Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2018, 7(12), 1477-1485**
Published Online December 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.712171

Output Feedback Stabilization of a Coupled Second Order ODE-Wave System

Liping Wang, Fengfei Jin

School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Jinan Shandong
Email: 2017020465@stu.sdnu.edu.cn

Received: Nov. 1st, 2018; accepted: Nov. 23rd, 2018; published: Nov. 30th, 2018

Abstract

In this paper, we are concerned with boundary output feedback stabilization of a coupled second order ODE-wave system. We first design an observer for ODE-wave system by output of original system and the effectiveness of observer is proved. Then an output feedback controller is proposed based on a state feedback controller in [1]. Operator semi-group method and back-stepping transformation are adopted to prove that the resulting closed-loop system admits a unique solution in state space and the solution of closed-loop system is asymptotically stable.

Keywords

Output Feedback, Back-Stepping, Stabilization, Controller Design

耦合二阶ODE波系统的输出反馈镇定

王立萍，金凤飞

山东师范大学数学与统计学院，山东 济南
Email: 2017020465@stu.sdnu.edu.cn

收稿日期：2018年11月1日；录用日期：2018年11月23日；发布日期：2018年11月30日

摘　要

本文考虑耦合二阶ODE波系统的边界输出反馈镇定问题。我们首先通过原系统的输出设计ODE波系统的观测器，并证明观测器的有效性。然后基于文献[1]中给出的状态反馈控制器，我们设计出输出反馈控制器。利用算子半群方法和Back-stepping变换，证明了闭环系统在状态空间中具有唯一解，且闭环系统的解是渐近稳定的。

文章引用: 王立萍, 金凤飞. 耦合二阶 ODE 波系统的输出反馈镇定[J]. 应用数学进展, 2018, 7(12): 1477-1485.
DOI: 10.12677/aam.2018.712171

关键词

输出反馈，Back-Stepping，稳定性，控制器设计

1. 引言

在航天工业、土木工程领域、工业流水线等方面，一维波动方程或弦方程可以模拟许多物理现象。因此，该模型在理论和实际应用领域都受到了广泛的关注。一般情况下，振动过大往往会降低系统的性能，因此系统的镇定变得非常重要。鉴于工程中易实现性，边界控制器是工程师首选的。在过去的二十年中，文献中出现了一系列关于一维波方程边界镇定的著作([2])，其中耗散理论对反馈控制律的设计起着重要的作用。当系统不稳定([3])或反稳定([4])时，Back-stepping 方法可以用来实现镇定、观测器构造、输出调节等目的。

近年来，随着研究的深入，文献中出现很多 PDE-ODE 耦合系统相关的镇定工作。在[5]中，作者考虑了耦合 ODE-弦系统的镇定问题，它模拟了塔吊上的平台和缆索的动力学行为。在[6]和[7]中 Krstic 等分别考虑 ODE-弦和 ODE-双曲型方程耦合系统。文献[6]的结果被推广到一个内部反阻尼 ODE-系统和连通的诺伊曼系统中；另一个推广可以在文献[8]中找到，其中是应用于两个边值耦合的 ODE-弦方程。上述的 PDE-ODE 耦合工作仅考虑了边界耦合系统。对于内部点耦合系统，[9]对内部点耦合的二阶 ODE-热系统设计了状态反馈控制器。类似的结果可以在[1]中找到，其所考察的是一维波系统。

在本文中，我们考虑以下耦合的二阶 ODE-波系统：

$$\begin{cases} y''(t)=a^2y(t)+bu(x_0,t), t>0, \\ u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t), x\in(0,1), t>0, \\ u(0,t)=0, u_x(1,t)=U(t), t\ge 0, \\ y_{out}(t)=\{y(t), u_t(1,t)\}, t\ge 0, \\ y(0)=y_0, y'(0)=y_1, \\ u(x,0)=u_0(x), u_t(x,0)=u_1(x), x\in(0,1), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $x_0\in(0,1)$ 是一个给定的中间点， $a>0$ 和 $b\neq 0$ 是常数， $y(t)$ 和 $u_t(1,t)$ 是测量值。设 $X(t)=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}=(y(t),y'(t))^{\mathrm{T}}$，那么我们可以把系统(1.1)写为如下形式：

$$\begin{cases} \dot{X}(t)=AX(t)+Bu(x_0,t), t>0, \\ u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t), x\in(0,1), t>0, \\ u(0,t)=0, u_x(1,t)=U(t), t\ge 0, \\ y_{out}(t)=\{x_1(t), u_t(1,t)\}, t\ge 0, \\ X(0)=X_0, u(x,0)=u_0(x), u_t(x,0)=u_1(x), x\in(0,1), \end{cases} \tag{1.2}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ a^2 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0\\ b\end{pmatrix}, X_0=\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\end{pmatrix}.$$

本文的目的是设计一个输出反馈控制器来使整个闭环系统稳定，而状态反馈定律在[1]中已经设计出来。由文献[1]的引理 2.1 我们可以知道存在一个矩阵 K 使得 $A+BK$ 是 Hurwitz 的。

文章结构如下：在第二部分中，我们通过系统的输出给出控制器的设计，通过 Back-stepping 变换，我们证明了闭环系统具有唯一的解；第三部分，我们用 Back-stepping 逆变换证明了闭环系统的指数稳定性。

2. 观测器和控制器设计

首先，我们设计系统(1.2)的观测器如下：

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}_1(t)=\hat{x}_2(t)+q_1\left(\hat{x}_1(t)-x_1(t)\right), t>0,\\ \dot{\hat{x}}_2(t)=a^2\hat{x}_1(t)+q_2\left(\hat{x}_1(t)-x_1(t)\right)+b\hat{u}(x_0,t), t>0,\\ \hat{u}_{tt}(x,t)=\hat{u}_{xx}(x,t), t>0,\\ \hat{u}(0,t)=0, t\ge 0,\\ \hat{u}_x(1,t)=U(t)-k\left(\hat{u}_t(1,t)-u_t(1,t)\right), t\ge 0,\\ \hat{x}_1(0)=\hat{x}_{10}, \hat{x}_2(0)=\hat{x}_{20},\\ \hat{u}(x,0)=\hat{u}_0(x), \hat{u}_t(x,0)=\hat{u}_1(x),\end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $k>0$， q_1， q_2 是待定的设计参数。令 $\tilde{x}=\hat{x}-x$ 和 $\tilde{u}=\hat{u}-u$ 代表误差，则 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{u}$ 满足

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}_1(t)=\tilde{x}_2(t)+q_1\tilde{x}_1(t), t>0,\\ \dot{\tilde{x}}_2(t)=a^2\tilde{x}_1(t)+q_2\tilde{x}_1(t)+b\tilde{u}(x_0,t), t>0,\\ \tilde{u}_{tt}(x,t)=\tilde{u}_{xx}(x,t), t>0,\\ \tilde{u}(0,t)=0, t\ge 0,\\ \tilde{u}_x(1,t)=-k\tilde{u}_t(1,t), t\ge 0,\\ \tilde{x}_1(0)=\hat{x}_{10}-x_{10}, \tilde{x}_2(0)=\hat{x}_{20}-x_{20},\\ \tilde{u}(x,0)=\hat{u}_0(x)-u_0(x), \tilde{u}_t(x,0)=\tilde{u}_1(x)-u_1(x).\end{cases} \tag{2.2}$$

我们定义状态空间：

$$\mathrm{H}=\left\{(f,g)^{\mathrm{T}}\in H^1(0,1)\times L^2(0,1)\,|\, f(0)=0\right\}$$

内积诱导的范数如下：

$$\left\|(f,g)^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathrm{H}}^2=\int_0^1\left(\left|f'(x)\right|^2+\left|g(x)\right|^2\right)\mathrm{d}x.$$

众所周知，$\tilde{u}$-部分在状态空间中具有唯一的指数稳定解。即在此范数意义下，存在常数 $M>0$，$\delta>0$，有

$$\left\|\left(\tilde{u}(\cdot,t),\tilde{u}_t(\cdot,t)\right)^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathrm{H}}\le M\mathrm{e}^{-\delta t}\left\|\left(\tilde{u}(\cdot,0),\tilde{u}_t(\cdot,0)\right)^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathrm{H}}. \tag{2.3}$$

利用庞加莱不等式，我们有

$$\left|\tilde{u}\left(x_0,t\right)\right| \le \left\|\left(\tilde{u}\left(\cdot,t\right),\tilde{u}_t\left(\cdot,t\right)\right)^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathrm{H}} \le M\mathrm{e}^{-\delta t}\left\|\left(\tilde{u}\left(\cdot,0\right),\tilde{u}_t\left(\cdot,0\right)\right)^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathrm{H}}. \tag{2.4}$$

对于系统(2.2)中的 ODE-部分，这里存在唯一解

$$\left(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2\right)^{\mathrm{T}} = \mathrm{e}^{A_1 t}\left(\tilde{x}_1\left(0\right),\tilde{x}_2\left(0\right)\right)^{\mathrm{T}} + \int_0^t \mathrm{e}^{A_1(t-s)}B\tilde{u}\left(x_0,s\right)\mathrm{d}s,$$

其中

$$A_1 = \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ a^2+q_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$q_1<0$，$q_2<-a^2$ 是可调常数。很明显，对于这样选择的参数，A_1 是 Hurwitz 的。从而 $\left(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2\right)^{\mathrm{T}}$ 是指数稳定的。因此我们有如下引理：

引理 2.1： 假设 $q_1<0$，$q_2<-a^2$，$k>0$，那么对任意的初值 $\left(\tilde{x}_{10},\tilde{x}_{20},\tilde{u}_0,\tilde{u}_1\right)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{C}^2\times\mathrm{H}$，系统(2.2)都有唯一的弱解 $\left(\tilde{x}_1\left(t\right),\tilde{x}_2\left(t\right),\tilde{u}\left(\cdot,t\right),\tilde{u}_t\left(\cdot,t\right)\right)^{\mathrm{T}} \in C\left(0,\infty;\mathrm{C}^2\times\mathrm{H}\right)$，并且系统(2.2)的解是指数稳定的。

受文献[1]的状态反馈控制器的启发，我们设计输出反馈控制器如下：

$$\begin{aligned} U\left(t\right) &= \int_0^1\left[cl_{yy}\left(1,y\right)+k_x\left(1,y\right)\right]\hat{u}\left(y,t\right)\mathrm{d}y - cl_y\left(1,1\right)\hat{u}\left(1,t\right) \\ &\quad + \int_0^{x_0}\left[p_1'\left(1\right)q_1\left(y\right)+cp\left(1\right)q\left(y\right)\right]\hat{u}_t\left(y,t\right)\mathrm{d}y + \phi'\left(1\right)\hat{X}\left(t\right) \\ &\quad + \int_0^{x_0}\left[p'\left(1\right)q\left(y\right)+cp_1\left(1\right)q_1''\left(y\right)\right]\hat{u}\left(y,t\right)\mathrm{d}y + c\phi\left(1\right)A\hat{X}\left(t\right) \\ &\quad + \int_0^1\left[l_x\left(1,y\right)+ck\left(1,y\right)\right]\hat{u}_t\left(y,t\right)\mathrm{d}y + cu_t\left(1,t\right), \end{aligned} \tag{2.6}$$

其中 $c>0$ 是给定常数，$k(x,y)$，$l(x,y)$，$p(x)$，$p_1(x)$，$q(y)$，$q_1(y)$ 和 $\phi(x)$ 满足

$$\begin{cases} k\left(x,y\right) = -\xi\eta\left(1-\mathrm{e}^{2\lambda x_0}\right)\left(\mathrm{e}^{\lambda(x-y)}-\mathrm{e}^{-\lambda(x-y)}\right), \\ l\left(x,y\right) = -\xi_1\eta_1\left(1-\mathrm{e}^{2\lambda_1 x_0}\right)\left(\mathrm{e}^{\lambda_1(x-y)}-\mathrm{e}^{-\lambda_1(x-y)}\right), \\ p\left(x\right) = \xi\mathrm{e}^{\lambda x}-\xi\mathrm{e}^{-\lambda x}, \\ q\left(y\right) = \eta\mathrm{e}^{\lambda y}-\eta\mathrm{e}^{-\lambda(2x_0-y)}, \\ p_1\left(x\right) = \xi_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}-\xi_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}, \\ q_1\left(y\right) = \eta_1\mathrm{e}^{\lambda_1 y}-\eta_1\mathrm{e}^{-\lambda_1(2x_0-y)}, \\ \phi\left(x\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda_1 x}-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}}{\mathrm{e}^{\lambda_1 x_0}-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x_0}}K, \\ \xi\eta = \dfrac{KAB}{2\lambda\mathrm{e}^{\lambda x_0}\left(\mathrm{e}^{\lambda x_0}-\mathrm{e}^{-\lambda x_0}\right)}, \\ \xi_1\eta_1 = \dfrac{KB}{2\lambda_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x_0}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1 x_0}-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x_0}\right)} \\ \lambda = \lambda_1 = a. \end{cases} \tag{2.7}$$

这些函数在文献[1]中方程(16)~(20)已给出。

在控制器(2.6)之下，我们得到系统(1.2)的闭环系统为：

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=AX(t)+Bu(x_0,t),t>0,\\ u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t),x\in(0,1),t>0,\\ u(0,t)=0,t>0,\\ u_x(1,t)=\int_0^1\left[cl_{yy}(1,y)+k_x(1,y)\right]\hat{u}(y,t)\mathrm{d}y-cl_y(1,1)\hat{u}(1,t)\\ \qquad +\int_0^{x_0}\left[p_1'(1)q_1(y)+cp(1)q(y)\right]\hat{u}_t(y,t)\mathrm{d}y+\phi'(1)\hat{X}(t)\\ \qquad +\int_0^{x_0}\left[p'(1)q(y)+cp_1(1)q_1''(y)\right]\hat{u}(y,t)\mathrm{d}y+c\phi(1)A\hat{X}(t)\\ \qquad +\int_0^1\left[l_x(1,y)+ck(1,y)\right]\hat{u}_t(y,t)\mathrm{d}y+cu_t(1,t),t>0,\\ \dot{\hat{x}}_1(t)=\hat{x}_2(t)+q_1(\hat{x}_1(t)-x_1(t)),t>0,\\ \dot{\hat{x}}_2(t)=a^2\hat{x}_1(t)+q_2(\hat{x}_1(t)-x_1(t))+b\hat{u}(x_0,t),t>0,\\ \hat{u}_{tt}(x,t)=\hat{u}_{xx}(x,t),t>0,\\ \hat{u}(0,t)=0,t\ge0,\\ \hat{u}_x(1,t)=u_x(1,t)-k(\hat{u}_t(1,t)-u_t(1,t)),t\ge0,\end{cases} \tag{2.8}$$

这里为了简便我们省略初值。

3. 闭环系统适定性与稳定性

引入误差变量 $\tilde{u}=\hat{u}-u$ 和 $\tilde{X}(t)=(\tilde{x}_1(t),\tilde{x}_2(t))^{\mathrm{T}}$，我们可以重写系统(2.8)如下：

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=AX(t)+Bu(x_0,t),t>0,\\ u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t),x\in(0,1),t>0,\\ u(0,t)=0,t>0,\\ u_x(1,t)=\int_0^1\left[cl_{yy}(1,y)+k_x(1,y)\right]u(y,t)\mathrm{d}y-cl_y(1,1)u(1,t)\\ \qquad +\int_0^{x_0}\left[p_1'(1)q_1(y)+cp(1)q(y)\right]u_t(y,t)\mathrm{d}y+\phi'(1)X(t)\\ \qquad +\int_0^{x_0}\left[p'(1)q(y)+cp_1(1)q_1''(y)\right]u(y,t)\mathrm{d}y+c\phi(1)AX(t)\\ \qquad +\int_0^1\left[l_x(1,y)+ck(1,y)\right]u_t(y,t)\mathrm{d}y+cu_t(1,t)\\ \qquad +\int_0^1\left[cl_{yy}(1,y)+k_x(1,y)\right]\tilde{u}(y,t)\mathrm{d}y-cl_y(1,1)\tilde{u}(1,t)\\ \qquad +\int_0^{x_0}\left[p_1'(1)q_1(y)+cp(1)q(y)\right]\tilde{u}_t(y,t)\mathrm{d}y+\phi'(1)\tilde{X}(t)\\ \qquad +\int_0^{x_0}\left[p'(1)q(y)+cp_1(1)q_1''(y)\right]\tilde{u}(y,t)\mathrm{d}y+c\phi(1)A\tilde{X}(t)\\ \qquad +\int_0^1\left[l_x(1,y)+ck(1,y)\right]\tilde{u}_t(y,t)\mathrm{d}y,t>0,\\ \dot{\tilde{x}}_1(t)=\tilde{x}_2(t)+q_1\tilde{x}_1(t),t>0,\\ \dot{\tilde{x}}_2(t)=a^2\tilde{x}_1(t)+q_2\tilde{x}_1(t)+b\tilde{u}(x_0,t),t>0,\\ \tilde{u}_{tt}(x,t)=\tilde{u}_{xx}(x,t),t>0,\\ \tilde{u}(0,t)=0,t\ge0,\\ \tilde{u}_x(1,t)=-k\tilde{u}_t(1,t),t\ge0.\end{cases} \tag{3.1}$$

由引理 2.1 可知，$(\tilde{X},\tilde{u},\tilde{u}_t)^{\mathrm{T}}$ 是指数稳定的。对于 $(X,u,u_t)^{\mathrm{T}}$，我们引用[1]中的 Back-stepping 变换(3)

$$\begin{aligned} w(x,t) &= u(x,t) - \int_0^x k(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y - \int_0^x l(x,y)u_t(y,t)\mathrm{d}y \\ &\quad - p(x)\int_0^{x_0} q(y)u(y,t)\mathrm{d}y - p_1(x)\int_0^{x_0} q_1(y)u_t(y,t)\mathrm{d}y - \phi(x)X(x). \end{aligned} \tag{3.2}$$

于是系统(3.1)中$(X,u,u_t)^{\mathrm{T}}$-部分满足

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = (A+BK)X(t) + Bw(x_0,t), t>0, \\ w_{tt}(x,t) = w_{xx}(x,t), x\in(0,1), t>0, \\ w(0,t) = 0, t>0, \\ w_x(1,t) = -cw_t(1,t) + f(t), t>0, \\ w(x,0) = w_0(x), w_t(x,0) = w_1(x), x\in(0,1), \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{3.3}$$

其中

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^1 \left[cl_{yy}(1,y) + k_x(1,y)\right]\tilde{u}(y,t)\mathrm{d}y - cl_y(1,1)\tilde{u}(1,t) \\ &\quad + \int_0^{x_0}\left[p_1'(1)q_1(y) + cp(1)q(y)\right]\tilde{u}_t(y,t)\mathrm{d}y + \phi'(1)\tilde{X}(t) \\ &\quad + \int_0^{x_0}\left[p'(1)q(y) + cp_1(1)q_1''(y)\right]\tilde{u}(y,t)\mathrm{d}y + c\phi(1)A\tilde{X}(t) \\ &\quad + \int_0^1\left[l_x(1,y) + ck(1,y)\right]\tilde{u}_t(y,t)\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{3.4}$$

由引理 2.1 知$f(t)$指数衰减。也就是说，存在常数$M_1>0$，$\delta_1>0$，其中δ_1是独立于初值，使得

$$|f(t)| \le M_1 \mathrm{e}^{-\delta_1 t}, t\ge 0.$$

我们在能量空间 H 中考虑系统(3.3)的 PDE 部分

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) = w_{xx}(x,t), x\in(0,1), t>0, \\ w(0,t) = 0, t>0, \\ w_x(1,t) = -cw_t(1,t) + f(t), t>0, \\ w(x,0) = w_0(x), w_t(x,0) = w_1(x), x\in(0,1), \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{3.5}$$

定义系统(3.5)的算子：$\mathrm{A}: D(\mathrm{A}) \to \mathrm{H}$

$$\begin{cases} \mathrm{A}(f,g)^{\mathrm{T}} = (g,f'')^{\mathrm{T}}, \forall (f,g)^{\mathrm{T}} \in D(\mathrm{A}), \\ D(\mathrm{A}) = \left\{(f,g)^{\mathrm{T}} \in H^2(0,1)\times H^1(0,1) \mid \mathrm{A}(f,g)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{H}, f'(1) = -cg(1)\right\}. \end{cases} \tag{3.6}$$

简单计算表明 A 的对偶算子为

$$\begin{cases} \mathrm{A}^*\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\psi_1\\ -\phi''\end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix} \in D(\mathrm{A}^*), \\ D(\mathrm{A}^*) = \left\{(\phi,\psi)^{\mathrm{T}} \in H^2(0,1)\times H^1(0,1) \mid \mathrm{A}^*(\phi,\psi) \in \mathrm{H}, \phi'(1) = c\psi(1)\right\}. \end{cases} \tag{3.7}$$

系统(3.7)中$(\phi,\psi)\in D(\mathrm{A}^*)$与$(w,w_t)$做内积得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle \begin{pmatrix}w\\ w_t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}w\\ w_t\end{pmatrix}, \mathrm{A}^*\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix}\right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix}0\\ \delta(x-1)\end{pmatrix} f(t), \begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix}\right\rangle, \tag{3.8}$$

其中 $\delta(\cdot)$ 表示狄拉克分布。因此，系统(3.5)可以写成 H 上的抽象发展方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(w(\cdot,t),w_t(\cdot,t)\right)^{\mathrm{T}}=\mathrm{A}\left(w(\cdot,t),w_t(\cdot,t)\right)^{\mathrm{T}}+\mathrm{B}f(t), \tag{3.9}$$

这里 $\mathrm{B}=\left(0,\delta(x-1)\right)^{\mathrm{T}}$。众所周知，算子 A 在 H 上生成指数稳定的 C_0-半群，也就是说，存在 $K>0$，$\mu>0$ 使得

$$\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{A}t}\right\|\le K\mathrm{e}^{-\mu t},t\ge 0. \tag{3.10}$$

接下来我们将证明算子 B 对 $\mathrm{e}^{\mathrm{A}t}$ 是允许的，只要证明 B^* 对 $\mathrm{e}^{\mathrm{A}^*t}$ 是允许的即可。系统(3.9)的对偶系统是

$$\begin{cases} w_{tt}^*(x,t)=w_{xx}^*(x,t),x\in(0,1),t>0,\\ w^*(0,t)=0,t>0,\\ w_x^*(1,t)=-cw_t^*(1,t),t>0,\\ y_0(t)=-w_t^*(1,t),t\ge 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

因为 A 生成 C_0-半群，所以 A^* 也能生成 C_0-半群，即系统(3.11)存在 C_0-半群解。对系统(3.11)定义能量函数如下：

$$E^*(t)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(w_t^{*2}(x,t)+w_x^{*2}(x,t)\right)\mathrm{d}x.$$

将 $E(t)$ 沿系统(3.11)的解对 t 求导得到

$$\dot{E}(t)=-c\left[w_t^*(1,t)\right]^2. \tag{3.12}$$

对(3.12)中 t 从 0 到 T 积分，我们有

$$\int_0^T\left[w_t^*(1,t)\right]^2\mathrm{d}t=\frac{1}{c}\left(E(0)-E(T)\right)\le\frac{1}{c}E(0).$$

另一方面，直接计算可得

$$\begin{cases} \mathrm{A}^{*-1}\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-cx\phi(1)+\int_0^x\int_s^1\psi(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\ \phi\end{pmatrix},\\ \mathrm{B}^*\mathrm{A}^{*-1}\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\phi(1)\end{pmatrix},\forall(\phi,\psi)'\in\mathrm{H}. \end{cases} \tag{3.13}$$

给出简单估计

$$\left|-\varphi(1)\right|^2=\varphi^2(1)\le\int_0^1\varphi'^2(x)\mathrm{d}x\le\left\|(\varphi,\psi)\right\|_{\mathrm{H}}^2. \tag{3.14}$$

因此，从 H 到 C，$\mathrm{B}^*\mathrm{A}^{*-1}$ 是有界的。这表明 B^* 对 $\mathrm{e}^{\mathrm{A}^*t}$ 是允许的，进而 B 对 $\mathrm{e}^{\mathrm{A}t}$ 是允许的。通过适定的线性无穷维系统理论([10])，若 $f\in L_{loc}^2(0,\infty)$，那么(3.9)存在唯一解 $(w,w_t)\in C(0,\infty;\mathrm{H})$。

(3.5)的解可以写成([10])

$$\left(w(\cdot,t),w_t(\cdot,t)\right)^{\mathrm{T}}=\mathrm{e}^{\mathrm{A}t}\left(w_0,w_1\right)^{\mathrm{T}}+\int_0^t\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t-s)}\mathrm{B}f(s)\mathrm{d}s.$$

与文献[11]中方程(60)的估计类似，对不依赖于初值的常数 $M_2>0$，$\delta_2>0$，我们有

$$\left\|\left(w(\cdot,t),w_t(\cdot,t)\right)^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathrm{H}}\le M_2\mathrm{e}^{-\delta_2 t}\left\|\left(w(\cdot,0),w_t(\cdot,0)\right)^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathrm{H}},t\ge 0. \tag{3.15}$$

根据庞加莱不等式

$$\left|w(x_0,t)\right| \le \left\|\left(w(\cdot,t),w_t(\cdot,t)\right)^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathrm{H}} \le M_2 \mathrm{e}^{-\delta_2 t} \left\|\left(w(\cdot,0),w_t(\cdot,0)\right)^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathrm{H}}.$$

因此，ODE 部分的解

$$X(t)=\mathrm{e}^{(A+BK)t}X_0+\int_0^t \mathrm{e}^{(A+BK)(t-s)}Bw(x_0,s)\mathrm{d}s, \tag{3.16}$$

是指数稳定的。

下面我们说明变换(3.2)是可逆的。实际上其逆变换可以写为

$$\begin{aligned} u(x,t)=&w(x,t)-\int_0^x n(x,y)w(y,t)\mathrm{d}y-\int_0^x m(x,y)w_t(y,t)\mathrm{d}y \\ &-g(x)\int_0^{x_0} h(y)w(y,t)\mathrm{d}y-g_1(x)\int_0^{x_0} h_1(y)w_t(y,t)\mathrm{d}y-\psi(x)X(t), \end{aligned} \tag{3.17}$$

其中函数 $m(x,y)$，$n(x,y)$，$g(x)$，$g_1(x)$，$h(y)$，$h_1(y)$ 和 $\psi(x)$ 满足

$$\begin{cases} n_{xx}(x,y)-n_{yy}(x,y)=0, \\ n(x,x)=0, n(x,0)=-g(x)h(0), \\ m_{xx}(x,y)-m_{yy}(x,y)=0, \\ m(x,x)=0, m(x,0)=-g_1(x)h_1(0), \\ g''(x)h(y)-g(x)h''(y)=0, \\ h(x_0)=0, g(x)h'(x_0)=\psi(x)(A+BK)B, \\ g(0)=0, n(x_0,y)+g(x)h(y)=0, \\ g_1''(x)h_1(y)-g_1(x)h_1''(y)=0, \\ g_1(x_0)=0, g_1(x)h_1'(x_0)=\psi(x)B, \\ g_1(0)=0, m(x_0,y)+g_1(x_0)h_1(y)=0, \\ \psi''(x)-\psi(x)(A+BK)^2=0, \\ \psi(x_0)=K, \psi(0)=0, \end{cases} \tag{3.18}$$

这些函数在[1]中均有解。

我们证明了系统(3.3)有唯一解且解是指数稳定的。我们得到了本文的主要结果。

定理 3.1: 假设 $q_1<0$，$q_2<-a^2$，$k>0$，那么对任意的初值 $\left(X_0,u_0,u_1,\hat{X}_0,\hat{u}_0,\hat{u}_1\right)^{\mathrm{T}} \in \left(\mathrm{C}^2\times\mathrm{H}\right)^2$，闭环系统(2.8)都有唯一的弱解 $\left(X(t),u(\cdot,t),u_t(\cdot,t),\hat{X}(t),\hat{u}(\cdot,t),\hat{u}_t(\cdot,t)\right)^{\mathrm{T}} \in C\left(0,\infty;\left(\mathrm{C}^2\times\mathrm{H}\right)^2\right)$，且解是指数稳定的：

$$\left\|\left(X(t),u(\cdot,t),u_t(\cdot,t),\hat{X}(t),\hat{u}(\cdot,t),\hat{u}_t(\cdot,t)\right)\right\|_{(\mathrm{C}\times\mathrm{H})^2} \le L\mathrm{e}^{-\omega t}\left\|\left(X_0,u_0,u_1,\hat{X}_0,\hat{u}_0,\hat{u}_1\right)\right\|_{(\mathrm{C}\times\mathrm{H})^2}, \forall t>0, \tag{3.19}$$

其中 L 和 ω 是不依赖于初值的正数。

参考文献

[1] Zhen, Z.Y., Wang, K., Zhou, Z.C. and Loxton, R. (2016) Stabilization of a Coupled Second Order ODE-Wave System. *Proceedings of the* 35*th Chinese Control Conference*, Chengdu, 27-29. https://doi.org/10.1109/ChiCC.2016.7553282

[2] Chen, G. (1979) Energy Decay Estimates and Exact Boundary-Value Controllability for the Wave Equation in Abounded Domain. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, **58**, 249-273.

[3] Krstic, M., Guo, B.Z., Blogh, A. and Smyshlyaev, A. (2008) Output Feedback Stabilization of an Unstable Wave Equation. *Automatica*, **44**, 63-74. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2007.05.012

[4] Smyshlyaev, A., Cerpa, E. and Krstic, M. (2010) Boundary Stabilization of a 1-D Wave Equation with In-Domain Anti-Damping. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **48**, 4014-4031. https://doi.org/10.1137/080742646

[5] d’Andr´ea-Novel, B. and Coron, J.M. (2000) Exponential Stabilization of an Overhead Crane with Flexible Cable via a

Back-Stepping Approach. *Automatica*, **36**, 587-593.

[6] Krstic, M. (2009) Compensating a String PDE in the Actuation or in Sensing Path of an Unstable ODE. *IEEE Transaction on Automatic Control*, **54**, 1362-1368. https://doi.org/10.1109/TAC.2009.2015557

[7] Meglio, F.D., Argomedo, F.B., Gu, L. and Krstic, M. (2018) Stabilization of Coupled Linear Hetero Directional Hyperbolic PDE-ODE Systems. *Automatica*, **87**, 281-289. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.09.027

[8] Tang, S. and Xie, C. (2011) Stabilization for a Coupled PDE-ODE Control System. *Journal of the Franklin Institute*, **348**, 2142-2155. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2011.06.008

[9] Zhou, Z.Z. and Xu, C. (2015) Stabilization of a Second Order ODE-Heat System Coupling at Intermediate Point. *Automatica*, **60**, 57-64. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2015.06.039

[10] Weiss, G. (1989) Admissibility of Unbounded Control Operators. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **27**, 527-545. https://doi.org/10.1137/0327028

[11] Su, L., Guo, W., Wang, J. and Krstic, M. (2017) Boundary Stabilization of Wave Equation with Velocity Recirculation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **62**, 4760-4767. https://doi.org/10.1109/TAC.2017.2688128