Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(4), 369-373
Published Online April 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.74046

2-Arc-Regular Graphs of Square-Free Order and Prime Valency

Menglin Ding

School of Statistic and Mathematic, Yunnan University of Finance and Economic, Kunming Yunnan
Email: m18505444588@163.com

Received: Apr. 8th, 2018; accepted: Apr. 20th, 2018; published: Apr. 27th, 2018

Abstract

A graph Γ is called (X,s)-arc regular, if $X \le Aut\Gamma$ is regular on s-arc set. Feng's paper [1] determined all one-regular graphs of square-free order and prime valent are Cayley graphs. Quite a lot of works with small valency are known, see [2] [3] [4]. We determined all 2-arc-regular graphs of square-free order and prime valency, where the degree $t \equiv 3(\mathrm{mod}4)$.

Keywords

Automorphism Group, Arc-Regular Graph, Cayley Graph

平方自由阶素数度2-弧正则图

丁梦琳

云南财经大学统计与数学学院，云南 昆明
Email: m18505444588@163.com

收稿日期：2018年4月8日；录用日期：2018年4月20日；发布日期：2018年4月27日

摘 要

称一个图为s-弧正则图，如果图的全自同构群在图的s弧集上是正则的。Feng等在[1]中证明了素数度的1-弧正则图都是Cayley图，随后出现一些小度数图的研究，见[2] [3] [4]。本文即确定了平方自由阶素数度的2-弧正则图，其中度数t满足$t \equiv 3(\mathrm{mod}4)$。

文章引用: 丁梦琳. 平方自由阶素数度 2-弧正则图[J]. 应用数学进展, 2018, 7(4): 369-373.
DOI: 10.12677/aam.2018.74046

关键词

自同构群，弧正则图，凯莱图

1. 引言

一个图与其全自同构群密切相关，全自同构群是图论中的一个基本且重要的研究对象，一个图的全自同构群越大，图的对称性越好，故寻找一个图的自同构群便成为研究图的首要却也十分困难的任务。正则图是一类简单图，图的许多性质都是从正则图的研究开始的，比如正则图的连通性，对称性，所以研究正则图的性质成为图论的一个活动领域。本文便完全确定了平方自由阶的素数度 2-弧正则图，其中度 $t\equiv 3(\bmod 4)$。

本文所得主要结果如下：

定理 1.1. 设Γ为 $2n$ 阶 t 度的 2-弧正则图，其中 n 为平方自由的且至少包含三个素因子，t 素数，且 $t\equiv 3(\bmod 4)$，则 $t=3$，且Γ满足：

$$Aut\Gamma = PSL(2,q)，\ (Aut\Gamma)_\alpha = S_3，\ 其中\ q\equiv \pm 3(\bmod 8)，\ n=\frac{q(q+1)(q-1)}{24}.$$

2. 预备引理

为了证明以上定理，我们给出几个重要的结果。

首先是含有二面体 Sylow 2-子群的有限群，参见[[5]，引理 2.4]。

引理 2.1. 设 G 为一个含二面体 Sylow 2-子群的有限群，M 是 G 的最大奇数阶正规子群，则 G/M 同构于下列群之一：

1) (二面体) 2-子群；

2) A_4 或 A_7；

3) $Aut(PSL(2,q))$ 的包含 $PSL(2,q)$ 的子群，其中 $q\geq 5$ 为奇素数幂。

下面给出关于局部本原图的一个性质。参见[[6]，定理 4]。

引理 2.2. 设 $\Gamma=(V,E)$ 为平方自由阶 k 度，$k\geq 3$ 的 G-局部本原联通图。假设 G 在 $V\Gamma$ 上传递且Γ不是完全二部图，则下述之一成立：

1) $G=D_{2n}:Z_k$，$2nk$ 为平方自由的，k 为 nk 的最小素因子，Γ为二面体 D_{2n} 上的 Cayley 图；

2) $G=M:X$，其中 M 为平方自由阶的，X 为几乎单群且 $soc(X)=T$;

a) $soc(G)=M_{11},M_{12},M_{22},M_{23},M_{24},J_1$；

b) $G=A_n$ 或者 S_n，其中 $n<3k$；

c) $G=PSL(2,p)$ 或 $G=PGL(2,p)$；

d) $soc(G)=PSL(2,p^f)$，$f\geq 2$，且 $p^f>9$，或者 $k\mid p^{f-1}$ 或者 $f=2$，$k\mid p+1$；

e) G 为 Lie 型单群 $GF(p^f)$，$p\leq k$，或者 $\left[\frac{d}{2}\right]f<k$，$G$ 为 d 维典型群，$d\geq 3$。或者 $2f<k$，

$soc(G)=G_2(p^f),D_4(p^f),F_4(p^f),E_6(p^f),E_7(p^f)$。且 $MT=M\times T$ 有至多两个轨道并且Γ为 *T*-边传递图，特别地，如 $T=PSL(2,p)$，则 M,T_α,k 满足[[6]，表 3]。

下面给出平方自由阶弧传递 3 度图的一个引理，参见[7]。

引理 2.3. 设 *G* 为 2*n* 阶弧传递 3 度图，其中 *n* 为平方自由的且至少包含三个素因子，则下述之一成立：

1) $Aut(\Gamma)$ 可解，且 $Aut(\Gamma)\cong D_{2n}:Z_3$；

2) $Aut(\Gamma)=PSL(2,p)$，其中 $p\ge 19$ 为一素数。

下面的定理稍微改进了 Praeger，参见[[8]，定理 4.1]的一个著名结果，见[9]。

命题 2.1. 设Γ为素数度 (X,s)-弧正则图，且假设 $N\lhd X\le Aut\Gamma$ 在 *V*Γ上至少有 3 个轨道，则下述之一成立：

1) *N* 在 *V*Γ半正则，$X/N\le Aut(\Gamma_N)$ 为 $(X/N,s)$-弧正则图，且Γ为 Γ_N 的一个正规 *N*-覆盖；

2) $X_\alpha\cong(X/N)_\delta$，其中 $\alpha\in V\Gamma$，$\delta\in V\Gamma_M$；

3) 如果 *X* 有一正规子群 $M\subset N$，则 Γ_M 为 $(X/M,s)$-弧正则，且是 Γ_N 的一个正规 *N/M*-覆盖。

群 $PSL(2,q)$ 的极大子群是知道的，下面我们给出一个引理，参见[10]。

引理 2.4. 设 $G=PSL(2,q)$，$q=p^n\ge 5$，*p* 为素数，则 *G* 的极大子群同构于下列群之一：

1) $D_{\frac{2(q-1)}{d}}$，其中 $d=(2,q-1)$，且 $q\ne 5,7,9,11$；

2) $D_{\frac{2(q+1)}{d}}$，其中 $d=(2,q-1)$，且 $q\ne 7,9$；

3) $\mathbb{Z}_q\rtimes\mathbb{Z}_{\frac{q-1}{d}}$；

4) A_4，其中 $q=p=5$，或 $q=p=3,13,27,37(\mathrm{mod}\,40)$；

5) S_4，其中 $q\equiv\pm1(\mathrm{mod}\,8)$；

6) A_5，其中 $q\equiv\pm1(\mathrm{mod}\,10)$；

7) $PSL(2,p^m)$，n/m 为奇素数；

8) $PSL\left(2,p^{\frac{n}{2}}\right)$，*n* 为偶数。

接下来我们给出 $PSL(2,q)$ 极大子群[10]的一个推论。

推论 2.1. 设 $H\cong Z_t:Z_{t-1}$ 为 $PSL(2,q)$ 的子群，其中 $q\ge 5$，*t* 都是奇素数。则 $t=3$。

证明：因为 *q* 为奇素数，$d=(2,q-1)=2$，*H* 包含在 $PSL(2,q)$ 的极大子群里，我们逐一验证引理 2.4 的可能的情况。(1)~(3)由阶数算是不可能的，排除。(7)和(8)中，因为 *q* 为奇素数，没有 *p* 值使之存在，排除。(4)和(5)中，*H* 为 $Z_3:Z_2$ 满足。(6)中，A_5 中没有 20 阶的子群，排除。综上，*H* 只可能为 $Z_3:Z_2$，我们得到 $t=3$。

通过 Magma [8]，我们可以检验一个图是否为 3 度 2-弧正则图。我们给出一个 2-弧正则图关于 $PSL(2,19)$ 的例子。

例子 2.1. 设 $G=PSL(2,19)$ 为作用在 20 个点上的置换群。设：

a = (1, 3)(2, 13)(4, 5)(6, 10)(7, 12)(8, 19)(9, 14)(11, 15)(16, 17)(18, 20)；

b = (1, 16, 4)(3, 5, 17)(6, 20, 7)(8, 15, 9)(10, 12, 18)(11, 19, 14)；

c = (1, 18)(2, 8)(3, 20)(4, 16)(5, 17)(6, 11)(7, 9)(10, 15)(12, 14)(13, 19)；

证明：设 $H=\langle a,b\rangle$，则 $H\cong S_3$，$\langle H,c\rangle=G$ 且 $\left|H:H\cap H^c\right|=3$，因此 $\mathrm{Cos}(G,H,HcH)$ 是 $(G,2)$-弧正则 3 度图。而且这个图是在同构意义下的自同构群为 $PSL(2,19)$ 的 2-弧正则 3 度图。

接下来给出一个 2-弧正则图关于 $PSL(2,29)$ 的例子。

例子 2.2. 设 $G=PSL(2,29)$ 为作用在 30 个点上的置换群。设

$e = (3, 16)(4, 20)(5, 26)(6, 9)(7, 28)(8, 14)(10, 18)(11, 12)(13, 29)(15, 23)(17, 30)(19, 25)(21, 22)(24, 27)$；

$f = (1, 14, 8)(2, 7, 28)(3, 27, 10)(4, 9, 13)(5, 12, 21)(6, 20, 29)(11, 26, 22)(15, 30, 19)(16, 18, 24)(17, 23, 25)$；

$g_1 = (1, 2)(3, 25)(4, 7)(5, 29)(6, 15)(8, 17)(9, 23)(10, 27)(13, 26)(14, 30)(16, 19)(18, 24)(20, 28)(21, 22)$；

$g_2 = (1, 2)(4, 21)(5, 11)(6, 25)(7, 23)(8, 14)(9, 19)(10, 30)(12, 26)(13, 24)(15, 28)(17, 18)(20, 22)(27, 29)$。

证明： 设 $H=\langle e,f\rangle$ 用 Magma 计算可知：$H\cong S_3$，$\langle H,g_1\rangle=\langle H,g_2\rangle=G.$

$\left|H:H\cap H^{g_1}\right|=\left|H:H\cap H^{g_2}\right|=3$，因此 $\mathrm{Cos}(G,H,Hg_1H)$ 和 $\mathrm{Cos}(G,H,Hg_2H)$ 是 $(G,2)$-弧正则 3 度图。更多的，这两个图是同构意义下，以 $PSL(2,29)$ 作为全自同构群的唯一的两个不同构的 2-弧正则 3 度图。

3. 定理证明

设Γ为 $2n$ 阶素数度 t 度的 2-弧正则图，其中 $n=p_1p_2\cdots p_s$，$s\ge 3$，p_i，$1\le i\le s$ 为不同的素数。设 $\alpha\in V\Gamma$，$A=Aut\Gamma$ 表示图Γ的全自同构群。

定理 3.1. 假设 A 可解，则图Γ不存在。

证明： 如果图Γ存在，首先假设Γ是完全二部图，则 $\Gamma=K_{t,t}$，当 $t\ge 5$ 时，$Aut\Gamma\cong(S_t\times S_t):Z_2$ 是不可解的，与 A 可解矛盾。当 $t=3$ 时，$Aut\Gamma\cong(S_3\times S_3):Z_2$ 且Γ是 3 度图，此时 $|V\Gamma|=6$，$|A|=|A_\alpha|\times|V\Gamma|$，则 $|A_\alpha|=12$，而 3 度 2-弧正则图的点稳定子群阶为 6，矛盾。

假设Γ不是完全二部图，因为素数度的图一定是局部本原图，所以Γ满足引理 2.2，又因为 A 是可解的，所以Γ满足引理 2.2 (1)，于是 $A=D_{2n}:Z_k$，$|A|=2nt$，则 $|A_\alpha|=t$ 与图Γ为 2-弧正则图矛盾。综上，图Γ不存在，定理得证。

下面我们给出**定理 1.1** 的证明。

定理 3.2. 设 $t\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$，$A$ 不可解，则图Γ满足定理 3.1。

证明： 因为Γ为 t 度的 2-弧正则图，所以 $|A|=2nt(t-1)$，$t\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$，设 A 的 Sylow 2-子群 A_2，则 $A_2\cong Z_4$ 或 Z_2^2。

如果 $A_2\cong Z_4$ 为循环群，因为 Sylow 2-子群是循环群的有限群都是可解的，所以推出矛盾。于是 $A_2\cong Z_2^2$，A 满足引理 2.1。设 M 为 A 的最大的奇数阶正规子群，逐一分析 A/M 的可能性，如果 A/M 为可解的，则由 M 为可解群，可推出 A 可解，矛盾。于是 $A/M\cong A_7$ 或满足引理 2.1 (3)。如果 $A/M\cong A_7$，则 $|A/M|_2=8$，这与 $|A/M|_2=4$ 矛盾。所以 $PSL(2,q)\le A/M\le Aut(PSL(2,q))=PGL(2,q)\cdot Z_f=PSL(2,q)\cdot Z_2\cdot Z_f$，其中 $q=p^f$，p 为素数。

断言：$A=M\cdot PSL(2,q)$ 且 $f=1$。

假设 $A/M\ne PSL(2,q)$，因为 $|PSL(2,q)|_2=4=|A|_2$，所以 $A/M\ne PSL(2,q)$ $Z_2=PGL(2,q)$，所以 $f>2$ 且 f 不是 2 的方幂。因为Γ为 2-弧正则图，由引理 3.1 中类似的分析，可知Γ不是完全二部图。由假设，A 不可解，所以Γ满足引理 2.2 (2)部分。

于是可以设 $A=N:X$，N 是平方自由阶的，X 为几乎单群，$soc(X)=T$。

考虑到 $PSL(2,q)\le A/M\le Aut(PSL(2,q))$，可推出 $M=N$ 且 $T=PSL(2,q)$。下面逐一验证引理 2.2 (2)(i)-(v)。

因为 $T=PSL(2,q)$，所以(i)和(ii)直接可排除；假设满足(iii)，则 $M=1$ 且 $A=A/M=PSL(2,q)$ 或 $A=A/M=PGL(2,q)$，均与假设矛盾。假设满足(iv)，则 $T=PSL(2,p^f)$，$f\ge 2$ 且 $p^f>9$，$t\mid p^{f-1}$。因为 $f>2$，所以 $p^2\mid |A|=2nt(t-1)$，如果 $t=p$，则 $p\mid n$ 且 $f=2$，矛盾。如果 $t\ne p$，则 $p^2\mid(t-1)$ 或 $p\mid n$，且 $p\mid t-1$，总之，$p\mid t-1$，所以 $(p,t)=1$，这与 $p\mid p^{f-1}$ 矛盾。$f=2$ 与假设矛盾。假设满足(iv)，如果 A 为 d 维典型群，此时 $d\ge 3$，矛盾。如果 $soc(A)=G_2(p^f),D_4(p^f),F_4(p^f),E_6(p^f),E_7(p^f)$，则与

$T=PSL(2,q)$ 矛盾。

于是断言成立。

假设 M 在 $V\Gamma$ 上传递，则 $\left|\alpha^M\right|=|V\Gamma|=|M:M_\alpha|=2n$ 为偶数，这与 $|M|$ 是奇数矛盾。

假设 M 在 $V\Gamma$ 上有两个轨道，记为 Δ_1，Δ_2，设 $A^+=A_{\Delta_1}=A_{\Delta_2}$，由[9]，之所以 $A_{\Delta_1}=A_{\Delta_2}$，是因为 $A_{\Delta_1}=\left\{g\in A\,|\,\Delta_1^g=\Delta_1\right\}$，$A_{\Delta_2}=\left\{m\in A\,|\,\Delta_2^g=\Delta_2\right\}$，下证 $\Delta_2^g=\Delta_2$，因为 Δ_1，Δ_2 为 block，故如果不成立，则满足 $\Delta_2^g=\Delta_1,\Delta_1^{g^{-1}}=\Delta_2$。

($\left(\Delta_1^g\right)^{g^{-1}}=\Delta_2=\Delta_1$，矛盾。)而且，因为 A 在 $V\Gamma$ 上传递，所以 $\left|A:A^+\right|=2$。由 Frattini 论断，$A^+=MA_\alpha{}^+=MA_\alpha$，则 $A^+/M=MA_\alpha/M\cong A_\alpha/A_\alpha\cap M$ 为可解的，且 M 可解，故 A^+ 可解。又因为 $\left|A:A^+\right|=2$，$A^+\lhd A$，故 A 可解。矛盾。

假设 M 在 $V\Gamma$ 上至少有三个轨道，由命题 2.1，由 M 诱导的正规商图 Γ_M 为 $(A/M,2)$-弧正则图，其中 $|V\Gamma_M|=\dfrac{2n}{|M|}$ 为平方自由的，$val(\Gamma_M)=val(\Gamma)=t$。设 $\alpha\in V\Gamma$，$\delta\in V\Gamma_M$，$\overline{A}=A/M$，则 $A_\alpha\cong\overline{A}_\alpha\cong\mathbb{Z}_t:\mathbb{Z}_{t-1}$。设 $\overline{A_\sigma}\le Y$，Y 为 $PSL(2,q)$ 的极大子群，由断言，我们知道 q 为奇素数，所以由推论得 $t=3$。最后，因为 A 不可解且 $|A|_2=4$，由引理 2.3，我们得到 $(A,A_\alpha)=\left(PSL(2,q),S_3\right)$，且 $q\ge19$ 为奇素数。因为 $|A:A_\alpha|=\dfrac{q(q-1)(q+1)}{24}=2n$，其中 n 是平方自由的奇素数，所以 $8\,|\,q^2-1$，$16\nmid q^2-1$，$8\nmid q+1$ 且 $8\nmid q-1$，得 $q\equiv\pm3(\mathrm{mod}\,8)$ 且 $n=\dfrac{q(q+1)(q-1)}{24}$ 定理得证。

问题：虽然本文已得到一些较好的结果，但还是有许多的不足之处，例如：没有得到对于 $s\ge2$ 时的平方自由阶 s-弧正则图的一般结论。这将是一个巨大的工作。

参考文献

[1] Feng, Y.Q. and Li, Y.T. (2011) One-Regular Graphs of Square-Free Order of Prime Valency. *European Journal of Combinatorics*, **32**, 261-275. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2010.10.002

[2] Fang, X., Wang, J. and Xu, M.Y. (2002) On 1-Arc-Regular Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **23**, 785-791. https://doi.org/10.1006/eujc.2002.0579

[3] Feng, Y.Q. and Kwak, J.H. (2004) One-Regular Cubic Graphs of Order a Small Number Times a Prime or Prime Square. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **76**, 345-356. https://doi.org/10.1017/S1446788700009903

[4] Feng, Y.Q. and Kwak, J.H. (2007) Cubic Symmetric Graphs of Order a Small Number Times a Prime or a Prime Square. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **97**, 627-646. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2006.11.001

[5] Pan, J.M., Ding, S.Y. and Liu, Y. (2014) Finite Arc-Regular Graphs of Prime Valency. *Scientia Sinica Mathematica*, **44**, 307-315. https://doi.org/10.1360/012014-1

[6] Li, C.H., Lu, Z.P. and Wang, C.X. (2015) On Edge-Transitive Graphs of Square-Free Order. *European Journal of Combinatorics*, **22**, 41-46. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2014.10.005

[7] Ling, B. and Lou, B.G. (2017) Arc-Transitive Cubic Graphs of Order Four Times an Odd Square-Free Integer. *Journal of Algebra and Its Applications*, **16**, 213-225. https://doi.org/10.1142/S0219498817502139

[8] Bosma, W., Cannon, J. and Playoust, C. (1997) The MAGMA Algebra System I: The User Language. *Journal of Symbolic Computation*, **24**, 235-265. https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0125

[9] Biggs, N. (1992) Algebraic Graph Theory. 2nd Edition, Cambridge University Press, New York.

[10] Dickson, L.E. (1958) Linear Groups with an Expositions of the Galois Field Theory. Dover.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org