Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2018, 7(4), 413-417**
Published Online April 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.74051

Hans汉斯

Vertex-Disjoint Chorded Cycles through Specified Vertices in Bipartite Graphs

Xiaoyao Lin, Yunshu Gao

School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan Ningxia
Email: 815705285@qq.com, gysh2004@163.com

Received: Apr. 11th, 2018; accepted: Apr. 21st, 2018; published: Apr. 28th, 2018

Abstract

A chord is an edge between two vertices of a cycle that is not an edge on the cycle. If a cycle has at least one chord, then the cycle is called a chorded cycle. The minimum degree condition is given for a bipartite graph to contain vertex-disjoint chorded cycles containing specified vertices.

Keywords

Vertex-Disjoint Chorded Cycles, Bipartite Graphs, Minimum Degree

二部图中过特定点的点不交弦圈

蔺逍遥，高云澍

宁夏大学数学统计学院，宁夏 银川
Email: 815705285@qq.com, gysh2004@163.com

收稿日期：2018年4月11日；录用日期：2018年4月21日；发布日期：2018年4月28日

摘 要

弦是指连接圈上的两个点构成的一条边，使得这条边不属于圈上。如果一个圈至少有一条弦，那么我们称这个圈为弦圈。本文给出了二部图中过含特定点集点不交弦圈的最小度条件。

关键词

点不交弦圈，二部图，最小度

文章引用: 蔺逍遥, 高云澍. 二部图中过特定点的点不交弦圈[J]. 应用数学进展, 2018, 7(4): 413-417.
DOI: 10.12677/aam.2018.74051

1. 引言

本文只考虑有限的简单无向图。设 G 表示图，且令 $V(G)$，$E(G)$，$\delta(G)$，$\deg_G(u)$ 和 $N_G(u)$ 分别是图 G 的点集，边集，最小度，点 u 的度数和与 u 相邻的点的集合。完全图是指图中的任意两点之间都有边。若图 G 是非完全图，定义

$$\sigma_2(G)=\min\{\deg_G(u)+\deg_G(v)|u,v\in V(G),u\neq v,uv\notin E(G)\}$$

若图 G 是完全图，则令 $\sigma_2(G)=\infty$。长为 l 的圈叫做 l-圈。文中未给出的定义和术语参考文献[1]。

关于图中过所有顶点的圈(哈密尔顿圈)的研究最早始于 Dirac [2]，他给出了著名的 Dirac 型条件：

定理 1.1：[2]设 G 是一个阶数 $n\geq 3$ 的图且 $\delta(G)\geq\frac{n}{2}$，则 G 包含哈密尔顿圈。

1963 年，Moon 和 Moser [3]给出了二部图中存在哈密尔顿圈的 Dirac 型条件：

定理 1.2：[3]设 $G=(V_1,V_2;E)$ 是一个二部图，且 $|V_1|=|V_2|=n\geq 2$。如果 $\delta(G)\geq\frac{n+1}{2}$，则 G 包含哈密尔顿圈。

图 G 是泛圈的当且仅当图 G 包含任意长度的圈。文献[4]和[5]给出了二部图是泛圈的相关结果。

定理 1.3：[4] [5]设 $G=(V_1,V_2;E)$ 是一个二部图，且 $|V_1|=|V_2|=n\geq 2$。若 G 包含哈密尔顿圈 $C=x_1y_1x_2y_2\cdots x_ny_n$ 使得 $\deg_G(x_1)+\deg_G(y_n)>n+1$，则图 G 是泛圈的；如果 G 包含哈密尔顿圈且 G 边数多于 $\frac{n^2}{2}$，则图 G 是泛圈的。

关于图的哈密尔顿性质的其他结果，我们推荐读者参阅李皓的综述文章[6]。给定圈 C，称 $G-E(C)$ 中的边为弦。若圈 C 包含弦，则称圈 C 为弦圈。显然，若图 G 中存在弦圈 C，则其一定包含偶长圈。Cream 和 Gould 等人[7]证明了图 G 的 Dirac 型条件亦可以保证 G 中存在过特定点的限定长度的点不交弦圈。

定理 1.4：[7]设 G 是一个阶数 $n\geq 16k-5$ 的图，对任意的整数 k，$k\geq 1$。如果 $\delta(G)\geq\frac{n}{2}$，那么对 G 的任意 k 个不同的点 $v_1,\cdots,v_k$，存在 k 个点不交的弦圈 $C_1,\cdots,C_k$ 使得 $v_i\in V(C_i)$，并且对所有的 $1\leq i\leq k$，有 $4\leq|V(C_i)|\leq 6$。

本文的主要目的是证明二部图图 G 的 Dirac 型条件亦可以保证图 G 中存在过指定点的限定长度的点不交弦圈。我们得到了如下的结果：

定理 1.5：设 $G=(V_1,V_2;E)$ 是一个二部图，且 $|V_1|=|V_2|=n\geq 12k-4$，其中 k 为任意的正整数。如果 $\delta(G)\geq\frac{n+1}{2}$，则对 G 的 k 个不同的点 $u_1,\cdots,u_k$，G 中存在 k 个点不交的弦圈 $C_1,\cdots,C_k$，使得任意的 $1\leq i\leq k$，$u_i\in V(C_i)$ 且 $6\leq|C_i|\leq 8$。

2. 定理 1.5 的证明

证明：首先证明 $k=1$ 时定理成立，此时 $n\geq 12k-4=8$。首先证明 G 是泛圈的。由定理 1.2 知，图 G 包含哈密尔顿圈。由定理 1.3 和最小度条件知，图 G 中任意一对邻接点的度和为 $n+1$。因此，结合握手定理，易得

$$2\left|E(G)\right|=\sum_{x\in V(G)}\deg_G(x)=\frac{n+1}{2}\times 2n>n^2,$$

由上式得到$\left|E(G)\right|>\frac{n^2}{2}$，于是，由定理 1.3，图 G 是泛圈的。我们考虑图 G 中的 6-圈 $C=u_1v_1u_2v_2u_3v_3u_1$。不失一般性，不妨设 $u_1\in V_1$。如果 C 是弦圈，那么定理对 $k=1$ 成立。假设 C 不是弦圈，则 $u_1v_2,u_2v_3,u_3v_1\notin E(G)$。

断言 2.1： $\left|N_G(u_1)\cap N_G(u_3)\right|\geq 2$。

证明： 反证法。假设$\left|N_G(u_1)\cap N_G(u_3)\right|\leq 1$。由于 $u_1v_3,u_3v_3\in E(G)$，则

$$\deg_G(u_1)+\deg_G(u_3)\leq n-3+4=n+1,$$

由上式，$\deg_{G-V(C)}(u_1)+\deg_{G-V(C)}(u_3)=n-3$，于是我们可以把$(G-V(C))\cap V_2$ 剖分成两部分，不妨记为 A 和 B，使得$|A|=\deg_{G-V(C)}(u_1)$ 且$|B|=\deg_{G-V(C)}(u_3)$。假设 v_1 和 v_3 在$(G-V(C))\cap V_1$ 中有公共的邻点，不妨设为 u，注意到$\deg_{G-V(C)}(u)\geq\frac{n+1}{2}-3\geq 1$，不失一般性，不妨设存在 $x\in A$ 使得 $xu\in E(G)$。此时，$u_1v_1u_2v_2u_3v_3uxu_1$ 为通过 u_1 的 8-圈，其中 v_1u 为弦，定理证毕。因此，v_1 和 v_3 在$(G-V(C))\cap V_1$ 中没有公共的邻点。于是，仿照上面的部分，把$(G-V(C))\cap V_1$ 剖分成两部分，不妨记为 D 和 F，使得$|D|=\deg_{G-V(C)}(v_1)$ 且$|F|=\deg_{G-V(C)}(v_3)$。不失一般性，不妨设 $D\neq\varnothing$ 且 $y\in D$，显然，y 在$(G-V(C))\cap V_2$ 中有邻点，不妨设存在 $x\in A$ 使得 $xy\in E(G)$，则 $u_1v_3u_3v_2u_2v_1yxu_1$ 为通过 u_1 的 8-圈，其中 v_1u_1 为弦，定理证毕。故断言 2.1 成立。

根据对称性和断言 2.1，易得如下的结论。

断言 2.2： $\left|N_G(u_2)\cap N_G(u_3)\right|\geq 2$ 且$\left|N_G(v_2)\cap N_G(v_3)\right|\geq 2$。

不妨令 x,y 分别表示$V(G)-V(C)$ 中点 u_1,u_3 和 u_2,u_3 的公共邻点。如果 $x=y$，则 $u_1xu_3v_2u_2v_1u_1$ 是包含 u_1 的 6-圈，其中 u_2x 为弦。如果 $x\neq y$，令 z 表示$V(G)-V(C)$ 中 v_2,v_3 的公共邻点，则 $u_1v_1u_2v_2zv_3u_3xu_1$ 是包含 u_1 的 8-圈，其中 u_1v_3 为弦。故 $k=1$时定理成立。因此，$k\geq 2$。我们使用反证法证明。

假设 $k\geq 2$ 时定理不成立。令 G 是一个边极大的反例，$u_1,\cdots,u_k$ 为 G 中任意的 k 个不同点。因为阶数至少为 $6k$ 的完全二部图包含 k 个点不交的满足定理条件的弦圈，故假设 G 不是完全图。令 x,y 是 G 中两个不相邻的点且 $x\in V_1,y\in V_2$。令 $G'=G+xy$。则由 G 的边极大性，G' 不是反例，故 G' 包含 k 个点不交的满足定理条件的弦圈，记为 $C_1,\cdots,C_k$。不失一般性，不妨设 G 包含 $k-1$个不交的弦圈 $C_1,\cdots,C_{k-1}$，使得对$1\leq i\leq k-1$，$u_i\in V(C_i)$，$6\leq\left|V(C_i)\right|\leq 8$，并且 $u_k\notin\bigcup_{i=1}^{k-1}V(C_i)$。

我们选择 $C_1,\cdots,C_{k-1}$ 使得 $\sum_{i=1}^{k-1}\left|V(C_i)\right|$ 是最小的。 (1)

令 $L=\bigcup_{i=1}^{k-1}C_i$，$H=G-L$，则由 $k\geq 2$ 和$\left|V(L)\right|\leq 8(k-1)$，可得

$$\left|V(H)\right|=\left|V(G)\right|-\left|V(L)\right|\geq 2n-8(k-1)\geq 2(12k-4)-8(k-1)=16k\geq 32,$$

断言 2.3： 对任意的 $x\in V(H)$ 及$1\leq i\leq k-1$，有 $\deg_{C_i}(x)\leq 3$。

证明： 假设存在 $x\in V(H)$ 及某个$1\leq i\leq k-1$，使得 $\deg_{C_i}(x)\geq 4$。我们只需考虑$\left|V(C_i)\right|=8$ 的情况。在这种情况下，我们找到一个包含特定点 u_i 或 u_k 的弦圈 C_i' 使得$\left|V(C_i')\right|=6$，用 C_i' 代替 C_i，则与(1)的选取矛盾。

令 $C_i=x_1v_1u_2v_2u_3v_3u_4v_4x_1$ 且 $x_1\in V_1$。不失一般性，不妨设 $x\in V_1$。令 $N_{C_i}(x)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$。首先考虑 $x\neq u_k$ 的情形。如果 $u_i\in\{v_2,u_3,v_3,u_4,v_4\}$，那么 $C_i'=xv_2u_3v_3u_4v_4x$ 且 v_3x 是弦。如果 $u_i\in\{x_1,v_1,u_2\}$，那么 $C_i'=x_1v_1u_2v_2xv_4x_1$ 且 v_1x 是弦。

因此，显然 $x=u_k$。如果 $u_i\in\{u_3,v_3,u_4\}$，那么 $C_i'=x_1v_1u_2v_2xv_4x_1$ 是包含 u_k 但不含 u_i 的 6-圈且 v_1x 是弦。

如果 $u_i \in \{x_1, v_1, u_2\}$，那么 $C_i' = v_2u_3v_3u_4v_4xv_2$ 是包含 v_k 但不含 v_i 的 6-圈且 v_3x 是弦。如果 $u_i = v_4$，那么 $C_i' = xv_1u_2v_2u_3v_3x$ 是包含 u_k 但不含 u_i 的 6-圈且 v_2x 是弦。如果 $u_i = v_2$，那么 $C_i' = x_1v_1xv_3u_4v_4x_1$ 是包含 u_k 但不含 u_i 的 6-圈，使得 v_4x 是弦。断言 2.3 证毕。

因为 $\delta(G) \ge \frac{n+1}{2} \ge \frac{12k-4+1}{2} = 6k - \frac{3}{2}$，由断言 2.3，对于任意的 $x \in V(H)$，$\deg_L(x) \le 3(k-1)$，于是

$$\deg_H(x) \ge \delta(G) - 3(k-1) \ge 6k - \frac{3}{2} - 3(k-1) = 3k + \frac{3}{2} \ge \frac{15}{2}(k \ge 2),$$

不失一般性，不妨设 $u_k \in V_1$ 且令 $U = \{u_1, u_2, u_3\} \subset N_H(u_k)$。令 u_1', u_2', u_3' 分别是 u_1, u_2, u_3 的邻点，且 $u_1' \ne u_2' \ne u_3' \ne u_k$。

情况 1： 存在两个不同的点 $u, u' \in U$，使得 $N_{H-u_k}(u) \cap N_{H-u_k}(u') = \varnothing$。

不失一般性，不妨设 $u = u_1$ 且 $u' = u_2$。于是有

$$\begin{aligned} |V(H)| &\ge \deg_H(v_k) + \deg_H(u_1) + \deg_H(u_2) - 1 \\ &\ge 3(\delta(G) - 3(k-1)) - 1 \\ &= 3\delta(G) - 9k + 8, \end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned} n &= |V(H)| + |V(L)| \\ &\ge 3\delta(G) - 9k + 8 + 3(k-1) \\ &= 3\delta(G) - 6k + 5 \\ &\ge 3 \times \frac{n+1}{2} - 6k + 5, \end{aligned}$$

从而 $n \le 12k - 13$，与 $n \ge 12k - 4$ 矛盾。

情况 2： 对不同的点 $u, u', u'' \in U$，至少存在两对点 (u, u') 和 (u', u'')，使得 $x \in N_{H-u_k}(u) \cap N_{H-u_k}(u')$，$y \in N_{H-u_k}(u') \cap N_{H-u_k}(u'')$ 且 $x \ne y$。

不失一般性，令 $u = u_1, u' = u_2, u'' = u_3$，也就是 $x \in N_{H-u_k}(u_1) \cap N_{H-u_k}(u_2)$，$y \in N_{H-u_k}(u_2) \cap N_{H-u_k}(u_3)$ 且 $x \ne y$。则 $vu_ku_1xu_2yu_3u_k$ 是包含 u_k 的 6-圈且 u_ku_2 是弦。

情况 3： 在 $H - u_k$ 中，点 u_1, u_2, u_3 只有一个公共邻点。

此时，由于

$$\begin{aligned} |V(H)| &\ge \deg_H(u_1) + \deg_H(u_2) - 2 + \deg_H(u_3) - 2 \\ &= \deg_H(u_1) + \deg_H(u_2) + \deg_H(u_3) - 4 \\ &\ge 3(\delta(G) - 3(k-1)) - 4 \\ &= 3\delta(G) - 9k + 5, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} n &= |V(H)| + |V(L)| \\ &\ge 3\delta(G) - 9k + 5 + 3(k-1) \\ &= 3\delta(G) - 6k + 2 \\ &\ge 3 \times \frac{n+1}{2} - 6k + 2, \end{aligned}$$

从而 $n \le 12k-7$，与 $n \ge 12k-4$ 矛盾。至此，定理 1.5 证毕。

基金项目

国家自然科学基金(11561054)。

参考文献

[1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. Elsevier, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-349-03521-2

[2] Dirac, G.A. (1952) Some Theorems on Abstract Graphs. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **2**, 69-81. https://doi.org/10.1112/plms/s3-2.1.69

[3] Moon, J.W. and Moser, L. (1963) On Hamiltonian Bipartite Graphs. *Israel Journal of Mathematics*, **1**, 163-165. https://doi.org/10.1007/BF02759704

[4] Entringer, R.C. and Schmeichel, E.F. (1988) Edge Conditions and Cycle Structure in Bipancyclic Graphs. *Ars Combinatoria*, **26**, 229-232.

[5] Schmeichel, E.F. and Mitchem, J. (1982) Bipartite Graphs with Cycles of All Even Lengths. *Journal of Graph Theory*, **6**, 429-439. https://doi.org/10.1002/jgt.3190060407

[6] Li, H. (2013) Generalizations of Dirac's Theorem in Hamiltonian Graph Theory—A Survey. *Discrete Mathematics*, **313**, 2034-2053. https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.11.025

[7] Cream, M., Faudree, R., Gould, R. and Hirohata, K. (2016) Chorded Cycles. *Graphs and Combinatorics*, **32**, 2296-2313. https://doi.org/10.1007/s00373-016-1729-4