Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(1), 7-9
Published Online January 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.71002

Hans汉斯

A Note on Rationality Problem

Guoqi Wang

School of Mathematics and Systems Science, Beihang University, Beijing
Email: wgq9664@163.com

Received: Dec. 8th, 2017; accepted: Jan. 9th, 2018; published: Jan. 16th, 2018

Abstract

Let G be a transitive subgroup of S_{14} which is a wreath product. For any field k, G acts on the rational function field $k(x_1,x_2,\cdots,x_{14})$ via k-automorphisms defined by $\sigma(x_i)=x_{\sigma(i)}$, for any $\sigma\in G$, any $1\le i\le 14$. We will show $k(G)=k(x_1,x_2,\cdots,x_{14})^G$ is k-rational.

Keywords

Transitive Subgroup, Rationality Problem, *k*-Rational

有理性问题的一点注记

王国淇

北京航空航天大学数学与系统科学学院，北京
Email: wgq9664@163.com

收稿日期：2017年12月8日；录用日期：2018年1月9日；发布日期：2018年1月16日

摘　要

设群G为S_{14}的传递子群，其为两个群的圈积。令k为任意域，G在有理函数域$k(x_1,x_2,\cdots,x_{14})$上的作用定义为$\sigma(x_i)=x_{\sigma(i)}$，对任意的$\sigma\in G$，$1\le i\le 14$。我们将证明$k(G)=k(x_1,x_2,\cdots,x_{14})^G$是*k*-有理的。

关键词

传递子群，有理性问题，k-有理的

文章引用: 王国淇. 有理性问题的一点注记[J]. 应用数学进展, 2018, 7(1): 7-9.
DOI: 10.12677/aam.2018.71002

1. 引言

自从诺特在1916年发表的一片文章《Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe》里提出的关于域扩张的有理性问题以来，人们就在这个问题上做了各方面的研究，并取得了很大进步。所谓的有理性问题是说，在给定的群 G 和有理函数域 $k(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的情形下，让群 G 通过忠实的置换作用在集合 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上，得到的不变域 $k(x_1,x_2,\cdots,x_n)^G$ 相对于基域 k 的扩张是不是 k-有理的(即纯超越的) [2]。部分学者考虑了不同的域和不同的群作用下的有理性问题，并且取得了很大的进展。本文主要研究当群 G 为表1中的群时的有理性问题。

2. 相关定理

本文所研究的 S_{14} 的传递子群及其生成元如表1所示：

生成元为：

$$a=(1,3,5,7,9,11,13)(2,4,6,8,10,12,14)$$
$$c=(1,8)(2,9)(3,10)(4,11)(5,12)(6,13)(7,14)$$
$$d=(1,3,5,7,9,11,13)$$
$$g=(1,8)$$
$$n=(3,13)(5,11)(7,9)$$

下面我们列出一些将要用到的结论。

定理2.1 [3]

当 $n=7$，设 G 为 S_7 的传递子群，且 G 不同构于 $PSL_2(7)$，则 $k(x_1,\cdots,x_7)^G$ 是 k-有理的；若 G 同构于 $PSL_2(7)$，且 $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})\subset k$，那么 $k(x_1,\cdots,x_7)^G$ 是 k-有理的。

定理2.2 [4]

设 k 是一个域，$n\le 46$，且8不整除 n，则 $k(C_n)$ 是 k-有理的。其中 C_n 表示 n 阶循环群。

定理2.3 [5]

设 k 是一个域，$G\subset S_m, H\subset S_n$，定义 $W=G\wr H$，则 W 可以看做 S_{mn} 的子群。若 $k(x_1,\cdots,x_m)^G$ 和 $k(y_1,\cdots,y_n)^H$ 是 k-有理的，则 $k(z_1,\cdots,z_{nm})^W$ 是 k-有理的。

Table 1. Transitive Subgroups of S_{14}
表1. S_{14} 的传递子群

	阶	生成元	特征描述
G_8	$98=2\cdot 7^2$	d,c	$7\wr 2$
G_{20}	$392=2^3\cdot 7^2$	d,n,c	$D(7)\wr 2$
G_{29}	$896=2^7\cdot 7$	g,a	$2\wr 7$

注：G_j 表示文献[1]中 S_{14} 的第 $j\,(j=8,20,29)$ 个传递子群。

3. 主要定理

我们给出本文的主要结果及其证明。

定理：设 k 为任意域，若 G 为表 1 中的任意一个群，则 $k(x_1,\cdots,x_{14})^G$ 是 k-有理的。

证明：根据表 1 中生成元的特点，对于 G_8 和 G_{29}，我们有 $C_2\subset S_2$，$C_7\subset S_7$，且由定理 2.2 知 $k(C_2)$ 和 $k(C_7)$ 是 k-有理的，再由定理 2.3 知 $k(x_1,\cdots,x_{14})^G$ 是 k-有理的。至于 G_{20}，由于 $D(7)$ 由 d,n 生成，从而 $D(7)$ 是 S_7 的传递子群，根据定理 2.1 知 $k(x_1,\cdots,x_7)^{D(7)}$ 是 k-有理的，且 $k(C_2)$ 是 k-有理的，最后根据定理 2.3 知结论成立。

参考文献 (References)

[1] Conway, J.H. and Mckay, A.H.J. (1998) On Transitive Permutation Groups. *LMS Journal of Computation & Mathematics*, **1**, 1-8. https://doi.org/10.1112/S1461157000000115

[2] Swan, R.G. (1983) Noether's Problem in Galois Theory. Springer, New York, 21-40.

[3] Kang, M. and Wang, B. (2013) Rational Invariants for Subgroups of S_5 and S_7. *Journal of Algebra*, **413**, 345-363. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2014.05.015

[4] Lenstra Jr., H.W. (1974) Rational Functions Invariant under a Finite Abelian Group. *Inventiones Mathematicae*, **25**, 299-325. https://doi.org/10.1007/BF01389732

[5] Kang, M.C., Wang, B.S. and Zhou, J. (2013) Invariants of Wreath Products and Subgroups of S_6. *Mathematics*, **55**, 265-269.