Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2018, 7(12), 1521-1529**
Published Online December 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.712177

Zero Product Problem of Block Toeplitz Operator in Vector Value Bergman Space

Nan Zhang, Yin Guan, Wei Shang

Department of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: 1085900762@qq.com

Received: Nov. 16th, 2018; accepted: Dec. 6th, 2018; published: Dec. 13th, 2018

Abstract

We give a necessary and sufficient condition for the block Toeplitz operator on vector value Bergman space, where *F* is the bounded vector value function of general nature, *G* is harmonic polynomial.

Keywords

Vector Value Bergman Spaces, Block Toeplitz Operator, Zero Product, Mellin Transform

向量值Bergman空间上块Toeplitz算子的零积问题

张　楠，关　印，尚　巍

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连
Email: 1085900762@qq.com

收稿日期：2018年11月16日；录用日期：2018年12月6日；发布日期：2018年12月13日

摘　要

本文给出了向量值**Bergman**空间上块**Toeplitz**算子$T_F T_G = 0$的一个充分必要条件，其中F为一般本性有界向量值函数，G为调和多项式。

关键词

向量值**Bergman**空间，块**Toeplitz**算子，零积，**Mellin**变换

文章引用: 张楠, 关印, 尚巍. 向量值 Bergman 空间上块 Toeplitz 算子的零积问题[J]. 应用数学进展, 2018, 7(12): 1521-1529. DOI: 10.12677/aam.2018.712177

1. 引言

记 IN 为自然数集，Z 为整数集。定义 D 是复平面 C 上的开单位圆盘。$\mathrm{d}A$ 表示 D 上正规化的面积测度，即

$$\mathrm{d}A(z)=\frac{r}{\pi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$L^2(D,\mathrm{d}A)$ 是 D 上关于 $\mathrm{d}A$ 平方可积的函数全体构成的 Hilbert 空间，可表示为：

$$L^2(D,\mathrm{d}A)=\left\{f:\int_D\left|f(z)\right|^2\mathrm{d}A(z)<+\infty\right\},$$

对任意的 $f,g\in L^2(D,\mathrm{d}A)$， $L^2(D,\mathrm{d}A)$ 空间中内积为：

$$\langle f,g\rangle=\int_D f(z)\overline{g(z)}\mathrm{d}A(z).$$

Bergman 空间 $L_a^2(D,\mathrm{d}A)$ 为 $L^2(D,\mathrm{d}A)$ 上由全体解析函数构成的闭子空间。定义 D 上由关于 $\mathrm{d}A$ 的本性有界可测函数全体构成的 Banach 空间为 $L^\infty(D,\mathrm{d}A)$，P 是从 $L^2(D,\mathrm{d}A)$ 到 $L_a^2(D,\mathrm{d}A)$ 上的正交射影，则有

$$(Pf)(z)=\langle f,K_z\rangle=\int_D f(w)\overline{K_z(w)}\mathrm{d}A(w),$$

$K_z(w)=\dfrac{1}{(1-\bar{z}w)^2}$ $(z,w\in D)$ 为 $L_a^2(D,\mathrm{d}A)$ 的再生核，令 $k_z(w)=\dfrac{K_z(w)}{\|K_z\|}$ 为正规化的再生核。

定义 1.1：设 $\lambda\in L^\infty(D,\mathrm{d}A)$，以 λ 为符号的 Toeplitz 算子定义如下：

$$T_\lambda f=P(\lambda f),\ f\in L_a^2(d,\mathrm{d}A).$$

说明：设 $\lambda,\mu\in L^\infty(D,\mathrm{d}A)$，则 Toeplitz 算子具有以下性质：

1) $\forall a,b\in C$，$T_{a\lambda+b\mu}=aT_\lambda+bT_\mu$，

2) $T_f^*=T_{\bar{f}}$。

记 $M_{n\times n}$ 为 C 上的 $n\times n$ 矩阵的全体。定义 $L^2(D,C^n)=L^2(D,\mathrm{d}A)\otimes C^n$ 为 D 上关于 $\mathrm{d}A$ 平方可积的向量值函数空间。$L_a^2(D,C^n)=L_a^2(D,\mathrm{d}A)\otimes C^n$ 为 D 上的向量值 Bergman 空间，其中“$\otimes$”为 Hilbert 张量积。以 $\Psi(z)\in L^\infty(D,\mathrm{d}A)\otimes M_{n\times n}$ 为符号的 Toeplitz 算子定义为

$$T_\Psi h=P_{L_a^2(D,C^n)}(\Psi h),h\in L_a^2(D,C^n),$$

其中 $P_{L_a^2(D,C^n)}$ 是从 $L^2(D,C^n)$ 到 $L_a^2(D,C^n)$ 的正交射影。

“$\oplus$”表示直和 $L^\infty(D,C^n)=L^\infty(D,\mathrm{d}A)\oplus\cdots\oplus L^\infty(D,\mathrm{d}A)$， $L_a^2(D,C^n)=L_a^2(D,\mathrm{d}A)\oplus\cdots\oplus L_a^2(D,\mathrm{d}A)$，那么块 Toeplitz T_Ψ 有下列矩阵表示：

$$T_\Psi=\begin{bmatrix}T_{\Psi_{11}}&\cdots&T_{\Psi_{1n}}\\\vdots&\ddots&\vdots\\T_{\Psi_{n1}}&\cdots&T_{\Psi_{nn}}\end{bmatrix},$$

其中

$$\Psi=\begin{bmatrix}\psi_{11} & \cdots & \psi_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \psi_{n1} & \cdots & \psi_{nn}\end{bmatrix}.$$

块 Toeplitz 算子和块 Toeplitz 算子的截断行列式存在于在数学和物理学的各个分支中，并有着重要的应用，尤其是在量子力学的理论研究中。例如，经典的二聚体模型[1]和不相交行走模型[2]的研究应用了块 Toeplitz 算子的截断行列式理论；盖尔芬德迪基层次的研究[3]应用了块算子理论等。

Brown 与 Halmos 证明在单位圆周上的 Hardy 空间上，若有 $T_fT_g=0$，则符号 f 或 g 必定有一个为零[4]。1984 年，美国数学家 Axler 访问四川大学时提出一个问题，若 Hardy 空间上 n 个 Toeplitz 算子的乘积为零，是否必定有其中一个为零? 1994 年，郭坤宇[5]证明了 $n=5$ 时结论是对的。Gu 证明结论对于 $n=6$ 也对[6]。$n>6$ 的情况后来也被解决[7]。Bergman 空间上的函数论与 Hardy 空间不一样，因此 Bergman 空间上的算子理论与 Hardy 空间上的算子理论也不一样。即使在 D 上的 Bergman 空间上，有些看来非常简单的问题解决起来也很困难。例如具有有界调和函数符号的两个 Toeplitz 算子的乘积为零是否必有一个为零?这个问题就悬置了很长时间。直到 2001 年才由 Ahern 和 Čučković 解决并发表在文[8]中。文[8]证明了若 f 和 g 是有界调和函数，使得 $T_fT_g=0$，则 f 或 g 恒等于零。近年来，许多学者开始研究多圆盘和单位球上的 Bergman 空间。例如，卢玉峰等[9] [10]分别研究了多圆盘和单位球 Bergman 空间上的有界 Toeplitz 和 Hankel 乘积。于涛和朱若卫研究了单位球向量值 Bergman 空间上的 Toeplitz 乘积有界的充要条件[11]。

本文通过 Mellin 变换研究 Bergman 空间上两个 Toeplitz 算子乘积的有限和为零问题，并以此为基础研究向量值 Bergman 空间上两个块 Toeplitz 算子的零积问题。

定义 1.2：对 φ 是 $[0,1]$ 上的可积函数，可定义 Mellin 变换：

$$\hat{\varphi}(z)=\int_0^1\varphi(r)r^{z-1}\mathrm{d}r,$$

此时，它是半平面 $\{z:\mathrm{Re}\,z>1\}$ 上的有界解析函数。其中 $L^2(D,\mathrm{d}A)$ 可分解为：

$$L^2(D,\mathrm{d}A)=\underset{k\in Z}{\oplus}\mathrm{e}^{ik\theta}\mathfrak{R},\ \mathfrak{R}=\left\{u:D\to C:\int_0^1 r\left|u(r)\right|^2\mathrm{d}r<\infty\right\},$$

因此对任意 $f\in L^2(D,\mathrm{d}A)$，都有

$$f\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_k(r)\mathrm{e}^{ik\theta},\ f_k\in\mathfrak{R}.$$

引理 1.1 [8]：若 $f\in L^2(D,\mathrm{d}A)$，对 $z=R\mathrm{e}^{i\theta}$，则可定义 f 的 Berezin 变换 Bf：

$$(Bf)(z)=\langle fk_z,k_z\rangle=2\left(1-R^2\right)^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}R^{|k|}\left[\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n+|k|\right)\hat{f}_k\left(2n+|k|\right)R^{2(n-1)}\right]\mathrm{e}^{ik\theta}$$

引理 1.2 [12]：若 φ 为 $\{z:\mathrm{Re}\,z>1\}$ 上的有界解析函数，若存在自然数序列 $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ 使得

$$\hat{\varphi}(n_k)=0\text{ 且 }\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n_k}=\infty$$

则 $\varphi=0$.

2. Bergman 空间上两个 Toeplitz 算子乘积的有限和

定理 2.1：假设 $f^{(p)}\in L^\infty(D,\mathrm{d}A)$，$g^{(p)}=\alpha_p z^j+\beta_p\bar{z}^l$，$\alpha_p,\beta_p\in C$，$\alpha_p,\beta_p\in C$，且满足

$$\sum_{p=1}^{N}\left(\alpha_p+\beta_p\right)f^{(p)}=0.$$

那么有 $\sum_{p=1}^{N}T_{f^{(p)}}T_{g^{(p)}}=0$ 当且仅当 $\sum_{p=1}^{N}\alpha_p f^{(p)}\equiv 0$ 。

证明：必要性。因为 $\sum_{p=1}^{N}T_{f^{(p)}}T_{g^{(p)}}=0$ ，所以

$$\sum_{p=1}^{N}T_{f^{(p)}}T_{g^{(p)}}k_w=0.$$

令 $g_1^{(p)}=\alpha_p z^j$ ， $\overline{g}_2^{(p)}=\beta_p\overline{z}^l$ 。由 $T_{g^{(p)}}k_w=g_1^{(p)}k_w+\overline{g}_2^{(p)}(w)k_w\ (p=1,2,\cdots,N)$ ，有

$$0=\left\langle\sum_{p=1}^{N}T_{f^{(p)}}T_{g^{(p)}}k_w,k_w\right\rangle=\sum_{p=1}^{N}\left\langle T_{f^{(p)}}T_{g^{(p)}}k_w,k_w\right\rangle=\sum_{p=1}^{N}\left(\left\langle T_{f^{(p)}}T_{g_1^{(p)}}k_w,k_w\right\rangle+\left\langle T_{f^{(p)}}T_{\overline{g}_2^{(p)}}k_w,k_w\right\rangle\right)$$

由引理 1.1，上式可变成

$$\sum_{p=1}^{N}\left[B\left(f^{(p)}g_1^{(p)}\right)(w)+\overline{g_2^{(p)}(w)}Bf^{(p)}(w)\right]=0,$$

即

$$\sum_{p=1}^{N}B\left(f^{(p)}g_1^{(p)}\right)=-\sum_{p=1}^{N}\overline{g}_2^{(p)}\left(Bf^{(p)}\right). \tag{1}$$

由引理 1.1 得

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{N}B\left(f^{(p)}g_1^{(p)}\right)&=2\left(1-R^2\right)^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}R^{|k|}\left[\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n+|k|\right)R^{2n-2}\sum_{p=1}^{N}\alpha_p\left(r^j\hat{f}_{k-j}^{(p)}(r)\right)\left(2n+|k|\right)\right]e^{ik\theta}\\&=2\left(1-R^2\right)^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}R^{|k|}\left[\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n+|k|\right)R^{2n-2}\sum_{p=1}^{N}\alpha_p\hat{f}_{k-j}^{(p)}\left(2n+|k|+j\right)\right]e^{ik\theta}\end{aligned}$$

再次运用引理 1.1，

$$\begin{aligned}-\sum_{p=1}^{N}\overline{g}_2^{(p)}Bf^{(p)}&=-2\beta\left(1-R^2\right)^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}R^{|k|}\left[\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n+|k|\right)R^{2n+l-2}\sum_{p=1}^{N}\beta_p\hat{f}_{k}^{(p)}\left(2n+|k|\right)\right]e^{i(k-l)\theta}\\&=-2\beta\left(1-R^2\right)^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}R^{|k+l|}\left[\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n+|k+l|\right)R^{2n+l-2}\sum_{p=1}^{N}\beta_p\hat{f}_{k+l}^{(p)}\left(2n+|k+l|\right)\right]e^{ik\theta}\end{aligned}$$

对比式(1)两边 $e^{ik\theta}$ 的系数，得

$$R^{|k|}\left[\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n+|k|\right)\sum_{p=1}^{N}\alpha_p\hat{f}_{k-j}^{(p)}\left(2n+|k|+j\right)\right]R^{2n-2}=-R^{|k+l|}\left[\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n+|k+l|\right)\sum_{p=1}^{N}\beta_p\hat{f}_{k+l}^{(p)}\left(2n+|k+l|\right)\right]R^{2n+l-2} \tag{2}$$

对 $k\in IN$ 都成立。

当 $k\geq 0$ 时，式(2)变成

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n+k\right)\sum_{p=1}^{N}\alpha_p\hat{f}_{k-j}^{(p)}\left(2n+k+j\right)R^{2n-2}=-\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n+k+l\right)\sum_{p=1}^{N}\beta_p\hat{f}_{k+l}^{(p)}\left(2n+k+l\right)R^{2n+2l-2}$$

令 $n-l$ 代 n，等式右边变成

$$-\sum_{n=l+1}^{\infty}\left(n-l\right)\left(n+k\right)\sum_{p=1}^{N}\beta_p\hat{f}_{k+l}^{(p)}\left(2n+k-l\right)R^{2n-2},$$

上式两边都是关于 $0 \le R \le 1$ 的函数，故当 $n \ge l+1$ 时，对 $k \ge 0$ 有

$$n\sum_{p=1}^{N}\alpha_p \hat{f}_{k-j}^{(p)}(2n+k+j) = -(n-l)\sum_{p=1}^{N}\beta_p \hat{f}_{k+l}^{(p)}(2n+k-l).$$

因此有界解析函数 $(z-l)\sum_{p=1}^{N}\beta_p \hat{f}_{k+l}^{(p)}(2z+k-l) + z\sum_{p=1}^{N}\alpha_p \hat{f}_{k-j}^{(p)}(2z+k+j)$ 在几何级数 $\{l+1, l+2, \cdots\}$ 上为零，由引理 1.2，进而在 $\{z:\operatorname{Re} z > 1\}$ 上等于零，所以有

$$-(z-l)\sum_{p=1}^{N}\beta_p \hat{f}_{k+l}^{(p)}(2z+k-l) = z\sum_{p=1}^{N}\alpha_p \hat{f}_{k-j}^{(p)}(2z+k+j) \tag{3}$$

对 $k \ge 0, \operatorname{Re} z > 1$ 成立。

若 $\operatorname{Re} z > 1, k \ge 0$，则有下面的等式成立：

$$\begin{aligned} &-(z-l)(z-l+(j+l))\cdots(z-l+m(j+l))\sum_{p=1}^{N}\beta_p \hat{f}_{k+l+m(j+l)}^{(p)}(2z+k-l+m(j+l)) \\ &= z(z+j+l)\cdots(z+m(j+l))\sum_{p=1}^{N}\alpha_p \hat{f}_{k-j}^{(p)}(2(z+m(j+l))+k+j) \end{aligned} \tag{4}$$

证明：假设 m 时成立，下证 $m+1$ 时成立。

$$\begin{aligned} &-(z-l)(z-l+(j+l))\cdots(z-l+(m+1)(j+l)) \\ &\cdot\sum_{p=1}^{N}\beta_p \hat{f}_{k+l+m(j+l)+j+l}^{(p)}(2z+k-l+(m+1)(j+l)) \end{aligned}$$

令 $k' = k+j+l$，此时有

$$\begin{aligned} &= -(z-l+(m+1)(j+l))(z-l)(z-l+(j+l))\cdots(z-l+m(j+l)) \\ &\cdot\sum_{p=1}^{N}\beta_p \hat{f}_{k'+l+m(j+l)}^{(p)}(2z+k'-l+m(j+l)) \end{aligned}$$

由归纳假设，$k' > 0$，得到

$$\begin{aligned} &= z(z+j+l)\cdots(z+m(j+l))(z+(m+1)(j+l)-l) \\ &\cdot\sum_{p=1}^{N}\alpha_p \hat{f}_{k'-j}^{(p)}(2(z+m(j+l))+k'+j) \\ &= z(z+j+l)\cdots(z+m(j+l))(z+(m+1)(j+l)-l) \\ &\cdot\sum_{p=1}^{N}\alpha_p \hat{f}_{k+l}^{(p)}(2(z+m(j+l))+k+2j+l) \end{aligned} \tag{5}$$

因为 $\sum_{p=1}^{N}(\alpha_p+\beta_p)f^{(p)} = 0$，所以(5)式等于

$$\begin{aligned} &-z(z+j+l)\cdots(z+m(j+l))(z+(m+1)(j+l)-l) \\ &\cdot\sum_{p=1}^{N}\beta_p \hat{f}_{k+l}^{(p)}(2(z+m(j+l))+k+2j+l) \end{aligned}$$

作变量替换，$z' = z+(m+1)(j+l)$，此时上式变形为

$$= -z(z+j+l)\cdots(z+m(j+l))(z'-l)\sum_{p=1}^{N}\beta_p \hat{f}_{k+l}^{(p)}(2z'+k-l)$$

运用(3)， $\mathrm{Re}\,z'>1$，得到

$$=z\left(z+j+l\right)\cdots\left(z+m\left(j+l\right)\right)\left(z+\left(m+1\right)\left(j+l\right)\right)$$
$$\cdot\sum_{p=1}^{N}\alpha_p\hat{f}_{k-j}^{(p)}\left(2\left(z+\left(m+1\right)\left(j+l\right)\right)+k+j\right)$$

证毕。

在(4)式中令 $z=l$，有

$$\sum_{p=1}^{N}\alpha_p\hat{f}_{k-j}^{(p)}\left(2m\left(j+l\right)+k+j+2l\right)=0.$$

对任意自然数 m 成立，$k\ge 0$。固定非负整数 k，$\sum_{p=1}^{N}\alpha_p\hat{f}_{k-j}^{(p)}(z)$ 在几何级数上为零，由引理 1.2，故恒为零。于是得到

$$\sum_{p=1}^{N}\alpha_p f_{k-j}^{(p)}(r)=0,$$

即对任意 $k\ge 0$，有 $\sum_{p=1}^{N}\alpha_p f_{-j}^{(p)},\sum_{p=1}^{N}\alpha_p f_{-j+1}^{(p)},\cdots,\sum_{p=1}^{N}\alpha_p f_{0}^{(p)},\sum_{p=1}^{N}\alpha_p f_{1}^{(p)},\cdots$ 都为零。

当 $-l\le k<0$ 时，此时(2)式为

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n-k\right)\sum_{p=1}^{N}\alpha_p\hat{f}_{k-j}^{(p)}\left(2n-k+j\right)R^{2n-k-2}=-\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n+k+l\right)\sum_{p=1}^{N}\beta_p\hat{f}_{k+l}^{(p)}\left(2n+k+l\right)R^{2n+k+2l-2},\tag{6}$$

用 $n+k+l$ 等替换上式(6)式中的 n，得

$$=-\sum_{n=k+l+1}^{\infty}n\left(n-k-l\right)\sum_{p=1}^{N}\beta_p\hat{f}_{k+l}^{(p)}\left(2n-k-l\right)R^{2n-k-2}.$$

对比(6)式左右两端关于 R 的系数得当 $n\ge k+l+1$ 时，

$$\left(n-k\right)\sum_{p=1}^{N}\alpha_p\hat{f}_{k-j}^{(p)}\left(2n-k+j\right)=-\left(n-k-l\right)\sum_{p=1}^{N}\beta_p\hat{f}_{k+l}^{(p)}\left(2n-k-l\right),$$

整理得

$$\sum_{p=1}^{N}\alpha_p\hat{f}_{k-j}^{(p)}\left(2n-k+j\right)=-\frac{n-k-l}{n-k}\sum_{p=1}^{N}\beta_p\hat{f}_{k+l}^{(p)}\left(2n-k-l\right).$$

又由 $\sum_{p=1}^{N}\left(\alpha_p+\beta_p\right)f^{(p)}=0$，得到

$$\sum_{p=1}^{N}\alpha_p\hat{f}_{k-j}^{(p)}\left(2n-k+j\right)=\frac{n-k-l}{n-k}\sum_{p=1}^{N}\alpha_p\hat{f}_{k+l}^{(p)}\left(2n-k-l\right),$$

又因为 $k+l\ge 0$，运用 $k\ge 0$ 时的结论得，$\sum_{p=1}^{N}\alpha_p f_{-l-j}^{(p)},\sum_{p=1}^{N}\alpha_p f_{-l-j+1}^{(p)},\cdots$ 为零。

当 $-2l\le k<-l$ 时，此时式(2)为

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n-k\right)\sum_{p=1}^{N}\alpha_p\hat{f}_{k-j}^{(p)}\left(2n-k+j\right)R^{2n-k-2}=-\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n-k-l\right)\sum_{p=1}^{N}\beta_p\hat{f}_{k+l}^{(p)}\left(2n-k-l\right)R^{2n-k-2}.$$

于是得到当 $n\ge 1$ 时，有

$$(n-k)\sum_{p=1}^{N}\alpha_p \hat{f}_{k-j}^{(p)}(2n-k+j) = -(n-k-l)\sum_{p=1}^{N}\beta_p \hat{f}_{k+l}^{(p)}(2n-k-l),$$

再次运用 $\sum_{p=1}^{N}(\alpha_p+\beta_p)f^{(p)}=0$，有

$$\sum_{p=1}^{N}\alpha_p \hat{f}_{k-j}^{(p)}(2n-k+j) = -\frac{n-k-l}{n-k}\sum_{p=1}^{N}\beta_p \hat{f}_{k+l}^{(p)}(2n-k-l) = \frac{n-k-l}{n-k}\sum_{p=1}^{N}\alpha_p \hat{f}_{k+l}^{(p)}(2n-k-l).$$

运用 $-l\le k<0$ 时，$\sum_{p=1}^{N}\alpha_p f_{k+l}^{(p)}\equiv 0$，得 $\sum_{p=1}^{N}\alpha_p f_{-2l-j}^{(p)},\sum_{p=1}^{N}\alpha f_{-2l-j+1}^{(p)},\cdots$ 为零。

如此循环下去，

$$\sum_{p=1}^{N}\alpha_p f_k^{(p)}=0 \qquad (k\in Z).$$

进而

$$\sum_{p=1}^{N}\alpha_p f^{(p)}(z)\equiv 0.$$

充分性。因为 $\sum_{p=1}^{N}\alpha_p f^{(p)}=0$，由 $\sum_{p=1}^{N}(\alpha_p+\beta_p)f^{(p)}=0$，得到 $\sum_{p=1}^{N}\beta_p f^{(p)}=0$。那么有

$$\sum_{p=1}^{N}T_{f^{(p)}}T_{g^{(p)}} = \sum_{p=1}^{N}T_{f^{(p)}}T_{\alpha_p z^j+\beta_p \bar{z}^l}.$$

由 Toeplitz 算子的性质，等式右边变为

$$\sum_{p=1}^{N}T_{f^{(p)}}\left(T_{\alpha_p z^j}+T_{\beta_p \bar{z}^l}\right),$$

即

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{N}\left(T_{f^{(p)}}T_{\alpha_p z^j}+T_{f^{(p)}}T_{\beta_p \bar{z}^l}\right) &= \sum_{p=1}^{N}\left(\alpha_p T_{f^{(p)}}T_{z^j}+\beta_p T_{f^{(p)}}T_{\bar{z}^l}\right)\\ &= \sum_{p=1}^{N}\left(T_{\alpha_p f^{(p)}}T_{z^j}+T_{\beta_p f^{(p)}}T_{\bar{z}^l}\right)\\ &= T_{\sum_{p=1}^{N}\alpha_p f^{(p)}}T_{z^j}+T_{\sum_{p=1}^{N}\beta_p f^{(p)}}T_{\bar{z}^l}\\ &= 0.\end{aligned}$$

所以 $\sum_{p=1}^{N}T_{f^{(p)}}T_{g^{(p)}}=0$。

3. 向量值 Bergman 空间上两个块 Toeplitz 算子的零积

定理 3.1: 假设 $F=(f_{pq})_{N\times N}\in L^\infty(D,\mathrm{d}A)\otimes M_{N\times N}$，$G=(\delta_{pq})_{N\times N}=Az^j+B\bar{z}^l$，其中 $A=(\alpha_{pq})_{N\times N}\in M_{N\times N}$，$B=(\beta_{pq})_{N\times N}\in M_{N\times N}$，$\alpha_{pq},\beta_{pq}\in C$，$j,l\in IN$，且满足

$$(A'+B')F'=0.$$

那么则有 $T_F T_G=0$ 当且仅当 $A'F'=0$（A' 表示矩阵 A 的转置)。

证明：必要性。由

$$F=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1N} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N1} & f_{N2} & \cdots & f_{NN} \end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1N} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{N1} & \delta_{N2} & \cdots & \delta_{NN} \end{bmatrix},$$

得

$$T_F=\begin{bmatrix} T_{f_{11}} & T_{f_{12}} & \cdots & T_{f_{1N}} \\ T_{f_{21}} & T_{f_{22}} & \cdots & T_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{f_{N1}} & T_{f_{N2}} & \cdots & T_{f_{NN}} \end{bmatrix},\ T_G=\begin{bmatrix} T_{\delta_{11}} & T_{\delta_{12}} & \cdots & T_{\delta_{1N}} \\ T_{\delta_{21}} & T_{\delta_{22}} & \cdots & T_{\delta_{2N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{\delta_{N1}} & T_{\delta_{N2}} & \cdots & T_{\delta_{NN}} \end{bmatrix},$$

于是有

$$\begin{aligned} T_F T_G &= \begin{bmatrix} T_{f_{11}} & T_{f_{12}} & \cdots & T_{f_{1N}} \\ T_{f_{21}} & T_{f_{22}} & \cdots & T_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{f_{N1}} & T_{f_{N2}} & \cdots & T_{f_{NN}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_{\delta_{11}} & T_{\delta_{12}} & \cdots & T_{\delta_{1N}} \\ T_{\delta_{21}} & T_{\delta_{22}} & \cdots & T_{\delta_{2N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{\delta_{N1}} & T_{\delta_{N2}} & \cdots & T_{\delta_{NN}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T_{f_{11}}T_{\delta_{11}}+T_{f_{12}}T_{\delta_{21}}+\cdots+T_{f_{1N}}T_{\delta_{N1}} & \cdots & T_{f_{11}}T_{\delta_{1N}}+T_{f_{12}}T_{\delta_{2N}}+\cdots+T_{f_{1N}}T_{\delta_{NN}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{f_{N1}}T_{\delta_{11}}+T_{f_{N2}}T_{\delta_{21}}+\cdots+T_{f_{NN}}T_{\delta_{N1}} & \cdots & T_{f_{N1}}T_{\delta_{1N}}+T_{f_{N2}}T_{\delta_{2N}}+\cdots+T_{f_{NN}}T_{\delta_{NN}} \end{bmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

进而，对$1\le p,q\le N$，有

$$\sum_{m=1}^{N} T_{f_{pm}}T_{\delta_{mq}}=0.$$

由$(A'+B')F'=0$，得$\sum_{m=1}^{N}(\alpha_{qm}+\beta_{qm})f_{mp}=0\,(1\le p,q\le N)$，运用定理 1.1 的结论得

$$\sum_{m=1}^{N}\alpha_{qm}f_{mp}=0$$

对$1\le p,q\le N$成立。即

$$A'F'=0.$$

充分性。由$(A'+B')F'=0$，得$\sum_{m=1}^{N}(\alpha_{qm}+\beta_{qm})f_{mp}=0\,(1\le p,q\le N)$，又$A'F'=0$，得到

$$\sum_{m=1}^{N}\alpha_{qm}f_{mp}=0,\ \sum_{m=1}^{N}\beta_{qm}f_{mp}=0.$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N}T_{f_{mp}}T_{\delta_{qm}} &= \sum_{m=1}^{N}T_{f_{mp}}\left(T_{\alpha_{qm}z^j+\beta_{qm}\bar{z}^l}\right) \\ &= \sum_{m=1}^{N}T_{\alpha_{mq}f_{mp}}T_{z^j}+T_{\beta_{mq}f_{mp}}T_{\bar{z}^l} \\ &= T_{\sum_{m=1}^{N}\alpha_{mq}f_{mp}}T_{z^j}+T_{\sum_{m=1}^{N}\beta_{mq}f_{mp}}T_{\bar{z}^l} \\ &= 0. \end{aligned}$$

所以

$$\left(T_F T_G\right)' = 0,$$

故 $T_F T_G = 0$，定理证毕。

参考文献

[1] Basor, E.L. and Ehrhardt, T. (2007) Asymptotics of Block Toeplitz Determinants and the Classical Dimer Model. *Communications in Mathematical Physics*, **274**, 427-455. https://doi.org/10.1007/s00220-007-0276-5

[2] Hikami, K. and Imamura, T. (2003) Vicious Walkers and Hook Young Tableaux. *Journal of Physics A*: *Mathematical and General*, **36**, 3033-3048. https://doi.org/10.1088/0305-4470/36/12/311

[3] Cafasso, M. (2008) Block Toeplitz Determinants, Constrained KP and Gelfand-Dickey Hierarchies. *Mathematical Physics Analysis and Geometry*, **11**, 11-51. https://doi.org/10.1007/s11040-008-9038-7

[4] Brown, A. and Halmos, P.R. (1964) Algebraic Properties of Toeplitz Operators. *Journal für die reine und Angewandte Mathematik*, **213**, 89-102.

[5] Guo, K. (1996) A Problem on Products of Toeplitz Operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **124**, 869-871. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-96-03224-8

[6] Gu, C. (2000) Products of Several Toeplitz Operators. *Journal of Functional Analysis*, **171**, 483-527. https://doi.org/10.1006/jfan.1999.3547

[7] Aleman, A. and Vukotic, D. (2009) Zero Products of Toeplitz Operators. *Duke Mathematical Journal*, **148**, 373-403. https://doi.org/10.1215/00127094-2009-029

[8] Čučković, Ž. (2003) Berezin versus Mellin. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **287**, 234-243. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00546-8

[9] Lu, Y.F. and Shang, S.X. (2009) Bounded Hankel Products on the Bergman Space of the Polydisk. *Canadian Journal of Mathematics*, **61**, 190-204. https://doi.org/10.4153/CJM-2009-009-0

[10] Lu, Y.F. and Liu, C.M. (2009) Toeplitz and Hankel Products on Bergman Spaces of the Unit Ball. *Chinese Annals of Mathematics* (*Series B*), **30**, 293-310. https://doi.org/10.1007/s11401-007-0492-5

[11] Yu, T. and Zhu, R.W. (2011) Toeplitz Products on Vector-Valued Bergman Spaces of the Unit Ball. *Acta Mathematica Scientia*, **31A**, 1550-1558.

[12] Remmert, R. (1998) Classical Topics in Complex Function Theory. Graduate Texts in Methematics. Springer, New York.