

# Solving the Boundary Equation of 3D Projection with Mathematica

Yue Kang

Faculty of science, China University of Petroleum, Qingdao Shandong  
Email: 17866626334@163.com

Received: Apr. 4<sup>th</sup>, 2018; accepted: Apr. 16<sup>th</sup>, 2018; published: Apr. 24<sup>th</sup>, 2018

---

## Abstract

In the case of a given surface equation, we need to obtain the equation of the boundary line of the projection of multiple surfaces in three coordinate planes. We can use Mathematica to draw space graphics to visualize the problem. Through the Mathematica software function of visualization technology and choice of options, we can obtain the ideal space graph, easy to solve the boundary equation problem and solve other related projection problems, such as the simplification of the integral solution process.

## Keywords

Mathematica Software, Function Visualization, Projection Boundaries, Space Graphics

---

# 用Mathematica软件求解三维图形投影的边界线方程

康 玥

中国石油大学(华东)理学院, 山东 青岛  
Email: 17866626334@163.com

收稿日期: 2018年4月4日; 录用日期: 2018年4月16日; 发布日期: 2018年4月24日

---

## 摘 要

在给定多个曲面方程的情况下, 要得到多个曲面围成的空间在3个坐标平面上的投影的图形边界线方程, 可利用Mathematica软件绘制空间图形来使问题形象化和直观化, 通过Mathematica软件的函数可视化

技术和对可选项的选择,可以得到比较理想的空间图形,便于解决获取的边界线方程问题以及解决其他有关投影问题,比如对积分求解过程的简化。

## 关键词

Mathematica软件, 函数可视化, 投影边界, 空间图形

Copyright © 2018 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

在空间图形的学习和运用中,常常需要用到数形结合的方法来解决问题,对一些常见的函数或者简单的函数,形成的空间图形比较容易想象,解决问题要容易,但是对于一些复杂函数,比如高阶多元函数,隐函数等形成的空间图形是抽象的,在解决空间问题时会有有一定的困难。许多空间图形的绘制靠人工一般难以完成,也难以想象,特征不易观察,图形的绘制需要借助现代计算机技术以及专业软件,而 Mathematica 软件所具备的绘图功能能够绘制各种二维平面图形与全方位的三维立体彩色图形,自动化程度很高。通过 Mathematica 软件绘制图形可以帮助学生对复杂函数图形进行想象,并且图形与图像也是多元函数微积分中最重要的直观手段。利用 Mathematica 软件绘制函数图形可以简化对三维立体图形相关问题的求解。

## 2. Mathematica 绘制空间图形的基本方法

Mathematica 软件中绘制空间曲面的基本函数为 Plot3D,命令 Plot3D 主要用于绘制二元函数  $z = f(x, y)$  的图形,该命令的基本格式为 Plot3D [f[x, y], {x, x1, x2}, {y, y1, y2}, 选项]。其中 f[x, y] 是 x, y 的二元函数, x1, x2 表示 x 的作图范围, y1, y2 表示 y 的作图范围。Plot3D 有许多选项,其中常用的如 PlotPoints 和 ViewPoint。PlotPoints 的默认值为 15,可以增加一些点以使曲面更加精致。选项 ViewPoint 用于选择图形的视点,默认值为 ViewPoint -> {1.3, -2.4, 2.0}。

此外利用参数方程做空间曲面或曲线的基本函数为 ParametricPlot3D。用于作曲面时,该命令的基本格式为 ParametricPlot3D [{x[u, v], y[u, v], z[u, v]}, {u, u1, u2}, {v, v1, v2}, 选项],其中 x[u, v], y[u, v], z[u, v] 是曲面的参数方程表达式, u1, u2 是作图时参数 u 的范围, v1, v2 是参数 v 的范围[1]。图 1 和图 2 为采用 Mathematica 软件绘制的图形。

## 3. 曲面方程的参数化

对于单个曲面,若曲面方程是  $z = f(x, y)$  显函数的形式,可以很直接使用函数 Plot3D 绘制曲面方程,由于 Plot3D 给出的图形的定义区域都是方形的,当函数的定义域为圆域时,Plot3D 并不好用。另外,一些常见的二次曲面,如球面、椭球面、锥面等的隐函数形式,可采用参数函数图形绘制法来表达。

如绘制图形时涉及多个曲面,对于只有两个曲面形式均为  $z = f(x, y)$  而言。首先求出两个曲面的交线方程,通过消元确定交线在一个坐标面的投影方程。对于混合形式,例如,画出由下列曲面所围成的空间及其在三个坐标平面上的投影的图形,并写出投影的边界线的方程。不同于只有两个曲面的形式,需

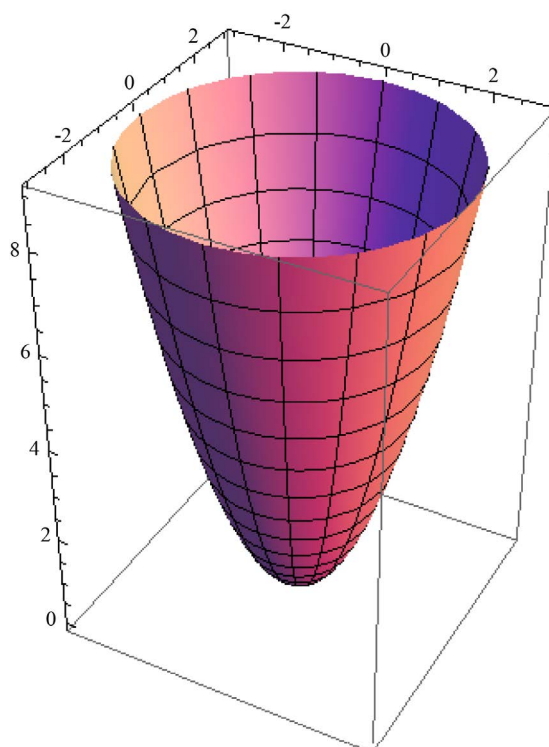


Figure 1. Paraboloid of revolution

图 1. 旋转抛物面

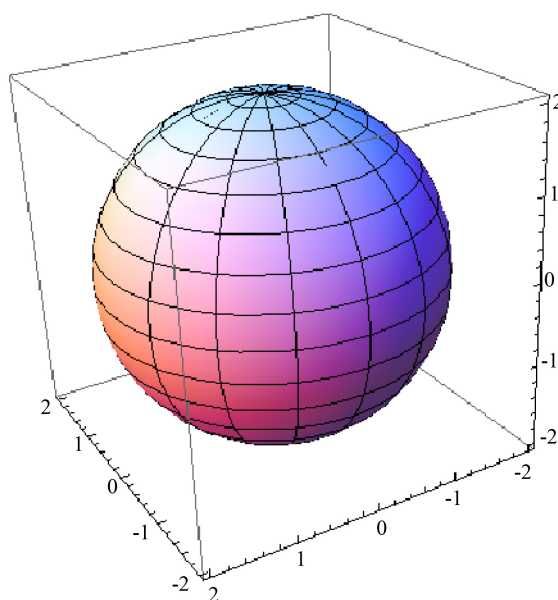


Figure 2. Sphere

图 2. 球面

要同时做出四个曲面，通过 `RegionPlot3D` 确定所围成的区域，其基本用法为 `RegionPlot3D [pred, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}, {z, zmin, zmax}]`，绘制一个满足 `pred` 是 `true` 的三维区域的图形，`pred` 为任意不等式的逻辑组合。区域边界使用简单的样式，程序如下：

`RegionPlot3D [xyz < 1, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5}, PlotStyle → Directive [Yellow, Opacity [0.5]], Mesh → None]`。

结果如图 3 所示[2]。

## 4. 确定投影方程

### 4.1. 演示空间曲面及其投影的生成过程

通过 Mathematica 软件可以形象生动的展示函数方程对应的曲面和多个曲面围成的三维图形及其投影，此外，还能帮助学生用直观的方式理解对投影的边界线的方程的求解。例如，画出由下列曲面所围成的空间及其在三个坐标平面上的投影的图形。

先用 Mathematica 软件画出给定曲线方程确定的曲面。确定曲面所围成的区域，即围成的三维立体图形。做出该立体图形在三个面上的投影，由投影区域确定投影的边界线方程。结果见图 4，相应 Mathematica 程序如下：

```

qumian = ParametricPlot3D[{{u, u, v}, {u, u^2, v}, {u, v, 1/4 (u^2 + v^2)}, {u, v, 1/2 (u^2
+ v^2)}}, {u, 0, 1}, {v, 0, 1}, ViewPoint → {4, 1.7, 1.5}]
lititu = RegionPlot3D[(x^2 + y^2) < 4z && 1/2 (x^2 + y^2) > z && y - x < 0 && y - x^2
> 0, {x, 0, 1}, {y, 0, 1}, {z, 0, 1}, PlotPoints → 100, PlotRange → All, ViewPoint → {4, 1.7, 1.5}]
touying = lititu /. Graphics3D[gr_, opts_]
⇒ Graphics3D[{gr, Scale[gr, #, {0, 0, 0}]&/@(1 + 10^-3
- IdentityMatrix[3])}], PlotRange → All, opts]

```

### 4.2. 确定投影边界线方程并积分

通过 Mathematica 软件画出的立体图形及投影，如图 4 中右起第一个图所示，从上面看起，以顺时针转动的方向对应的方程依次为，求出两两曲面的交线，立体图形投影在三个坐标面上，对应的投影方程

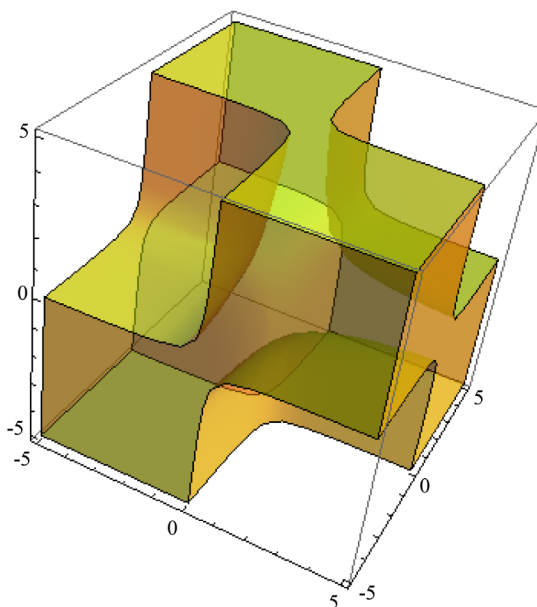


Figure 3. Region border diagram  
图 3. 区域边界图

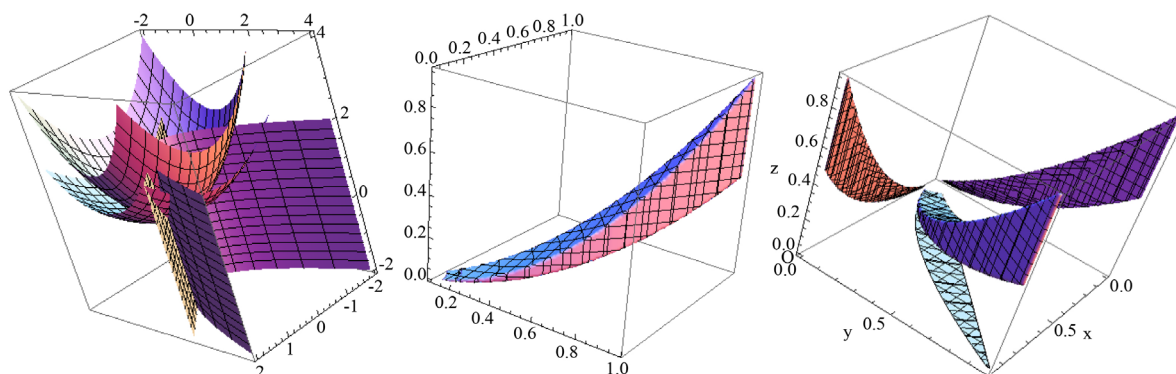


Figure 4. Three-dimensional projection drawing process

图 4. 三维立体投影图绘制过程

$$\text{XOY 面: } y = x, y = x^2;$$

$$\text{XOZ 面: } z = \frac{1}{4}x^2, x = 0, z = \frac{1}{2}x^2;$$

$$\text{YOZ 面: } z = \frac{1}{4}y^2, y = 0, z = \frac{1}{2}y^2.$$

在投影图形边界对应方程及其边界范围已知的情况下, 计算投影面积时, 可以将二重积分的计算用二次定积分来完成, 相比 Green 函数法直接计算二重积分要更加简便直观。即

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy \\ &= \int_a^b dx \int_{y1(x)}^{y2(x)} f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_{x1(y)}^{x2(y)} f(x, y) dx \end{aligned}$$

## 5. 总结

通过 Mathematica 做图命令中设置的可选项, 可以做出较为理想的空间图形, 如使用 PlotPoints 可以改变绘图的精度。为了展示更好的观看角度, 可以给定 ViewPoint 的值。

使用 Axes 可以确定绘图时坐标轴的绘制方式, 默认 Axes 为 true。如果由多个曲面围成的空间图形有内外之分, 为了能看到内层的曲面, 可以通过设置选线将外面的曲面绘制成线框图, 里面的曲面绘制成无线框的填充面图[3]。Mathematica 软件可以根据所给函数方程和可选项快速地、准确地实现二维和三维的可视化, 使得一些难以想象的空间图形变得直观, 便于学生对空间几何的理解, 也为解决空间问题提供了极大的帮助。

## 致 谢

赵春娥老师在空间几何方面具有丰富的编程经验, 对我的编程工作给予了很多的指导和帮助, 使我能够将数形结合的思想运用到实际解题中。另外, 她对待问题的严谨作风也给我留下了深刻的印象。在此表示深深的谢意。

## 参考文献

- [1] 丁大正. 科学计算强档 Mathematica 4 教程[M]. 北京: 电子工业出版社, 2002.
- [2] [美] D.尤金. Mathematica 使用指南[M]. 邓建松, 彭冉冉, 译. 北京: 科学出版社, 2002.
- [3] 王高峡. 用 Mathematica 软件绘制空间图形的方法和技巧[J]. 重庆工学院学报(自然科学版), 2007, 21(7): 17-20.

**知网检索的两种方式：**

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：[aam@hanspub.org](mailto:aam@hanspub.org)