**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, **2018, 7(4), 374-379**
Published Online April 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.74047

# A Class of Stage Structure Model of Alien Invasive Organisms

**Bingbing Wang, Dingjiang Wang***

College of Science, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang
Email: 1160530654@qq.com, *wangdingj@126.com

Received: Apr. 5th, 2018; accepted: Apr. 20th, 2018; published: Apr. 27th, 2018

## Abstract

**This paper studies the problem of alien organisms invading plants, considers plant species that carry pests and disease stages, establishes a model of biological invasive plant diseases and pests, and presents its disease-free balance point and positive balance point. By establishing proper Lyapunov functionals, the LaSalle invariant set theory and Liapunov stability theory are used to prove the global stability of the disease-free equilibrium. Through analysis of stability theory, a sufficient condition for the asymptotic stability of the positive equilibrium is obtained.**

## Keywords

**Alien Organism, Invasion Model, Equilibrium, Stability**

# 外来入侵生物阶段结构模型的稳定性

**王冰冰，王定江***

浙江工业大学理学院，浙江 杭州
Email: 1160530654@qq.com, *wangdingj@126.com

收稿日期：2018年4月5日；录用日期：2018年4月20日；发布日期：2018年4月27日

## 摘 要

该文研究外来生物入侵植物问题，考虑携带有害生物和患病两个阶段的植物树种，建立了一类生物入侵的植物病虫害模型，给出了其无病平衡点和正平衡点，通过建立适当的Lyapunov泛函，利用LaSalle不变集原理和Liapunov稳定性理论证明了无病平衡点的全局稳定性，通过稳定性理论的分析，得到正平衡点渐近稳定的充分条件。

*通讯作者。

文章引用: 王冰冰, 王定江. 外来入侵生物阶段结构模型的稳定性[J]. 应用数学进展, 2018, 7(4): 374-379.
DOI: 10.12677/aam.2018.74047

## 关键词

**外来生物，入侵模型，平衡点，稳定性**



## 1. 引言

随着经济全球化的飞速发展，全球进出口贸易和境外旅游也在不断地增长，外来物种伴随着这些活动在不同国家间的传入与转移不可避免。人们无心的行为就可能会携带外来有害生物，它们以各种各样的形式“藏”在人们看不到的地方，从而被引入当前的生态圈，由于缺乏天敌，并与当地的生物争夺食物或寄生在某生物体内，这些外来有害生物可能在短期内破坏当地生态圈的平衡并严重危害当地生物，轻则影响当地经济地发展，重则破坏当地生态系统的平衡，甚至威胁人类的生存。

文[1]研究了具有潜伏期和染病期均具有传染力的 SEIR 模型的稳定性，文[2]研究了具有阶段结构的病毒两种模型的稳定性，我们结合文[1] [2]的模型，同时参考文[3]、文[4]，对其模型做出了推广，建立了一类生物入侵的植物病虫害模型，使其更接近于实际病虫害问题，结合文献[5] [6] [7] [8] [9]给出的稳定性分析方法讨论了平衡点的存在性和稳定性。

## 2. 建立模型

我们假定 $T(t),E(t),I(t),V(t),C(t)\in[0,M]$，$M$ 为任意整数且均在 $t\in[0,+\infty)$ 连续，设定 $T(t)$ 是正常易感树木数量，$E(t)$ 为被寄生树木数量，$I(t)$ 为患病树木数量，$V(t)$ 为使得树木患病的某种害虫的数量，$C(t)$ 为投入的该害虫的天敌的数量，且其中 $m$ 为树木的种植成活率，$d_1$ 为树木的自然死亡率，$d_2$ 为该天敌的自然死亡率，$r$ $(r>0)$为患病树木的自愈率，$n$ 为易感树木患病比例系数，$\rho$ 为被寄生树木患病的比例系数，$v_0$ 为害虫的自然繁殖率，我们把它设为某个常数($v_0>0$)，$k_1$ 为害虫被捕食系数，$c_0$ 为天敌繁殖率，其中 $m,d_1,d_2,n,\rho,v_0,k_1,c_0$ 均为正数，其中 $c_0>d_2$。

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=m-nTV-d_1T+rI,\\ \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=nTV-(d_1+\rho)E,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\rho E-d_1I-rI,\\ \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=v_0-k_1VC,\\ \dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}=c_0+k_1VC-d_2C.\end{cases} \tag{1}$$

## 3. 平衡点的存在性

我们令

$$\begin{cases} m - nTV - d_1T + rI = 0, \\ nTV - (d_1+\rho)E = 0, \\ \rho E - d_1 I - rI = 0, \\ v_0 - k_1VC = 0, \\ c_0 + k_1VC - d_2C = 0. \end{cases} \tag{2}$$

从(2)中的第四、第五个式子我们可以得到:

$$C^* = \frac{c_0+v_0}{d_2}，\ V^* = \frac{v_0d_2}{k_1(c_0+v_0)},$$

从(2)中的前三个等式易得到:

当 $I \neq 0$ 时，

$$T^* = \frac{d_1+\rho}{nv}E^*，\ E^* = \frac{mnv(d_1+r)}{nv(d_1+\rho)(d_1+r)+d_1(d_1+r)(d_1+\rho)+\rho nv}，\ I^* = \frac{\rho E^*}{d_1+r},$$

故非零平衡点 $P^* = (T^*, E^*, I^*, V^*, C^*)$。

当 $I = 0$ 时，则 $V = C = 0$，

$$T_0 = \frac{m}{d_1}，\ E_0 = 0，\ I_0 = 0$$

故无病平衡点 $P_0 = (T_0, 0, 0, 0, 0)$。

## 4. 平衡点分析

**定理 4.1：** 当 $T(t), E(t), I(t), V(t), C(t) \in C[0,+\infty)$，无病平衡点 $P_0$ 是全局渐进稳定的。

**证明**，在无病平衡点 $P_0(T_0,0,0,0,0)$，模型(1)等价于：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -nTV - d_1(T-T_0) + rI, \\ \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = nTV - (d_1+\rho)E, \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \rho E - (d_1+r)I, \\ \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = v_0 - k_1VC, \\ \dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = c_0 + k_1VC - d_2C. \end{cases} \tag{3}$$

设 $(T,E,I,V,C)$ 是系统(3)的任意正解，构造 Lyapunov 泛函：

$$W_0(t) = \frac{(d_1+r)}{T_0Tr}\left(\frac{T}{T_0} - \ln\frac{T}{T_0}\right) + \frac{d_1+r}{r}E + \frac{(d_1+r)(d_1+\rho)}{\rho r}I$$

易知 $f(x) = x - \ln x$ 在 $x=1$ 处取得最小值且 $f(1) = 1 > 0$， $x \in (0,+\infty)$，故 $W_0(t)$ 在 $P_0$ 处取得唯一最小值。注意 $m - d_1T_0 = 0$，依据系统(3)的轨线计算 $W_0(t)$ 的全导数：

$$W_0'(t) = -\frac{(d_1+r)d_1}{r}(T-T_0)^2 < 0$$

当且仅当$(T,E,I,V,C)=(T_0,0,0,0,0)$时有$W_0'(t)=0$， 由 LaSalle 不变集原理可知，系统(1)的无病平衡点$P_0$是全局渐近稳定的。

在非零平衡点$P^*\left(T^*,E^*,I^*,V^*,C^*\right)$点处，系统(1)线性化为如下系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-nT^*V-\left(nV^*-d_1\right)T+rI,\\ \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=nT^*V+nV^*T-\left(d_1+\rho\right)E,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\rho E-d_1I-rI,\\ \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-k_1V^*C-k_1C^*V,\\ \dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}=\left(k_1V^*-d_2\right)C+k_1C^*V.\end{cases} \tag{4}$$

令$X=\left(T,E,I,V,C\right)^{\mathrm{T}}$，则系统(4)可转化为如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-nV^*-d_1 & 0 & r & -nT^* & 0\\ nV^* & -d_1-\rho & 0 & nT^* & 0\\ 0 & \rho & -d_1-r & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -k_1C^* & -k_1V^*\\ 0 & 0 & 0 & k_1C^* & k_1V^*-d_2\end{pmatrix}X \tag{5}$$

或$X'=AX$。

故系统(4)的雅可比矩阵即为$A$且其特征多项式$|\lambda I-A|$如下，

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+nV^*+d_1 & 0 & r & nT^* & 0\\ nV^* & \lambda+d_1+\rho & 0 & -nT^* & 0\\ 0 & -\rho & \lambda+d_1+r & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda+k_1C^* & -k_1V^*\\ 0 & 0 & 0 & -k_1C^* & \lambda-k_2V^*+d_2\end{vmatrix} \tag{6}$$

有

$$\begin{aligned}&|\lambda I-A|\\ &=\left[\left(\lambda-k_1V^*+d_2\right)\left(\lambda+k_1C^*\right)+k_1^2V^*C^*\right]\\ &\quad\times\left[\left(\lambda+\rho V^*+d_1\right)\left(\lambda+d_1+\rho\right)\left(\lambda+d_1+r\right)+rn\rho V^*\right]\\ &=\left[\lambda^2+\left(k_1C^*-k_1V^*+d_2\right)\lambda+k_1d_2C^*\right]\left[\lambda^3+\left(\rho V^*+3d_1+r+\rho\right)\lambda^2\right.\\ &\quad+\left(2\rho d_1V^*+3d_1^2+\rho rV^*+2d_1r+\rho d_1+\rho r+\rho^2V^*+d_1\rho\right)\lambda+\rho d_1^2V^*\\ &\quad\left.+\rho^2d_1V^*+d_1^3+\rho d_1^2+\rho rd_1V^*+\rho^2rV^*+d_1^2r+d_1\rho r\right]\\ &=a_0\lambda^5+a_1\lambda^4+a_2\lambda^3+a_3\lambda^2+a_4\lambda+a_5\end{aligned}$$

其中$a_0=1$，

$$a_1=k_1C^*-k_1V^*+\rho V^*+3d_1+d_2+r+\rho,$$

$$\begin{aligned} a_2 &= k_1 d_2 C^* + \left(k_1 C^* - k_1 V^* + d_2\right)\left(\rho V^* + 3d_1 + r + \rho\right) + 2\rho d_1 V^* \\ &\quad + \rho r V^* + 3d_1^2 + 2rd_1 + \rho d_1 + nr + \rho^2 V^* + d_1 V^* \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} a_3 &= k_1 d_2 C^* \left(\rho V^* + 3d_1 + r + \rho\right) + \left(k_1 C^* - k_2 V^* + d_2\right)\left(2\rho d_1 V^* + \rho r V^* \right. \\ &\quad \left. + 3d_1^2 + 2d_1 r + \rho d_1 + \rho r + \rho^2 V^* + d_1 \rho\right) + \rho d_1^2 V^* + \rho^2 d_1 V^* + d_1^3 \\ &\quad + d_1^2 \rho + d_1^2 r + \rho r d_1 V^* + \rho^2 r V^* + d_1 r + d_1 r \rho \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} a_4 &= k_1 d_2 C^* \left(2\rho d_1 V^* + \rho r V^* + 3d_1^2 + 2d_1 r + \rho d_1 + \rho r + \rho^2 V^* + d_1 \rho\right) \\ &\quad + \left(k_1 C^* - k_2 V^* + d_2\right)\left(d_1^3 + \rho d_1^2 V^* + \rho^2 d_1 V^* \right. \\ &\quad \left. + d_1^2 \rho + d_1^2 r + \rho r d_1 V^* + \rho^2 V^* r + d_1 r \rho\right) \end{aligned},$$

$$a_5 = k_1 d_1 C^* \left(\rho d_1^2 V^* + \rho^2 d_1 V^* + d_1^3 + d_1 \rho + \rho r d_1 V^* + \rho^2 r V^* + d_1^2 r + d_1 r \rho\right).$$

故可以得到:

1) 令 $\Delta_1 = a_1$，则

$$\Delta_1 = k_1 C^* - k_1 V^* + \rho V^* + 3d_1 + d_2 + r + \rho$$

带入 $V^*, C^*$ 可得：

$$\Delta_1 = \frac{k_1 (v_0 + c_0)^2 + c_0 d_2^2}{d_2 \left(c_0 + v_0\right)} + \frac{\rho v_0 d_2}{k_1 \left(c_0 + v_0\right)} + 3d_1 + r + \rho$$

又 $c_0 > d_2$ 且 $\rho, k_1, d_1, d_2, r$ 均大于零，故 $\Delta_1 > 0$。

2) 令

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2$$

由上一个式子的推导可知 $a_1 > 0$，故判断 $a_2$ 的符号即可知 $\Delta_2$ 的符号。

由已知条件易知 $V^*, C^*$ 均大于零，且 $d_2 > 0$，带入 $V^*, C^*$ 可得，

$$k_1 C^* - k_1 V^* + d_2 = \frac{k_1 (v_0 + c_0)^2 + c_0 d_2^2}{d_2 \left(c_0 + v_0\right)} > 0 \tag{7}$$

$a_2$ 中其他各项均为正数，由(7)可知 $a_2 > 0$，故 $\Delta_2 > 0$。

3) 令

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= a_1 \left(a_2 a_3 - a_1 a_4\right) - a_0 \left(a_3^2 - a_1 a_5\right) \\ &= a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 + a_1 a_5 \end{aligned}$$

若 $a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 + a_1 a_5 > 0$，由 Routh-Hurwitz 定理可知，(6)式的所有特征根都有负实部，则非零平衡点 $P^*$ 是局部渐近稳定的。由此得到：

**定理 4.2：** 当 $a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 + a_1 a_5 > 0$ 时，模型(1)的非零平衡点 $P^*$ 是局部渐近稳定的。

我们通过前面讨论，建立了一类生物入侵的植物病虫害模型，给出了其无病平衡点和正平衡点，通过建立适当的 Lyapunov 泛函和 LaSalle 不变集原理证明了无病平衡点的全局稳定性，通过稳定性第一近似方法研究了正平衡点的稳定性，当 $a_1a_2a_3-a_1^2a_4-a_3^2+a_1a_5>0$ 时，正平衡点是渐近稳定的，将不可避免的外来生物入侵问题转化为可以量化的模型，找到了控制病虫害的条件，因此我们可以通过控制模型中具有实际意义的参数，控制病虫害问题，使得病虫害问题被控制在一个稳定状态下，对于指导研究外来生物入侵问题具有很重要的意义。

## 资助项目

国家自然科学基金项目(61273016)。

## 参考文献

[1] 王树忠, 刘晓宇, 李冬梅. 一类潜伏期和染病期均有传染力的 SEIR 模型的稳定性分析[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2010, 15(2): 71-75.

[2] 查淑玲. 具有阶段结构病毒动力学模涩的稳定性分析问[J]. 渭南师范学院学报, 2012, 27(10): 5-10.

[3] Cruz-Pacheco, G., Estevan, J., Montano-Hirose, A. and Vargas, C. (2005) Modeling the Dynamics of West Nile Virus. *Bulletin of Mathematical Biology*, **67**, 1157-1172. https://doi.org/10.1016/j.bulm.2004.11.008

[4] Bai, Z.G. and Zhou, Y.C. (2012) Global Dynamics of an SEIRS Epidemic Model with Periodic Vaccination and Seasonal Contact Rate. *Nonlinear Analysis*, **13**, 1060-1068. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.02.008

[5] 马知思, 周义仓. 传杂病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[6] 陆征一, 周义仓. 数学生物学进展[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

[7] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[8] 马知恩. 生物数学模型[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1996.

[9] 唐三一, 肖燕妮. 单种群生物动力系统[M]. 北京: 科学出版社, 2008.