Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(12), 1593-1599
Published Online December 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.712186

Hans汉斯

A Study on Exact Travelling Wave Solutions of Generalized Dispersive Equations

Jing Chen

School of Science, Southwest University of Science and Technology, Mianyang Sichuan
Email: mychenjing2007@sina.com

Received: Nov. 23rd, 2018; accepted: Dec. 17th, 2018; published: Dec. 24th, 2018

Abstract

The aim of this paper is devoted to the study of physical structures of solutions for generalized nonlinear KdV-type equations in two-dimensional space. The variable replacement method is used to get compactons, solitons, solitary patterns and periodic solutions. Furthermore, we point out that the different exponents and coefficients lead to different results of physical structures for this kind of equations with positive or negative exponents.

Keywords

Generalized KdV-Type Equations, Compactons, Solitons

一类广义色散方程的行波解

陈　静

西南科技大学理学院，四川 绵阳
Email: mychenjing2007@sina.com

收稿日期：2018年11月23日；录用日期：2018年12月17日；发布日期：2018年12月24日

摘　要

本文在降阶法的基础上运用变量代换法研究了一类广义非线性KdV方程的精确解，获得了这个方程具有不同物理结构包括紧孤子、孤立子、孤立波相似解和周期解在内的行波解。对于这类具有正或负n指数的广义KdV方程，方程中各项的系数连同波速一起决定着解的物理结构。

文章引用: 陈静. 一类广义色散方程的行波解[J]. 应用数学进展, 2018, 7(12): 1593-1599.
DOI: 10.12677/aam.2018.712186

关键词

广义非线性KdV方程，紧孤子，孤立子

1. 引言

近几十年来，对刻画自然界中非线性波现象的偏微分方程的研究已引起众多学者的高度关注，特别是为平衡弱非线性和色散而产生的孤立子解更是被广泛地研究。为了获得非线性方程的精确解，大量方法已经被用于处理相应的偏微分方程(参见文[1]-[10])。在文[1]中，作者就运用推广的 tanh 方法研究了具有任意阶非线性项的广义 ZK 方程，得到了包含了几种孤子解在内的大量行波解。

通过对非线性色散方程的研究，Rosenau 和 Hyman 在文[2]中第一次提出了紧孤子的概念，将具有紧支集的孤立子叫做紧孤子。为了搞清楚非线性色散项在流体中形成的模型，Rosenau 和 Hyman 研究了一类特殊的非线性 KdV 问题，即如下定义的 $K(m,n)$方程

$$u_t+\left(u^m\right)_x+\left(u^m\right)_{xxx}=0,\ \ m>1,1<n\le 3. \tag{1}$$

在文[3]中，Wazwaz 采用 Adomian 分解法(见文[11])求解非线性色散方程。他指出，对于所有 $m = n$ 的 $K(m,n)$型方程都能用该方法求精确解，为了说明这一方法，他充分地讨论了 $K(2,2)$和 $K(3,3)$两个方程。

Wazwaz 在文[4]中研究了两个如下形式的(2 + 1)维 Boussinesq 方程

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}-a\left(u^{2n}\right)_{xx}-b\left[u^n\left(u^n\right)_{xx}\right]_{xx}=0,\ \ n>1, \tag{2}$$

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}-a\left(u^{-2n}\right)_{xx}-b\left[u^{-n}\left(u^{-n}\right)_{xx}\right]_{xx}=0,\ \ n>1. \tag{3}$$

Wazwaz 总结了正余弦拟设法的主要步骤，并用它获得了方程(2) (3)的紧孤子、孤立子、孤立波相似解和周期解。他进一步指出，方程中函数的指数和系数比 a/b、以及正负号的变化都会导致解的物理结构产生质的变化。在文[3] [4] [5] [6]中，Wazwaz 还运用该方法彻底地讨论了一维及更高维的 KdV、mKdV、KP 方程。

本文的主要工作是寻求另外的方法去扩展 Wazwaz 在文[3]和[4]中的工作以获得非线性色散方程的精确解。为了实现这个这一目标，我们将讨论下列具有正负指数的广义 KdV 型方程

$$u_t+au_x+b\left(u^n\right)_x+b\left(u^n\right)_y+\left(u^n\right)_{xxx}+\left(u^n\right)_{yyy}=0,\ \ n>0, \tag{4}$$

$$u_t+au_x+b\left(u^{-n}\right)_x+b\left(u^{-n}\right)_y+\left(u^{-n}\right)_{xxx}+\left(u^{-n}\right)_{yyy}=0,\ \ n>1, \tag{5}$$

其中 a，b 为非零常数。方程(4) (5)可看作是 $K(n,n)$方程添加了新的一项 au_x 并将它们推广到(2 + 1)维。运用变量 $\xi=\mu x+\eta y-ct$ 代换，我们把非线性偏微分方程(4) (5)转化成更容易求解的关于 ξ 的 ODES，并因此得到方程(4) (5)行波解的解析表达式。

本文中我们引入了如下 q 型双曲函数

$$\sinh_q\left(x\right)=\frac{\exp\left(x\right)-q\exp\left(-x\right)}{2},\quad \cosh_q\left(x\right)=\frac{\exp\left(x\right)+q\exp\left(-x\right)}{2},$$

$$\operatorname{csch}_q(x)=\frac{1}{\sinh_q(x)},\quad \operatorname{sech}_q(x)=\frac{1}{\cosh_q(x)},$$

这里 $q>0$，且为常数。

2. 主要结论

2.1. 具有正指数的 KdV 型方程

我们首先考虑具有正指数的方程(4)。假设方程(4)具有形如 $u(x,y,t)=u(\xi)$ 的解，其中 $\xi=\mu x+\eta y-ct$， μ,η,c 是不为 0 的常数，且 $\mu+\eta\neq 0$。易知

$$\frac{\partial}{\partial t}=-c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi},\frac{\partial}{\partial x}=\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi},\frac{\partial}{\partial x^3}=\mu^3\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\xi^3},\frac{\partial}{\partial y}=\sigma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi},\frac{\partial}{\partial y^3}=\sigma^3\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\xi^3}. \tag{6}$$

将(6)式代入方程(4)中得到下面这个非线性 ODE

$$(a\mu-c)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+b(\mu+\eta)\frac{\mathrm{d}u^n}{\mathrm{d}\xi}+(\mu^3+\eta^3)\frac{\mathrm{d}^3u^n}{\mathrm{d}\xi^3}=0 \tag{7}$$

为方便起见，在本文中我们令 $\rho=\mu^2-\mu\eta+\eta^2$，且对任意的 $\mu\neq 0,\eta\neq 0$ 都有 $\rho>0$，下面不再赘述。

1) 当 $n=1$ 时，方程(7)变形为

$$\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}\xi^3}+\frac{1}{\rho}\left(b+\frac{a\mu-c}{\mu+\eta}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=0, \tag{8}$$

若 $b+\dfrac{a\mu-c}{\mu+\eta}\geq 0$，解得紧孤子解

$$u(x,y,t)=\begin{cases}\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{1}{\rho}\left(b+\dfrac{a\mu-c}{\mu+\eta}\right)}\xi+\theta\right)+A, & |\varphi|\leq\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

这里 $\varphi=\sqrt{\dfrac{1}{\rho}\left(b+\dfrac{a\mu-c}{\mu+\eta}\right)}\xi+\theta$， λ_1,λ_2,A 为任意常数，且当 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 时， $\theta=0$；否则 θ 由式子 $\sin\theta=\lambda_1\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)^{-\frac{1}{2}},\cos\theta=\lambda_2\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ 确定。

若 $b+\dfrac{a\mu-c}{\mu+\eta}>0$，我们得到下列形式的孤立波相似解(下式中 λ_3,λ_4 都是常数)

$$u(x,y,t)=\lambda_3\cosh_{\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_3}\right)}\left(\sqrt{-\frac{1}{\rho}\left(b+\frac{a\mu-c}{\mu+\eta}\right)}\xi+A\right),\ \text{当}\frac{k_4}{k_3}>0;$$

$$\text{或}\ u(x,y,t)=\lambda_3\sinh_{\left(-\frac{\lambda_4}{\lambda_3}\right)}\left(\sqrt{-\frac{1}{\rho}\left(b+\frac{a\mu-c}{\mu+\eta}\right)}\xi+A\right),\ \text{当}\frac{k_4}{k_3}<0.$$

2) 当 $n\geq 2$ 时，我们考虑下面两种情况：

情况 I、 $\mu\neq\dfrac{c}{a}$ 时，对方程(7)积分一次并令积分常数为 0 得

$$(a\mu-c)u+b(\mu+\eta)u^n+(\mu^3+\eta^3)\frac{\mathrm{d}^2u^n}{\mathrm{d}\xi^2}=0. \tag{9}$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}u^n}{\mathrm{d}\xi}=Z,\dfrac{\mathrm{d}^2u^n}{\mathrm{d}\xi^2}=Z\dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u^n}$，代入式(9)中分离变量得

$$\left(\mu^3+\eta^3\right)Z\mathrm{d}Z=n\left[\left(c-a\mu\right)u^n-b\left(\mu+\eta\right)u^{2n-1}\right]\mathrm{d}u. \tag{10}$$

进一步对方程 (10)积分并令积分常数为 0 有

$$\frac{\mu^3+\eta^3}{2}Z^2=n\left[\frac{c-a\mu}{n+1}u^{n+1}-\frac{b\left(\mu+\eta\right)}{2n}u^{2n}\right]. \tag{11}$$

由此有

$$\frac{nu^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}u}{\sqrt{\dfrac{2n\left(c-a\mu\right)}{\left(n+1\right)\left(\mu+\eta\right)}-bu^{n-1}}}=\pm\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\rho}}. \tag{12}$$

令 $V=\sqrt{\dfrac{2n\left(c-a\mu\right)}{\left(n+1\right)\left(\mu+\eta\right)}-bu^{n-1}}$，

则当 $b>0$ 时，方程(12)变形为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{\dfrac{2n\left(c-a\mu\right)}{\left(n+1\right)\left(\mu+\eta\right)}-V^2}}=\pm\frac{n-1}{2n}\sqrt{\frac{b}{\rho}}\mathrm{d}\xi. \tag{13}$$

当 $\dfrac{a\mu-c}{\mu+\eta}\neq0$ 时，对式(13)积分解得如下紧孤子解

$$u\left(x,y,t\right)=\begin{cases}\left[\dfrac{2n\left(c-a\mu\right)}{b\left(n+1\right)\left(\mu+\eta\right)}\cos^2\left(\dfrac{n-1}{2n}\sqrt{\dfrac{b}{\rho}}\xi\pm r\right)\right]^{\frac{1}{n-1}}, & \left|\phi\right|\leq\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

这里 $\phi=\dfrac{n-1}{2n}\sqrt{\dfrac{b}{\rho}}\xi\pm r$。在本文中，为方便起见我们用 r 表示任意积分常数。

类似地，在 $b<0$ 的情况下，我们解得孤立波相似解

$$u\left(x,y,t\right)=\left[\frac{2n\left(c-a\mu\right)}{b\left(n+1\right)\left(\mu+\eta\right)}\cosh^2\left(\frac{n-1}{2n}\sqrt{-\frac{b}{\rho}}\xi\pm ir\right)\right]^{\frac{1}{n-1}},i=\sqrt{-1}.$$

情况 II、 $\mu=\dfrac{c}{a}$。

方程(7)变形为线性方程

$$b\frac{\mathrm{d}u^n}{\mathrm{d}\xi}+\left(\mu^2-\mu\eta+\eta^2\right)\frac{\mathrm{d}^3u^n}{\mathrm{d}\xi^3}=0. \tag{14}$$

当 $b>0$ 时，解方程(14)得 $u^n=\left(k_1^2+k_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{b}{\rho}}\xi+\alpha\right)+A$，其中 k_1,k_2 为任意常数，且当 $k_1=k_2=0$ 时，$\alpha=0$，否则 α 满足 $\sin\alpha=k_1\left(k_{1?}^2+k_{2?}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$，$\cos\alpha=k_2\left(k_{1?}^2+k_{2?}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$。

由此得到紧孤子解

$$u(x,y,t)=\begin{cases}\left[\left(k_1^2+k_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\sin\left(\sqrt{\frac{b}{\rho}}\xi+\alpha\right)+A\right]^{\frac{1}{n}}, & |\psi|\le\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

这里 $\psi=\sqrt{\frac{b}{\rho}}\xi+\alpha$。

当 $b<0$，我们有解

$$u(x,y,t)=\left[k_3\exp\left(\sqrt{-\frac{b}{\rho}}\xi\right)+k_4\exp\left(-\sqrt{-\frac{b}{\rho}}\xi\right)+A\right]^{\frac{1}{n}}，\quad k_3,k_4\text{ 为任意常数。}$$

综上，我们整理得到下列形式孤立波相似解

$$u(x,y,t)=\left[2k_3\cosh_{\left(\frac{k_4}{k_3}\right)}\left(\sqrt{-\frac{b}{\rho}}\xi\right)+A\right]^{\frac{1}{n}},\quad \text{当}\frac{k_4}{k_3}>0;$$

$$\text{或}\quad u(x,y,t)=\left[2k_3\cosh_{\left(-\frac{k_4}{k_3}\right)}\left(\sqrt{-\frac{b}{\rho}}\xi\right)+A\right]^{\frac{1}{n}},\quad \text{当}\frac{k_4}{k_3}<0.$$

2.2. 具有负指数的 KdV 型方程

考虑具有负指数的方程(5)。按照前面所述方法，我们将行波变量 $\xi=\mu x+\eta y-ct$ 代入方程(5)，使其变为下列 ODE

$$(a\mu-c)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+b(\mu+\eta)\frac{\mathrm{d}u^{-n}}{\mathrm{d}\xi}+\left(\mu^3+\eta^3\right)\frac{\mathrm{d}^3u^{-n}}{\mathrm{d}\xi^3}=0, \tag{15}$$

其中 μ,η,c 为不为 0 的常数，且 μ,η,c。

情况 1、 $\mu\ne\frac{c}{a}$。

对方程(15)积分并令积分常数为 0 可得

$$(a\mu-c)u+b(\mu+\eta)u^{-n}+\left(\mu^3+\eta^3\right)\frac{\mathrm{d}^2u^{-n}}{\mathrm{d}\xi^2}=0. \tag{16}$$

进一步变形有

$$\frac{-nu^{\frac{-n-3}{2}}\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2n(c-a\mu)}{(n-1)(\mu+\eta)}-bu^{-n-1}}}=\pm\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\rho}}, \tag{17}$$

当 $b>0$ 时，解得周期解

$$u(x,y,t)=\left[\frac{b(n-1)(\mu+\eta)}{2n(c-a\mu)}\sec^2\left(\frac{n+1}{2n}\sqrt{\frac{b}{\rho}}\xi\pm r\right)\right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

当 $b<0$ 时，解得孤立子解

$$u(x,y,t)=\left[\frac{b(n-1)(\mu+\eta)}{2n(c-a\mu)}\mathrm{sech}^2\left(\frac{n+1}{2n}\sqrt{-\frac{b}{\rho}}\xi\pm ir\right)\right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

情况 2、 $\mu=\frac{c}{a}$ 。

此时我们考虑如下方程

$$b\frac{\mathrm{d}u^{-n}}{\mathrm{d}\xi}+\left(\mu^2-\mu\eta+\eta^2\right)\frac{\mathrm{d}^3u^{-n}}{\mathrm{d}\xi^3}=0. \tag{18}$$

当 $b>0$ 时，解之得周期解

$$u(x,y,t)=\left[\left(l_1^2+l_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\sin\left(\sqrt{\frac{b}{\rho}}\xi+\beta\right)+A\right]^{-\frac{1}{n}},$$

这里 l_1,l_2,A 为常数， $l_1^2+l_2^2\neq 0$ 或 $A\neq 0$ ，且 β 满足等式 $\sin\beta=l_1\left(l_1^2+l_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ ， $\cos\beta=l_2\left(l_1^2+l_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ 。

当 $b<0$ 时，解之得一般解

$$u(x,y,t)=\left[l_3\exp\left(\sqrt{-\frac{b}{\rho}}\xi\right)+l_4\exp\left(-\sqrt{-\frac{b}{\rho}}\xi\right)+A\right]^{-\frac{1}{n}}.$$

当 $A=0$ 时则有两个特殊的孤立子解

$$u(x,y,t)=\left[\frac{1}{2l_3}\mathrm{sech}_{\left(\frac{l_4}{l_3}\right)}\left(\sqrt{-\frac{b}{\rho}}\xi\right)\right]^{\frac{1}{n}},\ 当\frac{l_4}{l_3}>0;$$

或 $$u(x,y,t)=\left[\frac{1}{2l_3}\operatorname{csc}h_{\left(-\frac{l_4}{l_3}\right)}\left(\sqrt{-\frac{b}{\rho}}\xi\right)\right]^{\frac{1}{n}},\ 当\frac{l_4}{l_3}<0.$$

3. 结论

本文的主要目的是研究广义非线性具有正负 n 指数的 KDV 型方程(4)和(5)的精确解。我们运用变量代换法获得了包括紧孤子、孤立子、孤立波相似解和周期解在内的行波解。在下表 1 中，我们容易观察

Table 1. The physical structures of solutions for the generalized dispersive equations
表 1. 广义色散方程解的物理结构

指数	n	μ	系数	解的结构
正指数	$n=1$		$b+\frac{a\mu-c}{\mu+\eta}\geq 0$	紧孤立子解
			$b+\frac{a\mu-c}{\mu+\eta}<0$	孤立波相似解
	$n\geq 2$	$\mu\neq\frac{c}{a}$	$b>0$	紧孤立子解
			$b<0$	孤立波相似解
		$\mu=\frac{c}{a}$	$b>0$	紧孤立子解
			$b<0$	孤立波相似解
负指数	$n\geq 2$	$\mu\neq\frac{c}{a}$	$b>0$	周期解
			$b<0$	孤立子解
		$\mu=\frac{c}{a}$	$b>0$	周期解
			$b<0$	孤立子解

到不同的指数和系数决定了具有不同物理结构的解。

研究偏微分方程以获得其精确解进而研究非线性波现象的运动规律和特点是众多科学工作者一直以来的重要工作，值得指出的是,文中所使用的方法对于获得这些非线性偏微分方程的一些特殊解有一定的优势。

参考文献

[1] Li, B., Chen, Y. and Zhang, H.Q. (2003) Exact Travelling Wave Solutions for a Generalized Zakharov-Kuznetsov Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **146**, 653-666. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00610-0

[2] Rosenau, P. and Hyman, J.M. (1993) Compactons: Solitons with Finite Wavelength. *Physical Review Letters*, **70**, 564-567. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.564

[3] Wazwaz, A.M. (2001) A Study of Nonlinear Dispersive Equations with Solitary-Wave Solutions Having Compact Support. *Mathematics and Computers in Simulation*, **56**, 269-276. https://doi.org/10.1016/S0378-4754(01)00291-9

[4] Wazwwaz, A.M. (2005) Variants of the Two-Dimensional Boussinesq Equation with Compactons, Solitons, and Periodic Solutions. *Computers and Mathematics with Applications*, **49**, 295-301. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2004.06.029

[5] Wazwwaz, A.M. (2003) A Study on Nonlinear Dispersive Partial Differenial Equations of Compact and Nocompact Solutions, and Nocompact Structures. *Applied Mathematics and Computation*, **135**, 399-409. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00005-X

[6] Wazwwaz, A.M. (2004) Dinstinct Variants of the KdV Equation with Compact and Nocompact Structures. *Applied Mathematics and Computation*, **150**, 365-377. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00238-8

[7] Kivshar, Y. (1994) Compactons in Dispersive Lattices. *Nonlinear Coherent Structures in Physics and Biology*, **329**, 255-258. https://doi.org/10.1007/978-1-4899-1343-2_38

[8] Dinda, P.T. and Remoissenet, M. (1999) Breather Compactons in Nonlinear Klein-Gordon Systems. *Physical Review E*, **60**, 6218-6221. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.60.6218

[9] Ismail, M.S. and Taha, T. (1998) A Numerical Study of Compactons. *Mathematics and Computers in Simulation*, **47**, 519-530.

[10] Rosenau, P. (2000) Compact and Nocompact Dispersive Structures. *Physics Letters A*, **275**, 193-203. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00577-6

[11] Adomian, G. (1994) Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method. Kluwer Academic Publishers, Boston. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8289-6