Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(4), 316-322
Published Online April 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.74038

Hans汉斯

H_2 Optimal Model Order Reduction Method Based on the Cross-Gramian for Discrete-Time Systems

Zhaohong Wang, Yanpeng Li

College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang
Email: zhwangzp@163.com

Received: Apr. 4th, 2018; accepted: Apr. 16th, 2018; published: Apr. 24th, 2018

Abstract

In this paper, the first-order necessary conditions based on the cross-Gramian are presented for the discrete-time Single-Input-Single-Output (SISO) systems. First, by using the cross-Gramian, the H_2-norm of the error system is obtained. Then, according to the Sylvester equations satisfied by the cross-Gramian, the gradients are obtained with respect to the coefficient matrices of the reduced order system. Finally, due to the gradients of the H_2-norm of the error system, the first-order necessary conditions based on the cross-Gramian are achieved. Meanwhile, the reduced order system is accordingly obtained.

Keywords

Model Order Reduction, Cross-Gramian, First-Order Necessary Conditions, Discrete-Time Systems

基于离散时间系统交叉Gram矩阵的H_2最优模型降阶方法

王兆鸿，李延鹏

新疆大学数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐
Email: zhwangzp@163.com

收稿日期：2018年4月4日；录用日期：2018年4月16日；发布日期：2018年4月24日

摘　要

针对单输入单输出(SISO)离散时间系统，本文提出了基于交叉Gram矩阵的一阶必要条件。首先，应用交

文章引用: 王兆鸿, 李延鹏. 基于离散时间系统交叉 Gram 矩阵的 H_2 最优模型降阶方法[J]. 应用数学进展, 2018, 7(4): 316-322. DOI: 10.12677/aam.2018.74038

叉Gram矩阵，得到误差系统的H_2范数；然后，根据交叉Gram矩阵所满足的Sylvester方程，得到了误差系统H_2范数关于降阶系统系数矩阵的梯度；最后，根据误差系统H_2范数的梯度，得到了基于交叉Gram矩阵的一阶必要条件。与此同时，得到降阶系统。

关键词

模型降阶方法，交叉Gram矩阵，一阶必要条件，离散时间系统

1. 引言

近年来，描述大型或复杂动力系统方程的维数不断提高，给工程人员的理论分析和仿真模拟带来了巨大的挑战。长期以来，研究人员一直致力于寻求能够降低原始系统的维数，并且可以保持原始系统的结构特性、稳定性和无源性等性质的方法。模型降阶方法就是一种构造低阶近似系统的方法。它可以降低对大规模系统的理论分析难度、计算损耗以及仿真模拟时间，因此，它被广泛应用于高新技术产业和工程技术领域。目前模型降阶方法已被广泛研究，如正交多项式模型降阶方法[1] [2]，平衡截断模型降阶方法[1] [3] [4]，Krylov 子空间模型降阶方法[1] [5]，以及本征正交分解模型降阶方法[1] [6]等。

离散系统的模型降阶方法已被越来越多的研究人员所关注。[4]提出了线性时不变离散时间系统在频率域上的平衡截断模型降阶方法，分析了频率域区间上的可控和可观 Gram 矩阵，以及这两个 Gram 矩阵分别满足的 Lyapunov 方程。对于离散时间双线性系统，[7]和[8]应用平衡截断技术，分别从时间域和频率域两个方面构造了降阶系统，分析了原始系统和降阶系统的误差界。对于离散时间切换系统，[9]应用离散时间切换系统的可控和可观 Gram 矩阵，通过平衡截断模型降阶方法，构造了离散时间切换系统的降阶系统，同时给出了原始系统与降阶系统的误差界。由此可见，在构造降阶系统的过程中，Gram 矩阵发挥了重要的作用。

最优 H_2 模型降阶方法是一类重要的模型降阶方法，受到了许多研究人员的关注。[10]通过求解 Lyapunov 方程，提出了连续系统 H_2 最优的一阶必要条件，即 Wilson 条件。[11]不仅提出了连续系统的 Hyland-Bernstein 条件，而且还证明了 Wilson 条件与 Hyland-Bernstein 条件的等价性。[12]定义了多输入多输出(MIMO)离散时间系统的 H_2 范数。由于应用 Wilson 条件与 Hyland-Bernstein 条件求解降阶系统，需要求解 Lyapunov 方程计算量较大，所以[12]提出通过切线差值条件构造降阶系统，同时证明了离散时间系统的 Wilson 条件与 Hyland-Bernstein 条件是等价的。由于 H_2 范数可以由可控和可观 Gram 矩阵表示，所以[13]应用一阶扰动方法研究了连续 MIMO 误差系统的梯度，得到了切线插值条件。由于应用交叉 Gram 矩阵构造降阶系统，需求解的 Lyapunov 方程个数相对较少。受此启发，我们研究了 SISO 离散时间系统基于交叉 Gram 矩阵的 H_2 最优模型降阶方法。

针对渐近稳定的 SISO 离散时间系统，本文提出了基于交叉 Gram 矩阵的 H_2 最优模型降阶方法。首先，将误差系统的 H_2 范数表示为交叉 Gram 矩阵的形式；然后，基于降阶系统系数矩阵的一阶扰动，我们得到了误差系统 H_2 范数的梯度；最后，应用误差系统 H_2 范数的梯度，我们提出了 SISO 离散时间系统基于交叉 Gram 矩阵的一阶必要条件，并由此得到降阶系统。为了求解降阶系统，我们用到了交叉 Gram 矩阵，这也为求解渐近稳定的 SISO 离散时间系统的降阶系统提供了方法。

2. 预备知识

考虑如下线性时不变 SISO 离散时间系统

$$\Sigma:\begin{cases} \mathrm{x}_{k+1}=A\mathrm{x}_k+Bu_k, \\ y_k=C\mathrm{x}_k, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $A\in\mathrm{R}^{n\times n}$， $B\in\mathrm{R}^{n\times 1}$， $C\in\mathrm{R}^{1\times n}$ 分别是状态矩阵，输入和输出向量， u_k， $y_k\in\mathrm{R}$ 和 $\mathrm{x}_k\in\mathrm{R}^n$ 分别代表了系统在时间 t_k 处的输入，输出和状态。设初值 $x_0=0$，对系统(1)进行 Z 变换，我们得到传递函数

$$H(z)=C(zI_n-A)^{-1}B \text{。}$$

如果 A 的所有特征值均在单位圆内，则称系统(1)是渐近稳定的。在以后的讨论中，我们始终假设(1)是渐近稳定且可控和可观的系统。

我们旨在构造渐近稳定且可控和可观的 SISO 降阶系统

$$\hat{\Sigma}:\begin{cases} \hat{\mathrm{x}}_{k+1}=\hat{A}\hat{\mathrm{x}}_k+\hat{B}u_k, \\ \hat{y}_k=\hat{C}\hat{\mathrm{x}}_k, \end{cases}$$

其中 $\hat{A}\in\mathrm{R}^{r\times r}$， $\hat{B}\in\mathrm{R}^{r\times 1}$， $\hat{C}\in\mathrm{R}^{1\times r}$ 且 $r\ll n$ 。

$H(z)$ 的 H_2 范数可以被定义为

$$\|H(z)\|_{H_2}^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{trace}\left(H^*\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)H\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right)\mathrm{d}\theta,$$

其中 $(\cdot)^*$ 代表共轭转置，$\mathrm{trace}(\cdot)$ 表示矩阵的迹。由于系统(1)是 SISO 系统，$\mathrm{trace}\left(H^*\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)H\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right)=\left|H\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right|^2$。在下面的推导中，因为要用到迹的性质，所以迹没有省略。系统的 H_2 范数也可以通过 Gram 矩阵表示为

$$\|H(z)\|_{H_2}^2=\mathrm{trace}\left(B^{\mathrm{T}}QB\right)=\mathrm{trace}\left(CPC^{\mathrm{T}}\right)=\mathrm{trace}(CRB),$$

其中 $P=\sum_{t=0}^{\infty}\left(A^tB\right)\left(A^tB\right)^{\mathrm{T}}$ 和 $Q=\sum_{t=0}^{\infty}\left(CA^t\right)^{\mathrm{T}}\left(CA^t\right)$ 分别代表系统(1)的可控和可观 Gram 矩阵，并且满足 Lyapunov 方程

$$APA^{\mathrm{T}}+BB^{\mathrm{T}}=P \text{ 和 } A^{\mathrm{T}}QA+C^{\mathrm{T}}C=Q$$

令 $R=\sum_{t=0}^{\infty}\left(A^tB\right)\left(CA^t\right)$ 代表系统(1)的交叉 Gram 矩阵。R 满足 Lyapunov 方程[14]

$$BC+ARA=R,$$

对于 SISO 系统， $R^2=PQ$ 成立。

构造误差系统

$$\{A_e,B_e,C_e\}=\left\{\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & \hat{A}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}B\\ \hat{B}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}C & -\hat{C}\end{bmatrix}\right\},$$

存在传递函数 $E(z)=H(z)-\hat{H}(z)$，假设误差系统的交叉 Gram 矩阵 R_e 存在分块形式 $R_e=\begin{bmatrix}R & X\\ Y & \hat{R}\end{bmatrix}$，并且满足 Sylvester 方程

$$B_eC_e+A_eR_eA_e=R_e \text{。}$$

根据矩阵的分块形式，上式可以改写为

$$\begin{bmatrix} B \\ \hat{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -\hat{C} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & X \\ Y & \hat{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & X \\ Y & \hat{R} \end{bmatrix}。 \tag{2}$$

从上面的等式可以得到

$$BC + ARA = R ,$$

$$AX\hat{A} - B\hat{C} = X , \tag{3}$$

$$\hat{B}C + \hat{A}YA = Y , \tag{4}$$

$$\hat{A}\hat{R}\hat{A} - \hat{B}\hat{C} = \hat{R} 。 \tag{5}$$

误差系统的 H_2 范数可由交叉 Gram 矩阵 R_e 表示为

$$\|E(z)\|_{H_2}^2 = \operatorname{trace}(C_e R_e B_e) = \operatorname{trace}\left(\begin{bmatrix} C & -\hat{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & X \\ Y & \hat{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ \hat{B} \end{bmatrix} \right) = \operatorname{trace}\left(CRB + CX\hat{B} - \hat{C}YB - \hat{C}\hat{R}\hat{B} \right),$$

由(4)和(3)， $\operatorname{trace}\left(CX\hat{B}\right)$ 可改写为

$$\operatorname{trace}\left(CX\hat{B}\right) = \operatorname{trace}\left(\left(Y - \hat{A}YA\right)X\right) = -\operatorname{trace}\left(B\hat{C}Y\right) = -\operatorname{trace}\left(\hat{C}YB\right)。$$

我们得到 $E(z)$ 的 H_2 范数

$$\|E(z)\|_{H_2}^2 = \operatorname{trace}\left(CRB + 2CX\hat{B} - \hat{C}\hat{R}\hat{B}\right) \tag{6}$$

$$= \operatorname{trace}\left(CRB - 2\hat{C}YB - \hat{C}\hat{R}\hat{B}\right)。 \tag{7}$$

我们已经得到了误差系统基于交叉 Gram 矩阵的 H_2 范数。在接下来的讨论中，我们将应用上述 H_2 范数的表达式，研究基于交叉 Gram 矩阵的一阶必要条件。

3. 基于交叉 Gram 矩阵的一阶必要条件条件

应用基于交叉 Gram 矩阵的 H_2 范数表达式，我们将研究 SISO 离散时间系统基于交叉 Gram 矩阵的一阶必要条件。由前面的假设可知，原始系统 Σ 和降阶系统 $\hat{\Sigma}$ 都是渐近稳定的时不变最小实现系统，则可以得到误差系统的 H_2 范数关于 $\hat{A}$， $\hat{B}$ 和 $\hat{C}$ 的梯度。首先给出实标量函数关于实矩阵变量的梯度定义。

定义 3.1 实标量函数 $f(X)$ 的梯度是一个实矩阵 $\nabla_X f(X) \in \mathrm{R}^{n\times p}$，被定义为[13]

$$\left[\nabla_X f(X)\right]_{i,j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X_{i,j}} f(X), i = 1,\cdots,n,\ j = 1,\cdots,p ,$$

其中 $X \in \mathrm{R}^{n\times p}$ 。 $f(X+\Delta)$ 可以表示为

$$f(X+\Delta) = f(X) + \langle \nabla_X f(X), \Delta \rangle + O\left(\|\Delta\|^2\right),$$

其中 $\langle \nabla_X f(X), \Delta \rangle = \operatorname{trace}\left(\left(\nabla_X f(X)\right)^{\mathrm{T}} \Delta\right)$。

应用上述定义以及 Lyapunov 方程，我们可以得到误差系统 H_2 范数关于降阶系统系数矩阵的梯度。

定理 3.2 令 $J\left(\hat{A},\hat{B},\hat{C}\right) = \|E(z)\|_{H_2}^2$， 则 $J\left(\hat{A},\hat{B},\hat{C}\right)$ 的梯度 $\nabla_{\hat{A}} J$， $\nabla_{\hat{B}} J$ 和 $\nabla_{\hat{C}} J$ 分别为

$$\nabla_{\hat{A}} J = 2\left(YAX + \hat{R}\hat{A}\hat{R}\right)^{\mathrm{T}}，\quad \nabla_{\hat{B}} J = 2\left(CX - \hat{C}\hat{R}\right)^{\mathrm{T}} \text{ 和 } \nabla_{\hat{C}} J = -2\left(\hat{R}\hat{B} + YB\right)^{\mathrm{T}},$$

其中 $\hat{R}$， X 和 Y 满足方程(3)~(5)。

证明： 首先计算 $\nabla_{\hat{A}} J$ 。将 $\hat{A}$ 扰动到 $\hat{A} + \Delta_{\hat{A}}$，相应地，$X, Y$ 和 $\hat{R}$ 分别被扰动为 $X + \Delta_X$，$Y + \Delta_Y$ 和 $\hat{R} + \Delta_{\hat{R}}$，

它们满足

$$\begin{bmatrix} B \\ \hat{B} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & -\hat{C} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \hat{A}+\Delta_{\hat{A}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R & X+\Delta_X \\ Y+\Delta_Y & \hat{R}+\Delta_{\hat{R}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \hat{A}+\Delta_{\hat{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & X+\Delta_X \\ Y+\Delta_Y & \hat{R}+\Delta_{\hat{R}} \end{bmatrix}。 \tag{8}$$

将(8)和(2)做比较，我们可以得到 Δ_X， Δ_Y 和 $\Delta_{\hat{R}}$ 满足方程

$$\hat{A}\Delta_Y A + \Delta_{\hat{A}} YA = \Delta_Y，$$

$$AX\Delta_{\hat{A}} + A\Delta_X \hat{A} = \Delta_X， \tag{9}$$

$$\hat{A}\hat{R}\Delta_{\hat{A}} + \hat{A}\Delta_{\hat{R}}\hat{A} + \Delta_{\hat{A}}\hat{R}\hat{A} = \Delta_{\hat{R}}。 \tag{10}$$

应用 $E(z)$ 的 H_2 范数表达式(6)，则关于 $\hat{A}$ 的一阶扰动 ΔJ 可以表示为

$$\begin{aligned}\Delta J &= J\left(\hat{A}+\Delta_{\hat{A}},\hat{B},\hat{C}\right) - J\left(\hat{A},\hat{B},\hat{C}\right) \\ &= \operatorname{trace}\left(CRB + 2C\left(X+\Delta_X\right)\hat{B} - \hat{C}\left(\hat{R}+\Delta_{\hat{R}}\right)\hat{B}\right) - \operatorname{trace}\left(CRB + 2CX\hat{B} - \hat{C}\hat{R}\hat{B}\right) \\ &= 2\operatorname{trace}\left(C\Delta_X\hat{B}\right) - \operatorname{trace}\left(\hat{C}\Delta_{\hat{R}}\hat{B}\right).\end{aligned}$$

应用(4)和(9)， $\operatorname{trace}\left(C\Delta_X\hat{B}\right)$ 可以表示为

$$\operatorname{trace}\left(C\Delta_X\hat{B}\right) = \operatorname{trace}\left(\Delta_X\left(Y-\hat{A}YA\right)\right) = \operatorname{trace}\left(Y\left(\Delta_X - A\Delta_X\hat{A}\right)\right) = \operatorname{trace}\left(YAX\Delta_{\hat{A}}\right)。$$

由(5)和(10)，我们得到

$$\operatorname{trace}\left(\hat{C}\Delta_{\hat{R}}\hat{B}\right) = \operatorname{trace}\left(\Delta_{\hat{R}}\hat{B}\hat{C}\right) = \operatorname{trace}\left(\Delta_{\hat{R}}\left(\hat{A}\hat{R}\hat{A}-\hat{R}\right)\right) = -\operatorname{trace}\left(\hat{R}\left(\Delta_{\hat{A}}\hat{R}\hat{A} + \hat{A}\hat{R}\Delta_{\hat{A}}\right)\right) = -2\operatorname{trace}\left(\hat{R}\hat{A}\hat{R}\Delta_{\hat{A}}\right)。$$

因此， $\Delta J = 2\operatorname{trace}\left(YAX\Delta_{\hat{A}} + \hat{R}\hat{A}\hat{R}\Delta_{\hat{A}}\right) = 2\operatorname{trace}\left(\left(YAX+\hat{R}\hat{A}\hat{R}\right)\Delta_{\hat{A}}\right) = 2\left\langle\left(YAX+\hat{R}\hat{A}\hat{R}\right)^{\mathrm{T}},\Delta_{\hat{A}}\right\rangle$，进一步，我们有

$$\nabla_{\hat{A}}J = 2\left(YAX+\hat{R}\hat{A}\hat{R}\right)^{\mathrm{T}}。$$

接下来我们通过扰动 $\hat{C}$ 到 $\hat{C}+\Delta_{\hat{C}}$ 计算 $\nabla_{\hat{C}}J$ 。相应地，X 和 $\hat{R}$ 将分别被扰动为 $X+\Delta_X$ 和 $\hat{R}+\Delta_{\hat{R}}$，并且它们满足

$$\begin{bmatrix} B \\ \hat{B} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & -\hat{C}-\Delta_{\hat{C}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R & X+\Delta_X \\ Y & \hat{R}+\Delta_{\hat{R}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & X+\Delta_X \\ Y & \hat{R}+\Delta_{\hat{R}} \end{bmatrix}。 \tag{11}$$

将(11)和(2)做比较，可以得到 $\Delta_{\hat{C}}$， Δ_X 和 $\Delta_{\hat{R}}$ 满足

$$A\Delta_X\hat{A} - B\Delta_{\hat{C}} = \Delta_X，$$

$$\hat{A}\Delta_{\hat{R}}\hat{A} - \hat{B}\Delta_{\hat{C}} = \Delta_{\hat{R}}。 \tag{12}$$

考虑 $E(z)$ 的 H_2 范数表达式(7)。关于 $\hat{C}$ 的一阶扰动 ΔJ 可以被表示为

$$\begin{aligned}\Delta J &= J\left(\hat{A},\hat{B},\hat{C}+\Delta_{\hat{C}}\right) - J\left(\hat{A},\hat{B},\hat{C}\right) \\ &= \operatorname{trace}\left(CRB - 2\left(\hat{C}+\Delta_{\hat{C}}\right)YB - \left(\hat{C}+\Delta_{\hat{C}}\right)\left(\hat{R}+\Delta_{\hat{R}}\right)\hat{B}\right) - \operatorname{trace}\left(CRB - 2\hat{C}YB - \hat{C}\hat{R}\hat{B}\right) \\ &= -\operatorname{trace}\left(\hat{C}\Delta_{\hat{R}}\hat{B} + \Delta_{\hat{C}}\hat{R}\hat{B} + 2\Delta_{\hat{C}}YB\right).\end{aligned}$$

由(5)和(12)，得到

$$\operatorname{trace}\left(\hat{C}\Delta_{\hat{R}}\hat{B}\right)=\operatorname{trace}\left(\Delta_{\hat{R}}\left(\hat{A}\hat{R}\hat{A}-\hat{R}\right)\right)=\operatorname{trace}\left(\hat{R}\left(\hat{A}\Delta_{\hat{R}}\hat{A}-\Delta_{\hat{R}}\right)\right)=\operatorname{trace}\left(\hat{R}\hat{B}\Delta_{\hat{C}}\right)。$$

因此

$$\begin{aligned}\Delta J&=-\operatorname{trace}\left(\hat{C}\Delta_{\hat{R}}\hat{B}+\Delta_{\hat{C}}\hat{R}\hat{B}+2\Delta_{\hat{C}}YB\right)=-\operatorname{trace}\left(\hat{R}\hat{B}\Delta_{\hat{C}}+\Delta_{\hat{C}}\hat{R}\hat{B}+2\Delta_{\hat{C}}YB\right)\\&=-2\operatorname{trace}\left(\left(\hat{R}\hat{B}+YB\right)\Delta_{\hat{C}}\right)=-2\left\langle\left(\hat{R}\hat{B}+YB\right)^{\mathrm{T}},\Delta_{\hat{C}}\right\rangle.\end{aligned}$$

进一步得到

$$\nabla_{\hat{C}}J=-2\left(\hat{R}\hat{B}+YB\right)^{\mathrm{T}}。$$

最后，类似于 $\nabla_{\hat{C}}J$ 的计算过程，J 关于 $\hat{B}$ 的梯度

$$\nabla_{\hat{B}}J=2\left(CX-\hat{C}\hat{R}\right)^{\mathrm{T}}$$

成立。综上所述，定理结论成立。证毕。

在定理 3.2 中，我们得到了误差系统 H_2 范数关于 $\hat{A}$，$\hat{B}$ 和 $\hat{C}$ 的梯度。在接下来的讨论中，我们将研究基于交叉 Gram 矩阵的一阶必要条件，以及构造相应的降阶系统。

定理 3.3 设在 J 的每一个稳定点处 $\hat{R}$ 可逆，则

$$\hat{A}=W^{\mathrm{T}}AV，\quad \hat{B}=W^{\mathrm{T}}B \text{ 和 } \hat{C}=CV，$$

其中 $W^{\mathrm{T}}=-\hat{R}^{-1}Y$，$V=X\hat{R}^{-1}$ 且 $W^{\mathrm{T}}V=I_r$。X，Y 和 $\hat{R}$ 满足 Sylvester 方程(3)~(5)。

证明： 因为 J 在稳定点处关于 $\hat{A}$，$\hat{B}$ 和 $\hat{C}$ 的梯度为零，所以

$$\nabla_{\hat{A}}J=2\left(YAX+\hat{R}\hat{A}\hat{R}\right)^{\mathrm{T}}=0，\quad \nabla_{\hat{C}}J=-2\left(YB+\hat{R}\hat{B}\right)^{\mathrm{T}}=0 \text{ 和 } \nabla_{\hat{B}}J=2\left(CX-\hat{C}\hat{R}\right)^{\mathrm{T}}=0$$

成立。由于 $\hat{R}$ 可逆，有

$$\hat{A}=-\hat{R}^{-1}YAX\hat{R}^{-1}，\quad \hat{B}=-\hat{R}^{-1}YB \text{ 和 } \hat{C}=CX\hat{R}^{-1}。$$

于是，我们定义 $W^{\mathrm{T}}=-\hat{R}^{-1}Y$，$V=X\hat{R}^{-1}$。下证，$W^{\mathrm{T}}V=I_r$ 成立。

在(4)的左右两边同时右乘 X，得到

$$\hat{B}CX+\hat{A}YAX=YX。\tag{13}$$

由于 $CX=\hat{C}\hat{R}$，$YAX=-\hat{R}\hat{A}\hat{R}$，(13)可以被改写为

$$\hat{B}\hat{C}\hat{R}-\hat{A}\hat{R}\hat{A}\hat{R}=YX。\tag{14}$$

在(14)的左右两边同时右乘 $\hat{R}^{-1}$，得到

$$\hat{B}\hat{C}-\hat{A}\hat{R}\hat{A}=YX\hat{R}^{-1}。\tag{15}$$

将(15)与(5)做比较，得到 $YX\hat{R}^{-1}=-\hat{R}$。进一步，$\hat{R}^2+YX=0$，则

$$W^{\mathrm{T}}V=-\hat{R}^{-1}YX\hat{R}^{-1}=I_r$$

成立。综上所述，定理结论成立。证毕。

定理 3.3 的结论表明了 $\hat{A}$，$\hat{B}$ 和 $\hat{C}$ 是关于 $\hat{R}$，X 和 Y 的函数，即

$$\left\{\hat{A},\hat{B},\hat{C}\right\}=\left\{-\hat{R}^{-1}YAX\hat{R}^{-1},-\hat{R}^{-1}YB,CX\hat{R}^{-1}\right\}，$$

其中 $\hat{R}$，X 和 Y 可以通过 Sylvester 矩阵方程(3)~(5)得到。这为求解渐近稳定的 SISO 离散时间系统的降

阶系统提供了方法。

4. 结论

针对渐近稳定的 SISO 离散时间系统，本文提出了基于交叉 Gram 矩阵的 H_2 最优模型降阶方法。首先，我们推导了基于误差系统交叉 Gram 矩阵的 H_2 范数；然后，研究了误差系统的 H_2 范数关于降阶系统系数矩阵的一阶扰动；最后，根据一阶扰动的表达式，得到了误差系统的 H_2 范数关于降阶系统系数矩阵的梯度，以及基于交叉 Gram 矩阵的一阶必要条件。降阶系统可由一阶必要条件构造。在求解降阶系统的过程中，我们用到了交叉 Gram 矩阵，这也为求解渐近稳定的 SISO 离散时间系统的降阶系统提供了方法。

参考文献

[1] 蒋耀林. 模型降阶方法[M]. 北京: 科学出版社, 2010.

[2] Wang, X.L. and Jiang, Y.L. (2016) Model Reduction of Discrete-Time Bilinear Systems by a Laguerre Expansion Technique. *Applied Mathematical Modeling*, **40**, 6650-6662. https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.02.015

[3] Moore, B. (1981) Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability, and Model Reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **26**, 17-32. https://doi.org/10.1109/TAC.1981.1102568

[4] Wang, D. and Zilouchian, A. (2000) Model Reduction of Discrete Linear Systems via Frequency-Domain Balanced Structure. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*: *Fundamental Theory and Applications*, **47**, 830-837. https://doi.org/10.1109/81.852936

[5] Jaimoukha, I.M. and Kasenally, E.M. (1997) Implicitly Restarted Krylov Subspace Methods for Stable Partial Realizations. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **18**, 633-652. https://doi.org/10.1137/S0895479895279873

[6] Willcox, K. and Peraire, J. (2002) Balanced Model Reduction via the Proper Orthogonal Decomposition. *AIAA Journal*, **40**, 2323-2330. https://doi.org/10.2514/2.1570

[7] Zhang, L.Q., Lam, J., Huang, B. and Yang, G.H. (2003) On Gramians and Balanced Truncation of Discrete-Time Bilinear Systems. *International Journal of Control*, **76**, 414-427. https://doi.org/10.1080/0020717031000082540

[8] Jazlan, A., Sreeram, V., Shaker, H.R. and Togneri, R. (2016) Frequency Interval Balanced Truncation of Discrete Time Bilinear Systems. *Cogent Engineering*, **3**, Article ID: 1203082. https://doi.org/10.1080/23311916.2016.1203082

[9] Birouche, A., Mourllion, B. and Basset, M. (2012) Model Order Reduction for Discrete-Time Switched Linear Systems. *International Journal of Systems Science*, **43**, 1753-1763. https://doi.org/10.1080/00207721.2011.554911

[10] Wilson, D. (1970) Optimum Solution of Model-Reduction Problem. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, **117**, 1161-1165. https://doi.org/10.1049/piee.1970.0227

[11] Hyland, D.C. and Bernstein, D.S. (1985) The Optimal Projection Equations for Model Reduction and the Relationship among the Methods of Wilson, Skelton and Moore. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **30**, 1201-1211. https://doi.org/10.1109/TAC.1985.1103865

[12] Bunse-Gerstner, A., Kubalińska, D., Vossen, G. and Wilczek, D. (2010) H_2-Norm Optimal Model Reduction for Large Scale Discrete Dynamical MIMO Systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **233**, 1202-1216. https://doi.org/10.1016/j.cam.2008.12.029

[13] Van Dooren, P., Gallivan, K.A. and Absil, P.A. (2008) H_2-Optimal Model Reduction of MIMO Systems. *Applied Mathematics Letters*, **21**, 1267-1273. https://doi.org/10.1016/j.aml.2007.09.015

[14] Fernando, K.V. and Nicholson, H. (1984) On a Fundamental Property of the Cross-Gramian Matrix. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, **31**, 504-505. https://doi.org/10.1109/TCS.1984.1085524

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org