Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(11), 1418-1428
Published Online November 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.711166

Hans汉斯

Well-Posed Problem for Reaction Diffusion Equation with Memory

Jiangwei Zhang, Shuangli Luo, Jun Li

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan
Email: 1453769169@qq.com, 916352800@qq.com, 2286693643@qq.com

Received: Oct. 26th, 2018; accepted: Nov. 15th, 2018; published: Nov. 22nd, 2018

Abstract

The problem of the suitability of the reaction diffusion equation with memory terms is discussed in this paper. Using Galerkin method, energy estimation and compactness theorem, this paper studies the well-posed of the overall strong solution in space $H_0^1(\Omega)\times L_\mu^2\left(\mathbb{R}^+,H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right)$. The existence, uniqueness and continuous dependence are obtained under the condition that non-linear terms satisfy the exponential growth of any order.

Keywords

Classical Diffusion Equations, Well-Posedness, Galerkin Method, Energy Estimation

带记忆项的反应扩散方程适定性问题

张江卫，罗双利，李　军

长沙理工大学数学与统计学院，湖南　长沙
Email: 1453769169@qq.com, 916352800@qq.com, 2286693643@qq.com

收稿日期：2018年10月26日；录用日期：2018年11月15日；发布日期：2018年11月22日

摘　要

本文主要讨论带有记忆项的反应扩散方程适定性问题。利用Galerkin方法、能量估计以及紧性定理对空间$H_0^1(\Omega)\times L_\mu^2\left(\mathbb{R}^+,H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right)$中整体强解的适定性进行了研究，获得在非线性项满足任意阶指数增长条件下，系统整体强解的存在唯一性及连续性。

文章引用：张江卫，罗双利，李军．带记忆项的反应扩散方程适定性问题[J]．应用数学进展, 2018, 7(11): 1418-1428.
DOI: 10.12677/aam.2018.711166

关键词

经典扩散方程，适定性，Galerkin方法，能量估计

1. 引言

本文研究如下带记忆项的反应扩散方程的初边值问题：

$$\begin{cases} u_t - \alpha\Delta u - \int_0^\infty k(s)\Delta u(t-s)\,\mathrm{d}s + f(u) = g, & (x,t)\in\Omega\times R^+, \\ u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, & x\in\partial\Omega, t\ge 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是有界光滑区域， $g = g(x)\in L^2(\Omega)$ 为已知的，非线性项 f 满足任意阶指数增长， $k(s)$ 为核函数，u 为未知函数。

当考虑到某段历史的扩散累积对当前状态的影响时，可获得具有衰退记忆的反应扩散方程。而系统(1.1)中衰退记忆对能量衰退的影响通过函数 $\Delta u(\cdot)$ 和 $k(\cdot)$ 的卷积来体现，且其是经典反应扩散方程的一种推广情形，(当 $k\equiv 0$ 时，变为经典反应扩散方程) [1]，被广泛的应用于流体力学、固体力学和热传导理论领域，如[2] [3] [4] [5]；通常认为系统(1.1)对应着一个非局部算子。

系统(1.1)描述了热流在衰退记忆影响下，同类的、固定的和各向同性的黏弹性热传导体中的传导过程；该种合成的模型来源于 Coleman 和 Gurtin 已经建立且被人们广泛接受的带记忆的热流理论框架[6]。在[7]中，E. Aifantis 建立了反应扩散方程的框架。

$$u_t(t) - \Delta u(t) - f(u) = g\,。 \tag{1.2}$$

因在系统(1.1)中考虑了传播介质的黏弹性，故在方程(1.2)中增加衰退记忆项，由此得出的模型为本文需要研究的带记忆项的反应扩散方程。

据我们所知，对带有记忆项的反应扩散方程的研究主要是弱拓扑空间 $L^2(\Omega)\times L^2_\mu\left(R^+, H_0^1(\Omega)\right)$，而在非线性项满足任意阶指数增长和强拓扑空间 $H_0^1(\Omega)\times L^2_\mu\left(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right)$ 上的适定性问题考虑较少。

本文将利用 Galerkin 方法结合紧性定理以及分析技巧研究带记忆项半线性反应扩散方程在相空间 $H_0^1(\Omega)\times L^2_\mu\left(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right)$ 中解的存在唯一性及连续性问题。

2. 预备知识

为了后面叙述的方便，首先介绍一些常用的记号。记 $V_0 = L^2(\Omega)$，且其范数约定为 $|u|_2 = \left(\int_\Omega \left|u(x)^2\right|\right)^{\frac{1}{2}}, \forall u\in V_0$。令 $V_1 = H_0^1(\Omega)$， $V_2 = H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$，其模或范数约定为：

$$\|u\|_0 = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},\ \forall\, u\in H_0^1(\Omega),$$

$$\|u\|_1 = \left(\int_\Omega |\Delta u(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},\ \forall\, u\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\,。$$

本文中的 C 表示任意正常数，并且在同一行中 C 可能表示不同的常数。

令 $V_r^{-1}, r=0,1,2$，表示 V_r 的对偶空间，我们定义如下卷积：

$$\langle \varphi,\psi \rangle_r = \int_0^\infty \varphi(s)\psi(s)\mathrm{d}s,\quad \varphi \in V_r, \psi \in V_r^{-1}\text{。}$$

设 $L_\mu^2(\mathbb{R}^+,V_r)(r=0,1,2)$ 是定义在 $\mathbb{R}^+$ 上取值在 V_r 上的一族 Hibert 空间，并且对其赋予内积与范数：

$$\langle \varphi,\psi \rangle_{\mu,r} = \int_0^\infty \mu(s)\langle \varphi(s),\psi(s) \rangle_r \mathrm{d}s\text{，}$$

$$\|\varphi\|_{\mu,r}^2 = \int_0^\infty \mu(s)\|\varphi(s)\|_r^2 \mathrm{d}s\text{。}$$

我们也定义另一族希尔伯特空间：$M_r = V_{r-1} \times L_\mu^2(\mathbb{R}^+,V_r)(r=0,1,2)$，并且赋予范数：

$$\|z\|_{M_r}^2 = \|(u,\eta^t)\|_{M_r}^2 = \|u\|_r^2 + \|\eta^t\|_{\mu,r}^2\text{。}$$

针对该论文问题的研究，我们给出以下假设条件：

1) 对于记忆核函数，给出以下的条件，令 $\mu(s) = -k'(s)$，如[5] [6]，假设满足：

$$\mu \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+),\quad \mu(s) \ge 0,\quad \mu'(s) \le 0,\quad \forall s \in \mathbb{R}^+, \tag{2.1}$$

且存在 $\delta > 0$，使得

$$\mu'(s) + \delta\mu(s) \le 0,\quad \forall s \in \mathbb{R}^+, \tag{2.2}$$

由(2.1)和(2.2)得

$$\mu(\infty) = \lim_{s\to\infty}\mu(s) = 0, \tag{2.3}$$

进一步假设

$$m_0 = \int_0^\infty \mu(s)\mathrm{d}s < \infty\text{。}$$

2) 非线性 $f \in C^1$，$f(0)=0$，且满足任意阶指数增长条件

$$\gamma_1|s|^p - \beta_1 \le f(s)s \le \gamma_2|s|^p + \beta_2,\quad s \in \mathbb{R}, p \ge 2, \tag{2.4}$$

耗散条件：

$$f'(s) \ge -l, \tag{2.5}$$

其中 $\gamma_i, \beta_i (i=1,2)$ 和 l 都是正常数。令

$$F(s) = \int_0^s f(y)\mathrm{d}y\text{，}$$

$$\gamma_1|s|^p - \beta_1 \le F(s) \le \gamma_2|s|^p + \beta_2, s \in R, p \ge 2\text{。}$$

为了便于研究，我们引入新的变量 η 来描述过去的历史状态，令

$$\eta = \eta^t(s) = \int_0^s u(t-\tau)\mathrm{d}\tau\text{，}$$

则有

$$\eta_t^t = -\eta_s^t + u\text{。}$$

3) u 的历史变量 $u(-s)$，满足以下条件：存在正实数 $\Re$ 和 $\sigma \le \delta$ （δ 来自于(2.2)式，使得

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma s}\|u(-s)\|_1^2 \mathrm{d}s \le \Re\text{，}$$

根据上述假设原方程可改写为如下形式：

$$\begin{cases} u_t - \Delta u - \int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta^t(s)\,\mathrm{d}s + f(u) = g,\ (x,t)\in\Omega\times R^+ \\ \eta_t^t + \eta_s^t = u \end{cases} \tag{2.6}$$

满足边界条件：对一切的 $t \ge 0$

$$u(x,t)\big|_{\partial\Omega} = 0\text{，}\quad \eta^t(x,s)\big|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}^+} = 0\text{，} \tag{2.7}$$

及初始条件：对一切的 $x\in\Omega$

$$u(x,0) = u_0(x)\text{，}\quad \eta^0(x,s) = \int_0^s u_0(x,-\tau)\,\mathrm{d}\tau\text{。} \tag{2.8}$$

引理 2.1 [5]：令 V 是 Hilbert 空间，$I=[0,T],\forall T>0$ 记忆核 $\mu(s)$ 满足(I)中的条件，则对任意的 $\eta^t \in C\left(I;L_\mu^2\left(\mathbb{R}^+;V_r\right)\right)$，有以下估计

$$\left\langle \eta^t,\eta_s^t\right\rangle_{\mu,r} \ge \frac{\delta}{2}\left\|\eta^t\right\|_{\mu,r}^2, \tag{2.9}$$

成立。

引理 2.2 [8]：设 X,H,Y 是巴拿赫空间，满足 X 紧嵌入 H，而 H 连续嵌入 Y，且 X 是自反的，进一步假设 $\{u_n\}$ 是在 $L^2(0,T;X)$ 中为一致有界的序列，$\{u_{nt}\}$ 在 $L^p(0,T;H)$ $(P>1)$ 中一致有界。则存在子列 $\left\{u_{n_j}\right\},(j=1,2,\cdots)$，其在 $L^2(0,T;H)$ 中必定是强收敛的。

3. 适定性

定义 3.1：对任意的 $T>0$，$I=[0,T]$，设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是有界光滑区域，称 u 是方程(2.6)在区间 I 上满足初值边界条件(2.7)、(2.8)的整体强解，如果 z 满足方程(2.6)并且

$$u\in C(I;V_0)\cap L^\infty(I;V_1)\cap L^2(I;V_2),u_t\in L^2(I;V_0),\eta^t\in C\left(I;L_\mu^2\left(\mathbb{R}^+;V_2\right)\right)$$

$$\eta_t^t+\eta_s^t\in L^\infty\left(I;L_\mu^2\left(\mathbb{R}^+;V_1\right)\right)\cap L^2\left(I;L_\mu^2\left(\mathbb{R}^+;V_2\right)\right)$$

且对任意 $\omega(x)\in V_0$，$\varphi(x,t)\in L_\mu^0\left(\mathbb{R}^+;V_0\right)$ 有

$$\begin{cases} (u_t,\omega)-(\Delta u,\omega)-\left(\Delta\eta^t,\omega\right)_{\mu,V_0}+\left(f(u),\omega\right)=(g,\omega), \\ \left(\Delta\eta_t^t+\Delta\eta_s^t,\varphi\right)_{\mu,V}=(\Delta u,\varphi), \end{cases} \tag{3.1}$$

对 $t\in I$ 几乎处处成立。

3.1. 强解的存在性

设 $\omega_j(x)$ 是特征方程：

$$-\Delta\omega_j=\lambda_j\omega_j,\omega_j\big|_{\partial\Omega}=0$$

对应于特征值 λ_j 的特征函数，因此 $\left\{\omega_j\right\}_{j=1}^\infty$ 组成 $L^2(\Omega)$ 的标准正交基，即

$$\left(\omega_i,\omega_j\right)=\delta_{ij},\ i,j=1,2,\cdots$$

当 $\Omega\in C^2$，有 $\omega_j(x)\in D(A)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，且 $\left\{\omega_j\right\}_{j=1}^\infty$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 的正交基(但非标准正交基)，$H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 即为 $\left\{\omega_j\right\}_{j=1}^\infty$ 在 $H^2(\Omega)$ 中的闭线性扩张。因此 $\left\{\omega_j\right\}_{j=1}^\infty$ 也是 $D(A)$ 的正交基(但非标准正交

基)。值得强调的是$\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$并不是$L_\mu^2(\mathbb{R}^+,D(A))$基。这是因为$L_\mu^2(\mathbb{R}^+,D(A))$中的元素并不能由$\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$线性表示。接下来我们将构造$L_\mu^2(\mathbb{R}^+,D(A))$一组基$\{\varsigma_i\}_{i=1}^{\infty}$。假设$\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$是$L_\mu^2(\mathbb{R}^+)$的一组正交基，则选择$l_k\omega_j$，$k,j=1,2,\cdots,\infty$作为$L_\mu^2(\mathbb{R}^+,D(A))$的正交基$\{\varsigma_i\}_{i=1}^{\infty}$。

设E_n^1,E_n^2分别为由$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$和$\varsigma_1,\varsigma_2,\cdots,\varsigma_n$生成的线性子空间，即

$$E_n^1=span\{(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)\},\quad E_n^2=span\{(\varsigma_1,\varsigma_2,\cdots,\varsigma_n)\} \tag{3.2}$$

记P_n为V_1至E_n^1的正交投影，Q_n为$L_\mu^2(\mathbb{R}^+,V_2)$至$E_n^2$的正交投影，即对任意的$z=(u,\eta^t)\in M_2$，有

$$u_n=P_nu=\sum_{j=1}^{n}a_j(t)\omega_j,\quad u_{tn}=P_nu_t=\sum_{j=1}^{n}b_j(t)\omega_j,\quad \eta_n^t=Q_n\eta^t=\sum_{j=1}^{n}c_j(t)\varsigma_j$$

这里

$$a_j(t)=\langle u,\omega_j\rangle_{V_2},\quad b_j(t)=\langle u_t,\omega_j\rangle_{V_2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_j(t),\quad c_j(t)=\langle \eta^t,\varsigma_j(s)\rangle_{\mu,V_2}$$

定义$z_n=(u_n,\eta_n^t)$是方程(1.1)的解，形式如下：

$$u_n(t)=\sum_{j=1}^{n}a_j(t)\omega_j \text{ 和 } \eta_n^t(s)=\sum_{j=1}^{n}c_j(t)\varsigma_j$$

由 Galerkin 法可知，它满足如下的非线性常微分方程组：

$$\begin{cases} u_{nt}(t)-\Delta u_n(t)-\int_0^\infty k(s)\Delta\eta_n^t(s)\mathrm{d}s+f(u_n(t))=g_n, \\ \eta_{nt}^t=-\eta_{ns}^t+u_n, \end{cases} \tag{3.3}$$

并且满足如下初边值条件：

$$(u_n,\eta_n^t)|_{t=0}=(u_{n0},\eta_n^0), \tag{3.4}$$

$$(u_n,\eta_n^t)|_{\partial\Omega}=(0,0), \tag{3.5}$$

对于$a_{jn}(0),\varsigma_{jn}(0)$，我们可以这样选取，使其满足：

$$a_{jn}(0)=\langle u_n(0),\omega_j\rangle_{V_2},\quad \varsigma_{jn}(0)=\langle \eta_n^0(s),\varsigma_j(s)\rangle_{\mu,V_2},$$

且$u_{n0}=P_nu_0$，$\eta_n^0=Q_n\eta^0$，在各自所在的空间里满足：当$n\to\infty$时，有

$$u_n(0)\xrightarrow{V_1}u_0,\quad \eta_n^0(s)\xrightarrow{L_\mu^2(\mathbb{R}^+,V_2)}\eta^0(s),$$

以及对任意的$r\in[0,1]$，有

$$\|u_n(0)\|_r\le\|u_0\|_r,\quad \|\eta_n^0(0)\|_{\mu,r}\le\|\eta^0\|_{\mu,r}, \tag{3.6}$$

由标准的常微分理论，方程(3.3)满足初边值条件(3.4)，(3.5)的解存在唯一。

引理 3.1：假设$\Omega\subset R^3$为具有适当光滑边界的有界域，$T>0$为任意常数，并且

1) $f\in C^1(R)$而且满足条件(2.4)，(2.5)，核函数μ满足(2.1)，(2.2)，而$g\in L^2(\Omega)$；

2) $z_0=(u_0,\eta^0)\in\mathcal{M}_2$并选取$a_{jn}(0),b_{jn}(0)$，使得

$$u_n(0)\xrightarrow{V_1}u_0,\quad \eta_n^0(s)\xrightarrow{L_\mu^2(\mathbb{R}^+,V_2)}\eta^0(s),$$

则对于一切的$t\in[0,T]$，常微分方程组(3.3)存在唯一解$z_n(t)=(u_n(t),\eta_n^t)\in\mathcal{M}_2$，并且满足：

$$|u_n(t)|_2^2+\|\eta_n^t(t)\|_{\mu,1}^2+\int_0^t\left(\|u_n(s)\|_0^2+\|\eta_n^t\|_{\mu,1}^2+|u_n(s)|_p^p\right)\mathrm{d}s\le E_1, \tag{3.7}$$

其中 E_1 是同 n,t 无关的某个确定的正常数。

证明：对(3.3)式中第一个方程的两边同 u_n 作内积，由分部积分公式、(3.3)中第二个方程及引理 2.1 有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left|u_n(t)\right|_2^2+\left\|\eta_n^t\right\|_{\mu,1}^2\right]+\left\|u_n(t)\right\|_0^2+\frac{\delta}{2}\left\|\eta_n^t\right\|_{\mu,1}^2+\int_\Omega f\left(u_n(t)\right)u_n(t)\le\left(g_n,u_n(t)\right),$$

由非线性项假设条件(2.4)及 Hölder 不等式，我们可得到如下微分不等式

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left|u_n\right|_2^2+\left\|\eta_n^t\right\|_{\mu,1}^2\right]+\frac{1}{2}\left\|u_n\right\|_0^2+\frac{\delta}{2}\left\|\eta_n^t\right\|_{\mu,1}^2+\gamma_1\left|u_n\right|_p^p\le\frac{1}{2\lambda_1}\left|g_n\right|_2^2+\beta_1\left|\Omega\right|,\tag{3.8}$$

其中 $|\Omega|$ 为区域 Ω 的体积。取

$$\alpha=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{\delta}{2},\gamma_1\right\},$$

$$\left|u_n(t)\right|_2^2+\left\|\eta_n^t(t)\right\|_{\mu,1}^2\le\frac{T}{2\lambda_1}\left|g_n\right|_2^2+\beta_1\left|\Omega\right|T+\left|u_{n0}\right|_2^2+\left\|\eta_n^0\right\|_{\mu,1}^2,\tag{3.9}$$

$$\int_0^t\left(\left\|u_n(s)\right\|_0^2+\left\|\eta_n^s\right\|_{\mu,1}^2+\left|u_n(s)\right|_p^p\right)\mathrm{d}s\le\frac{1}{\alpha}\left[\frac{T}{2\lambda_1}\left|g_n\right|_2^2+\beta_1\left|\Omega\right|T+\left|u_{n0}\right|_2^2+\left\|\eta_n^0\right\|_{\mu,1}^2\right]\tag{3.10}$$

由(3.6)并记

$$E_1=\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left[\frac{T}{2\lambda_1}\left|g_n\right|_2^2+\beta_1\left|\Omega\right|T+\left|u_0\right|_2^2+\left\|\eta^0\right\|_{\mu,1}^2\right],$$

则有

$$\left|u_n(t)\right|_2^2+\left\|\eta_n^t(t)\right\|_{\mu,1}^2+\int_0^t\left(\left\|u_n(s)\right\|_0^2+\left\|\eta_n^t(s)\right\|_{\mu,1}^2+\left|u_n(s)\right|_p^p\right)\mathrm{d}s\le E_1。$$

证毕。

引理 3.2：在引理 3.1 的假设条件下，方程(3.3)的解对一切的 $t\in[0,T]$ 有下列不等式：

$$\left\|u_n(t)\right\|_2^2+\left\|\eta_n^t(t)\right\|_{\mu,2}^2+\int_0^t\left(\left\|u_n(s)\right\|_1^2+\left\|\eta_n^t(s)\right\|_{\mu,2}^2\right)\mathrm{d}s\le E_2,$$

其中 E_2 为不依赖于 n,t 的正常数。

证明：对(3.3)式中第一个方程的两边同 $-\Delta u_n$ 作内积，由分部积分公式及(3.3)中第二个方程及引理 2.1 有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left\|u_n(t)\right\|_0^2+\left\|\eta_n^t\right\|_{\mu,2}^2\right]+\left|\Delta u_n\right|_2^2+\frac{\delta}{2}\left\|\eta_n^t\right\|_{\mu,2}^2-\int_\Omega f\left(u_n\right)\Delta u_n\le-\left(g_n,\Delta u_n\right)。$$

由非线性项假设条件(2.5)及 Hölder 不等式，我们可得到如下微分不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left\|u_n\right\|_0^2+\left\|\eta_n^t\right\|_{\mu,2}^2\right]+\left|\Delta u_n\right|_0^2+\delta\left\|\eta_n^t\right\|_{\mu,2}^2\le\left|g_n\right|_2^2+2l\left\|u_n\right\|_0^2,\tag{3.11}$$

其中 $|\Omega|$ 为区域 Ω 的体积。取

$$\alpha_1=\min\{1,\delta\},$$

$$\left\|u_n(t)\right\|_0^2+\left\|\eta_n^t(t)\right\|_{\mu,2}^2\le T\left|g_n\right|_2^2+\left\|u_{n0}\right\|_0^2+\left\|\eta_n^0\right\|_{\mu,2}^2+2l\int_0^t\left\|u_n(s)\right\|_0^2\mathrm{d}s,\tag{3.12}$$

$$\int_0^t\left(\left|\Delta u_n(s)\right|_2^2+\left\|\eta_n^s\right\|_{\mu,2}^2\right)\mathrm{d}s\le\frac{1}{\alpha_1}\left[T\left|g_n\right|_2^2+\left\|u_{n0}\right\|_0^2+\left\|\eta_n^0\right\|_{\mu,2}^2+2l\int_0^t\left\|u_n(s)\right\|_0^2\mathrm{d}s\right],\tag{3.13}$$

由(3.6)，并记

$$E_2=\left(1+\frac{1}{\alpha_1}\right)\left[T\left|g_n\right|_2^2+2lE_1+\left\|u_0\right\|_0^2+\left\|\eta^0\right\|_{\mu,2}^2\right],$$

则有

$$\left\|u_n(t)\right\|_2^2+\left\|\eta_n^t(t)\right\|_{\mu,2}^2+\int_0^t\left(\left\|u_n(s)\right\|_1^2+\left\|\eta_n^t(s)\right\|_{\mu,2}^2\right)\mathrm{d}s\le E_2。$$

证毕。

引理 3.3：在引理 3.1 的假设条件下，方程(3.3)的解对一切的 $t\in[0,T]$ 有下列不等式：

$$\left|u_n(t)\right|_p^p+\int_0^t\left|u_n(s)\right|_{2p-2}^{2p-2}\mathrm{d}s\le E_3；$$

其中 E_3 为不依赖于 n,t 的正常数。

证明：对(3.3)式中第一个方程的两边同时乘 $\left|u_n\right|^{p-2}u_n$ 作在 Ω 内积分，由分部积分公式、(3.3)中第二个方程及前面引理，有

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left|u_n\right|_p^p\right]+\frac{\gamma_1}{2}\left|u_n\right|_{2p-2}^{2p-2}\le\frac{m_0}{\gamma_1}\left\|\eta_n^t\right\|_{\mu,2}^2+\frac{1}{\gamma_1}\left|g_n\right|_2^2+\beta_1\left|\Omega\right|^{\frac{2}{p}}\left|u_n\right|_p^{p-2},\tag{3.14}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left|u_n\right|_p^p\right]\le\frac{m_0p}{\gamma_1}\left\|\eta_n^t\right\|_{\mu,2}^2+\frac{p}{\gamma_1}\left|g_n\right|_2^2+\beta_1\left|\Omega\right|^{\frac{2}{p}}p\left|u_n\right|_p^{p-2},$$

两边对 t 在区间 $[s,t]$ $(T\ge t\ge s\ge 0)$ 上积分，得

$$\left|u_n(t)\right|_p^p\le\left|u_n(s)\right|_p^p+\frac{m_0p}{\gamma_1}\int_0^t\left\|\eta_n^t\right\|_{\mu,2}^2\mathrm{d}s+\frac{pT}{\gamma_1}\left|g_n\right|_2^2+\beta_1\left|\Omega\right|^{\frac{2}{p}}pT^{\frac{2}{p}}\left[\int_0^t\left|u_n(s)\right|_p^p\mathrm{d}s\right]^{\frac{p-2}{p}},$$

结合引理 3.1 和引理 3.2，有

$$\left|u_n(t)\right|_p^p\le\left|u_n(s)\right|_p^p+\frac{m_0p}{\gamma_1}E_2+\frac{pT}{\gamma_1}\left|g_n\right|_2^2+\beta_1\left|\Omega\right|^{\frac{2}{p}}pT^{\frac{2}{p}}\left[E_1\right]^{\frac{p-2}{p}},\tag{3.15}$$

(3.15)两边对 s 在区间 $[0,T]$ 上积分，并两边同除以得 T，得

$$\left|u_n(t)\right|_p^p\le\frac{1}{T}\int_0^T\left|u_n(s)\right|_p^p\mathrm{d}s+\frac{m_0p}{\gamma_1}E_2+\frac{pT}{\gamma_1}\left|g_n\right|_2^2+\beta_1\left|\Omega\right|^{\frac{2}{p}}pT^{\frac{2}{p}}\left[E_1\right]^{\frac{p-2}{p}},$$

于是有对一切的 $t\in[0,T]$

$$\left|u_n(t)\right|_p^p\le\frac{E_1}{T}+\frac{m_0p}{\gamma_1}E_2+\frac{pT}{\gamma_1}\left|g_n\right|_2^2+\beta_1\left|\Omega\right|^{\frac{2}{p}}pT^{\frac{2}{p}}\left[E_1\right]^{\frac{p-2}{p}},\tag{3.16}$$

(3.14)式两边对 t 在区间 $[s,t]$ $(T\ge t\ge s\ge 0)$ 上积分，得

$$\gamma_1\int_s^t\left|u_n(s)\right|_{2p-2}^{2p-2}\mathrm{d}s\le\left|u_n(s)\right|_p^p+\frac{m_0p}{\gamma_1}E_2+\frac{pT}{\gamma_1}\left|g_n\right|_2^2+\beta_1\left|\Omega\right|^{\frac{2}{p}}pT^{\frac{2}{p}}\left[E_1\right]^{\frac{p-2}{p}}。$$

将(3.16)代入上式，并注意到 s 的任意性，有

$$\int_s^t\left|u_n(s)\right|_{2p-2}^{2p-2}\mathrm{d}s\le\frac{2}{\gamma_1}\left[\frac{E_1}{T}+\frac{m_0p}{\gamma_1}E_2+\frac{pT}{\gamma_1}\left|g_n\right|_2^2+\beta_1\left|\Omega\right|^{\frac{2}{p}}pT^{\frac{2}{p}}\left[E_1\right]^{\frac{p-2}{p}}\right],$$

令

$$E_3 = \left(1+\frac{2}{\gamma_1}\right)\left[\frac{E_1}{T}+\frac{m_0 p}{\gamma_1}E_2+\frac{pT}{\gamma_1}|g_n|_2^2+\beta_1|\Omega|^{\frac{2}{p}}pT^{\frac{2}{p}}\left[E_1\right]^{\frac{p-2}{p}}\right],$$

故对一切的 $t\in[0,T]$

$$|u_n(t)|_p^p+\int_0^t |u_n(s)|_{2p-2}^{2p-2}\,\mathrm{d}s \le E_3。$$

证毕。

引理 3.4： 在引理 3.1 的假设条件下，方程(3.3)的解对一切的 $t\in[0,T]$ 有下列不等式：

$$\int_0^t |u_{nt}(s)|_2^2\,\mathrm{d}s \le E_4。$$

其中 E_4 为不依赖于 n,t 的正常数。

证明：对(3.3)式中第一个方程的两边同时乘 u_{nt} 作在 Ω 内积分，由分部积分公式、(3.3)中第二个方程及前面引理，有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\|u_n\|_0^2+2\int_\Omega F(u_n)+2\int_\Omega g_n u_n\right]+\frac{1}{2}|u_{nt}|_2^2 \le \int_0^\infty \mu(s)\int_\Omega \Delta\eta_n^t(s)u_{nt}(t)\,\mathrm{d}s, \tag{3.17}$$

而我们注意到

$$\int_\Omega g_n u_n \le \frac{1}{2}|g_n|_2^2+\frac{1}{2}|u_n|_2^2, \tag{3.18}$$

即

$$\int_0^\infty \mu(s)\int_\Omega \Delta\eta_n^t(s)u_{nt}(t)\,\mathrm{d}s \le m_0\left\|\eta_n^t\right\|_{\mu,2}^2+\frac{1}{4}|u_{nt}|_2^2 \tag{3.19}$$

将(3.19)式代入(3.17)式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\|u_n\|_0^2+\int_\Omega F(u_n)+\int_\Omega g_n u_n\right]+\frac{1}{4}|u_{nt}|_2^2 \le C\left\|\eta_n^t\right\|_{\mu,2}^2, \tag{3.20}$$

(3.20)式两对 t 在区间 $[s,t]\subset[0,T]$ 上积分，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|u_n(t)\|_0^2+\int_\Omega F(u_n(t))+\int_\Omega g_n u_n(t)+\frac{1}{4}\int_s^t |u_n(s)|_2^2\,\mathrm{d}s\\ &\le \left[\frac{1}{2}\|u_n(s)\|_0^2+\int_\Omega F(u_n(s))+\int_\Omega g_n u_n(s)\right]+C\int_0^T \left\|\eta_n^t\right\|_{\mu,2}^2\,\mathrm{d}s\end{aligned}, \tag{3.21}$$

而

$$\int_\Omega |F(u_n(t))| \le C|u_n(t)|_p^p+k,$$

其中 C,k 为与 n 无关的正常数。因此存在与 n,t 无关的正常数 E_4，使得对一切的 $t\in[0,T]$，有

$$\int_0^t |u_{nt}(s)|_2^2\,\mathrm{d}s \le E_4。$$

证毕。

接下来，我们将讨论方程(3.3)满足初边值条件(3.4)，(3.5)的解收敛性问题。

引理 3.4: 对任意的 $T>0$ 和 $z_0=(u_0,\eta^0)\in\mathcal{M}_2$。方程(3.3)存在满足初边值条件(3.4)，(3.5)的整体强解：

$$z=(u(x,t),\eta^t),$$

满足

$$u \in L^2\left(\left[0,T\right],D\left(A\right)\right),\eta^t \in L^2\left(\left[0,T\right],L_\mu^2\left(\mathbb{R}^+,D\left(A\right)\right)\right)。$$

证明：由引理 3.1~引理 3.4 有

$$\Delta u_n \text{ 在 } L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right) \text{ 中关于 } n,t \text{ 是一致有界的，}$$

$$\Delta \eta_n^t \text{ 在 } L^2\left(0,T;L_\mu^2\left(\mathbb{R}^+,L^2\left(\Omega\right)\right)\right) \text{ 中关于 } n,t \text{ 是一致有界的，}$$

$$u_{nt} \text{ 在 } L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right) \text{ 中关于 } n,t \text{ 是一致有界的，}$$

因此，由 Alaoglu 弱紧性定理和所在空间的自反性，存在 $\left\{z_n=\left(u_n,\eta_n^t\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列 $\left\{z_{n_j}=\left(u_{n_j},\eta_{n_j}^t\right)\right\}_{j=1}^{\infty}$，使得

$$\Delta u_{n_j} \text{ 在 } L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right) \text{ 中弱收敛于 } \Delta u，$$

$$\Delta \eta_{n_j}^t \text{ 在 } L^2\left(0,T;L_\mu^2\left(\mathbb{R}^+,L^2\left(\Omega\right)\right)\right) \text{ 中弱收敛于 } \Delta \eta^t，$$

$$u_{n_j t} \text{ 在 } L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right) \text{ 中弱收敛 } u_t。$$

在不会引起误解的情形下，为了使用的方便，在后面的讨论中我们仍用 $\left\{z_n=\left(u_n,\eta_n^t\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 表示其子列。

由于

$$\int_\Omega \left|f\left(u_n\right)\right|^2 \le \tilde{\gamma}_2 \left|u_n\right|_{2(p-1)}^{2(p-1)} + \tilde{\beta}_2$$

因此由引理 3.3，有

$$f\left(u_n\right) \text{ 在 } L^2\left(\Omega_T\right) \text{ 关于 } n,t \text{ 是一致有界的，}$$

因而有

$$f\left(u_n\right) \to \chi \text{ 在 } L^2\left(\Omega_T\right) \text{ 是弱收敛的，这里 } \Omega_T = \Omega\times\left[0,T\right]。$$

由于对任意的 $t\in\left[0,T\right]$，$u_n \to u$ 在 $L^2\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right)$ 弱收敛，由紧性定理(引理 2)，$u_n \to u\ \left(n\to\infty\right)$ 在 $L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right)$ 是强收敛的。因此 $u_n \to u\ \left(n\to\infty\right)$ 在 $L^2\left(\Omega\right)$ 中关于 $t\in\left[0,T\right]$ 几乎处处收敛，利用 f 的连续性，有：

$$f\left(u_n\left(x,t\right)\right) \to f\left(u\left(x,t\right)\right) \text{ 于 } \Omega\times\left[\tau,t\right] \text{ 上几乎处处收敛，}$$

并有 $f\left(u_n\right)$ 在 $\left[0,T\right]$ 上关于 n 是一致有界的，由 Lebesgue 逐项积分定理，对任意给定的 $\varphi\left(x,t\right)\in C^0\left(\left[0,t\right];L^2\left(\Omega\right)\right)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega\times[0,T]} f\left(u_n\right)\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{\Omega\times[0,T]} f\left(u\right)\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

则 $f\left(u_n\right)\to f\left(u\right)$ 在 $L^2\left(\Omega_T\right)$ 中收敛。因为弱极限是唯一的，所以，$\chi = f\left(u\right)$。

因为 u_{nt} 在 $L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right)$ 中是一致有界的，因此 $u_{nt}\to u_t$ 在 $L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right)$ 是弱收敛的。显然有 $g_n \to g$ 在 $L^2\left(\Omega\right)$ 是弱收敛的。

容易验证 z 满足初始条件 $z\left(0\right)=z_0$。则 $z=\left(u,\eta^t\right)$ 是该方程的解，并且

$$u\in C\left(I;V_0\right)\cap L^\infty\left(I;V_1\right)\cap L^2\left(I;V_2\right),u_t\in L^2\left(I;V_0\right),\eta^t\in C\left(I;L_\mu^2\left(\mathbb{R}^+;V_2\right)\right)$$

$$\eta_t^t+\eta_s^t\in L^\infty\left(I;L_\mu^2\left(\mathbb{R}^+;V_1\right)\right)\cap L^2\left(I;L_\mu^2\left(\mathbb{R}^+;V_2\right)\right)$$

并且对任意 $\omega(x)\in V_0$， $\varphi(x,t)\in L_\mu^0\left(\mathbb{R}^+;V_0\right)$ 有

$$\begin{cases}\left(u_t,\omega\right)-\left(\Delta u,\omega\right)-\left(\Delta\eta^t,\omega\right)_{\mu,V_0}+\left(f(u),\omega\right)=\left(g,\omega\right),\\ \left(\Delta\eta_t^t+\Delta\eta_s^t,\varphi\right)_{\mu,V}=\left(\Delta u,\varphi\right),\end{cases}\tag{3.22}$$

对 $t\in I$ 几乎处处成立，证毕。

3.2. 强解的唯一性与连续性

引理 3.5：由引理 4 获得的方程(3.3)满足初边值条件(3.4)，(3.5)的整体强解是唯一的。

证明：设 $z_1=\left(u_1,\eta_1^t\right)$，$z_2=\left(u_2,\eta_2^t\right)$ 是方程(1.1)的两个解，且初值 $z_{10},z_{20}\in\mathcal{M}_2$，令 $\omega=u_1-u_2,\varsigma^t=\eta_1^t-\eta_2^t$，则 ω 满足下面的初边值问题

$$\begin{cases}\omega_{nt}-\Delta\omega_n-\int_0^\infty\mu(s)\Delta\varsigma_n^t(s)\mathrm{d}s+f\left(u_{1n}\right)-f\left(u_{2n}\right)=0\\ \varsigma_{nt}^t=-\varsigma_{ns}^t+\omega_n\end{cases}\tag{3.23}$$

方程(3.3)两边 $-\Delta\omega=A\omega$ 作用，有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|z'\right\|_{M_2}^2=-\left\|\omega\right\|_1^2-\left\langle\varsigma_s^t,\varsigma^t\right\rangle_{\mu,V_2}-\left\langle f\left(u_1\right)-f\left(u_2\right),A\omega\right\rangle\tag{3.24}$$

这里 $\left\|z'\right\|_{M_2}^2=\left|\omega\right|_2^2+\left\|\omega\right\|_0^2+\left\|\varsigma_n^t\right\|_{\mu,V_2}^2$。

有：

$$-\left\langle\varsigma_s^t,\varsigma^t\right\rangle_{\mu,V_2}\le-\frac{\delta}{2}\left\|\varsigma^t\right\|_{\mu,V_2}^2$$

由 Hölder 和 Young 不等式，得

$$\begin{aligned}-\left\langle f\left(u_1\right)-f\left(u_2\right),A\omega\right\rangle&=\int_\Omega\left(f\left(u_1\right)-f\left(u_2\right)\right)\Delta\omega\\&\le C\left[\left|u_1\right|_{2p-2}^{p-1}+\left|u_2\right|_{2p-2}^{p-1}\right]\cdot\left|\Delta\omega\right|_2^2,\\&\le C_{\Re}\left\|\omega\right\|_1^2\le C_{\Re}\left\|z'\right\|_{M_2}^2\end{aligned}$$

其中 $C_{\Re}$ 是与初值及常数 ρ 有关而与 t 无关的常数。由 Growall 引理得

$$\left\|z_1-z_2\right\|_{M_2}^2\le\mathrm{e}^{C(\Re)T}\left\|z_1(0)-z_2(0)\right\|_{\mathcal{M}_2}^2,$$

当且仅当 $\omega_n(0)=0$，等号成立。所以就证明了解的唯一性，和对初值的连续依赖性，证毕。

致 谢

本篇论文的完成，要特别感谢谢永钦老师的细心指导以及学长学姐的帮助，在论文的许多细节方面都给予了很大的帮助，再次特别感谢老师。

参考文献

[1] 汪璇, 段奋霞, 等. 带衰退记忆的经典反应扩散方程的强全局吸引子[J]. 数学年刊, 2015, 36A(3): 265-276.

[2] Barenblatt, G., Zheltov, P. and Kochina, I.N. (1960) Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **24**, 1286-1803.

https://doi.org/10.1016/0021-8928(60)90107-6

[3] Chen, P.J. and Gurtin, M.E. (1968) On a Theory of Heat Conduction Involving Two Temperatures. *Zeitschrift Fur Angewandte Mathematic und Physic*, **19**, 614-627. https://doi.org/10.1007/BF01594969

[4] Jackle, J. (1990) Heat Conduction and Relaxation in Liquids of High Viscosity. *Physical Review A*, **162**, 377-404.

[5] Xie, Y., Li, Q. and Zhu, K. (2016) Attractors for Nonclassical Diffusion Equations with Arbitrary Polynomial Growth Nonlinearity. *Nonlinear Analysis*, **31**, 23-37. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2016.01.004

[6] Coleman, B. and Gurtin, M. (1967) Equipresence and Constitutive Equations for Rigid Heat Conductors. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, **18**, 199-208.

[7] Aifantis, E.C. (1980) On the Problem of Diffusion in Solids. *Acta Mechanica*, **37**, 265-296. https://doi.org/10.1007/BF01202949

[8] Chepyzhov, V. and Vishik, M. (2001) Attractors for Equations of Mathematical Physics. American Mathematical Society, Providence, 49-363.