

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} -p_1^\alpha I^* - d_1^\alpha & -d_2^\alpha - p_3^\alpha & 0 \\ p_1^\alpha I^* & 0 & 0 \\ 0 & p_3^\alpha & -d_3^\alpha \end{bmatrix}.$$

易得  $J(E_2)$  的特征方程为

$$(\lambda + d_3^\alpha) \left[ \lambda^2 + (p_1^\alpha I^* + d_1^\alpha) \lambda + p_1^\alpha I^* (d_2^\alpha + p_3^\alpha) \right] = 0.$$

易知

$$\lambda_1 = -d_3^\alpha < 0$$

是  $J(E_2)$  的一个特征值,  $J(E_2)$  的另两个特征值  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  是方程

$$\lambda^2 + (p_1^\alpha I^* + d_1^\alpha)\lambda + p_1^\alpha I^*(d_2^\alpha + p_3^\alpha) = 0$$

的根。由韦达定理可知:

$$\lambda_2 + \lambda_3 = -(p_1^\alpha I^* + d_1^\alpha) < 0,$$

$$\lambda_2 \lambda_3 = p_1^\alpha I^*(d_2^\alpha + p_3^\alpha) > 0,$$

于是,  $J(E_2)$  的所有特征值均有负实部, 从而条件

$$|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$$

满足, 感染平衡点  $E_2$  是局部渐进稳定的。

#### 4. 数值试验

本节我们通过对模型(2)的数值模拟来研究模型平衡点的稳定性情况。取参数  $A=30$ ,  $p_1=0.6$ ,  $p_2=0.3$ ,  $p_3=0.5$ ,  $d_1=0.3$ ,  $d_2=0.4$ ,  $d_3=0.7$ ,  $\alpha=0.6$ 。通过计算可得基本再生数  $R_0=6.7725$ , 模型(2)的平衡点为  $E_1(15.849, 0, 0)$  和  $E_2(2.3402, 5.3037, 4.3341)$ 。取初始值为  $S(0)=20$ ,  $I(0)=10$ ,  $R(0)=10$ 。在图1中我们绘出了模型(2)的解随时间的变化情况, 从中可以看出, 模型(2)的解最终收敛于感染平衡点  $E_2$ 。

取参数  $A=15$ ,  $p_1=0.2$ ,  $p_2=0.6$ ,  $p_3=0.9$ ,  $d_1=0.8$ ,  $d_2=0.9$ ,  $d_3=0.7$ ,  $\alpha=0.6$ 。通过计算可得基本再生数  $R_0=0.8457$ , 模型(2)有唯一的未感染平衡点  $E_1(5.805, 0, 0)$ 。在图2中我们绘出了模型(2)的解随时间的变化情况, 从中可以看出, 模型(2)的解最终收敛于未感染平衡点  $E_1$ 。

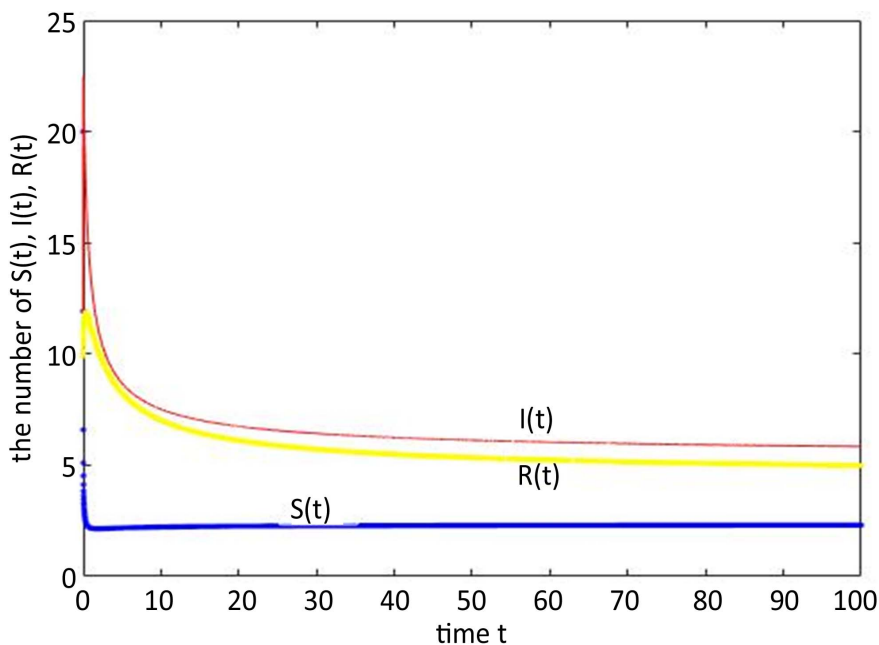


Figure 1. Numerical solutions of model (2) for  $R_0 > 1$

图1.  $R_0 > 1$ 时模型(2)的数值解

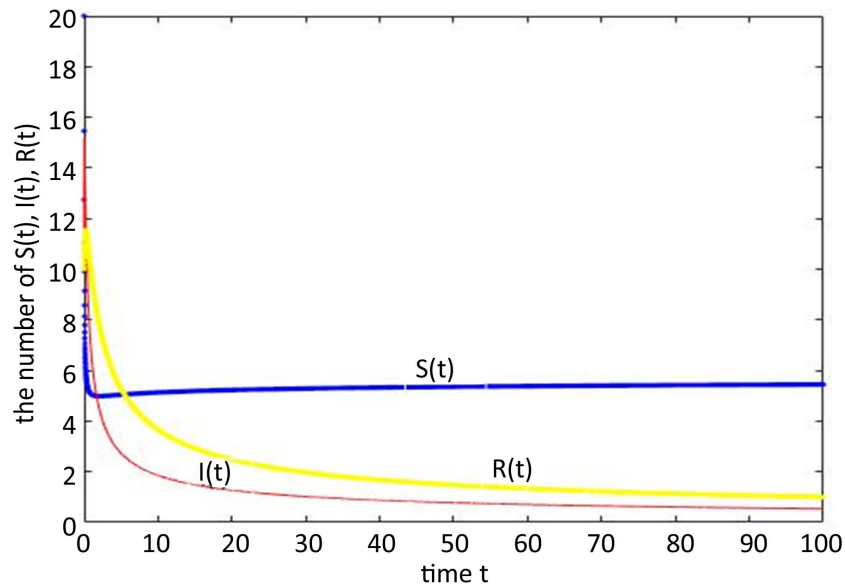


Figure 2. Numerical solutions of model (2) for  $R_0 < 1$

图 2.  $R_0 < 1$  时模型(2)的数值解

## 5. 小结

本文研究了一类基于分数阶微分方程的手机病毒传播模型，得出结论：当基本再生数  $R_0 < 1$  时，模型仅存在唯一的局部稳定的未感染平衡点  $E_1$ ，此时病毒得到消除；当基本再生数  $R_0 > 1$  时，模型除了未感染平衡点  $E_1$  外，还存在一个感染平衡点  $E_2$ ，且此时感染平衡点是局部稳定的，病毒将扩散。因此，为了抑制手机病毒的传播，我们应想办法减少基本再生数的值。结合基本再生数的形式，我们给出如下几点建议：1) 定期检查补丁，及时发现系统漏洞，以减小手机被感染的概率；2) 对感染上病毒的手机立即进行杀毒，增加手机获得免疫的概率；3) 增强用户的隐私安全意识，不随意登陆不正规网站等。

## 基金项目

福建省自然科学基金青年创新项目(No. 2016J05012)，福建省自然科学基金项目(No. 2017J01557)。

## 参考文献 (References)

- [1] 舒心, 王永伦, 张鑫. 手机病毒分析与防范[J]. 信息安全, 2012(8): 54-56.
- [2] 陈萍. 腾讯安全《2016年度互联网安全报告》六大看点[N]. 人民邮电, 2017-01-26.
- [3] 吕汉鑫. 浅谈手机病毒及其防范措施[J]. 黑龙江科技信息, 2017(6): 182.
- [4] Hanert, E., Schumacher, E. and Deleersnijder, E. (2011) Front Dynamics in Fractional-Order Epidemic Models. *Journal of Theoretical Biology*, **279**, 9-16. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2011.03.012>
- [5] Demirci, E., Unal, A. and Ozalp, N. (2011) A Fractional Order SEIR Model with Density Dependent Death Rate. *Hacetatepe Journal of Mathematics and Statistics*, **40**, 287-295.
- [6] Gonzalez-Parra, G., Arenas, A.J. and Chen-Charpentier, B.M. (2014) A Fractional Order Epidemic Model for the Simulation of Outbreaks of Influenza A(H1N1). *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **37**, 2218-2226. <https://doi.org/10.1002/mma.2968>
- [7] Diethelm, K. (2013) A Fractional Calculus Based Model for the Simulation of an Outbreak of Dengue Fever. *Nonlinear Dynamics*, **71**, 613-619. <https://doi.org/10.1007/s11071-012-0475-2>

- 
- [8] Podlubny, I. (1999) Fractional Differential Equations. Acad. Press, New York.
- [9] Ahmed, E., El-Sayed, A.M.A. and Elsaka, H.A.A. (2007) Equilibrium Points, Stability and Numerical Solutions of Fractional-Order Predator-Prey and Rabies Models. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **325**, 542-553. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.01.087>

**知网检索的两种方式:**

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>  
期刊邮箱: [aam@hanspub.org](mailto:aam@hanspub.org)