Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(4), 423-428
Published Online April 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.74053

Hans汉斯

Judicious Balanced Bipartitions of $(k, k-1)$-Biregular Graphic Degree Sequence

Haiyan Li, Jin Guo

College of Information Science and Technology, Hainan University, Haikou Hainan
Email: lihaiyan@hainu.edu.cn

Received: Apr. 11th, 2018; accepted: Apr. 21st, 2018; published: Apr. 28th, 2018

Abstract

Let $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ be a graphic sequence of nonnegative integers and π_1,π_2 are two sequences that are obtained by partitioning the elements of π into two sets. A balanced bipartition of π is a bipartition π_1,π_2 such that $-1\le|\pi_1|-|\pi_2|\le 1$, where $|\pi_i|(i=1,2)$ is denoted to the number of elements of $|\pi_i|$. In this paper, let k and m be positive integers, we determine the values $\psi_{\max}(\pi)$ and $\psi_{\min}(\pi)$ of $(k,k-1)$-biregular graphic sequence $\pi=\left(k^m,(k-1)^m\right)$.

Keywords

Graph, Degree Sequence, $\left(k^m,(k-1)^m\right)$-Biregular Graphic Sequence, Judicious Balanced Bipartition

$(k, k-1)$-双正则可图序列的公平划分

李海燕，郭　锦

海南大学信息科学技术学院，海南　海口
Email: lihaiyan@hainu.edu.cn

收稿日期：2018年4月11日；录用日期：2018年4月21日；发布日期：2018年4月28日

摘　要

设 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是非负整数序列，π_1,π_2 是将 π 的所有元素划分为两部分后的两个子序列。如果

文章引用：李海燕，郭锦. (k, k − 1)-双正则可图序列的公平划分[J]. 应用数学进展, 2018, 7(4): 423-428.
DOI: 10.12677/aam.2018.74053

$-1 \le |\pi_1| - |\pi_2| \le 1$，则称 π_1, π_2 是 π 的一个平衡二部划分，其中 $|\pi_i|(i=1,2)$ 表示 π_i 中的元素数目。设k和m是两个正整数，$\pi = (k^m, (k-1)^m)$ 是双正则可图序列。本文确定了 $\psi_{\max}(\pi)$ 的值和 $\psi_{\min}(\pi)$ 的值。

关键词

图，度序列，$(k^m, (k-1)^m)$-双正则可图序列，公平划分

1. 引言

本文中只限于讨论有限简单图。未给出的定义请参照文献[1]。设 G 和 H 是简单图，图 $G+H$ 表示 G 与 H 的和，其顶点集为 $V(G+H) = V(G) \cup V(H)$，其边集为 $E(G+H) = E(G) \cup E(H)$。

设 V_1, V_2 是图 G 的一个二部划分，如果 $-1 \le |V_1| - |V_2| \le 1$，则称 V_1, V_2 是 G 的一个二部平衡划分。对于 $i = 1, 2$，$e(V_i)$ 表示两个端点都在 V_i 中的边的数目，$e(V_1, V_2)$ 表示两个端点分别在顶点子集 V_1, V_2 中的边数。通常 $e(V_1, V_2)$ 用来表示平衡二部划分的大小。图 G 的一个最大(最小)平衡二部划分 V_1, V_2 是图 G 的所有平衡二部划分中 $e(V_1, V_2)$ 的值达到最大(最小)。与最大，最小平衡划分问题不同，公平划分问题是寻找图 G 的一个划分，使得多个分量同时进行优化。

本文将把图的公平划分问题变形到度序列的公平划分问题。

若简单图有顶点集 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 且 v_i 的度为 $d_i\,(i=1,\cdots,n)$，则序列 $\pi = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 称为 G 的度序列。记 NS_n 为所有满足 $n-1 \ge d_1 \ge d_2 \ge \cdots \ge d_n \ge 0$ 的整数序列的集合。如果 π 是某个 n 阶简单图 G 的度序列，那么称 π 为可图序列，且 G 为 π 的一个实现。记 GS_n 为 NS_n 中的所有可图序列组成的集合。在可图度序列中，r^n 表示有 n 个 r，即度序列的实现中有 n 个顶点的度为 r。

给定可图序列 π, π_1, π_2 是将 π 的元素划分为两部分后的两个子序列。如果 $-1 \le |\pi_1| - |\pi_2| \le 1$，则称 π_1, π_2 是 π 的一个平衡二部划分，其中 $|\pi_i|(i=1,2)$ 表示 π_i 中的元素数目。若 G 是 π 的一个实现，V_1, V_2 是 G 的一个平衡二部划分且 V_1, V_2 在 π 中的度序列分别为 π_1, π_2，则称 V_1, V_2 为 π 的平衡二部划分 π_1, π_2 的一个实现。

类似于图的“公平”划分问题，我们考虑度序列的“公平”划分问题：寻找已知可图序列 π 的一个平衡二部划分 π_1, π_2，使得 π_1, π_2 的某个实现 V_1, V_2 在 π 的所有平衡二部划分的所有实现下 $\min\{e(V_1), e(V_2)\}$ 达到最大或者 $\max\{e(V_1), e(V_2)\}$ 达到最小，记 $\psi_{\min}(\pi) = \min\{e(V_1), e(V_2)\}$，$\psi_{\max}(\pi) = \max\{e(V_1), e(V_2)\}$。若 V_1', V_2' 是 π 的某个平衡二部划分的一个实现，显然 $\psi_{\min}(\pi) \ge \min\{e(V_1'), e(V_2')\}$，$\psi_{\max}(\pi) \le \max\{e(V_1'), e(V_2')\}$。

2. 主要定理及引理

定理 2.1：(Erdös 和 Gallai [2])设 $\pi = (d_1, d_2, \cdots, d_n) \in NS_n$ 且 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 是偶数。则 $\pi \in GS_n$ 当且仅当对任意整数 t，

$$\sum_{i=1}^{t} d_i \le t(t-1) + \sum_{j=t+1}^{n} \min\{d_i, t\}, 1 \le t \le n$$

都成立。

设 $\mathbf{P}:=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$，$\mathbf{Q}:=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ 是两个非负整数序列。如果存在一个简单二部图 $G[X,Y]$ 使得 X 和 Y 中的顶点度分别是 $(p_1,p_2,\cdots,p_m)$ 和 $(q_1,q_2,\cdots,q_n)$，那么称序列对 $(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ 是二部可图的，并称二部图 $G[X,Y]$ 为 $(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ 的一个实现。Gale [3]和 Ryser [4]分别独立地给出了关于二部可图序列的刻划定理。

定理 2.2：(Gale [3], Ryser [4]) 设 $\mathbf{P}:=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$ 和 $\mathbf{Q}:=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ 是两个非负整数序列且满足 $p_1\ge p_2\ge\cdots\ge p_m$，$q_1\ge q_2\ge\cdots\ge q_n$。若 $\sum_{i=1}^m p_i=\sum_{i=1}^n q_i$，则 $(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ 是二部可图的当且仅当

$$\sum_{i=1}^t q_i\le\sum_{i=1}^m\min\{p_i,t\}(1\le t\le n)$$

成立。

引理 2.3：(Yin 和 Li [5])设 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in NS_n$，$d_1=r$ 且 $\sum_{i=1}^n d_i$ 是偶数。如果 $d_{r+1}\ge r-1$，则 $\pi\in GS_n$。

设 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in GS_n$，若 $d_1=k,d_n=k-1$，则称 π 是 $(k,k-1)$-双正则可图的。本文主要给出双正则可图序列 $\left(k^m,(k-1)^m\right)$ 的公平划分的上下界。

3. $(k, k-1)$-双正则可图序列的公平划分 $\psi_{\max}(\pi)$ 的上界

定理 3.1：设 $k\ge1$ 是一个正整数，m 是 4 的整数倍且 $\pi=\left(k^m,(k-1)^m\right)\in GS_n$。那么

1) 若 $k\le m$，则 $\psi_{\max}(\pi)=0$；

2) 若 $m+1<k\le 2m-1$，则 $\psi_{\max}(\pi)\le\dfrac{(2k-1-2m)m}{4}$。

证明：情形(1)： $k\le m$。

设 $\pi_1=(p_1,\cdots,p_m)=\left(k^{\frac{m}{2}},(k-1)^{\frac{m}{2}}\right)$，$\pi_2=(q_1,\cdots,q_m)=\left(k^{\frac{m}{2}},(k-1)^{\frac{m}{2}}\right)$，那么 π_1,π_2 是 π 的一个平衡二部划分。这里，

$$\sum_{j=1}^t q_j=\begin{cases}kt, & 若1\le t\le\dfrac{m}{2}\\ k\cdot\dfrac{m}{2}+(k-1)\left(t-\dfrac{m}{2}\right), & 若\dfrac{m}{2}<t\le m\end{cases}\tag{1}$$

且

$$\sum_{i=1}^m\min\{p_i,t\}=\begin{cases}mt, & 若1\le t\le k-1\\ k\cdot\dfrac{m}{2}+(k-1)\cdot\dfrac{m}{2}, & 若k-1<t\le m\end{cases}\tag{2}$$

接下来我们比较 $\sum_{j=1}^t q_j$ 和 $\sum_{i=1}^m\min\{p_i,t\}$ 的大小。显然，由(1)和(2)得 $kt\le mt$ 且

$$k\cdot\frac{m}{2}+(k-1)\left(t-\frac{m}{2}\right)\le k\cdot\frac{m}{2}+(k-1)\cdot\frac{m}{2}。$$

若 $\dfrac{m}{2}<k-1,\dfrac{m}{2}<t\le k-1$，由(1)和(2)得，

$$\sum_{j=1}^t q_j=k\cdot\frac{m}{2}+(k-1)\left(t-\frac{m}{2}\right)=\frac{m}{2}+(k-1)t；$$

$$\sum_{i=1}^m\min\{p_i,t\}=mt。$$

据 $k \le m$ 和 $\frac{m}{2} < t \le k-1$ 可得

$$\sum_{j=1}^{t} q_j - \sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, t\} = (k-m)t + \left(\frac{m}{2} - t\right) < 0\text{。}$$

若 $k-1 < \frac{m}{2}, k-1 < t \le \frac{m}{2}$，由(1)和(2)得，$\sum_{j=1}^{t} q_j = kt$；

$$\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, t\} = k \cdot \frac{m}{2} + (k-1) \cdot \frac{m}{2}\text{。}$$

显然，

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{t} q_j - \sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, t\} \\ &= k \cdot \left(t - \frac{m}{2}\right) - (k-1) \cdot \frac{m}{2} \le 0 \end{aligned}\text{。}$$

由定理 2.2，(π_1, π_2) 是二部可图的。设 $G[V_1, V_2]$ 是 (π_1, π_2) 的一个实现，则 G 也是 $\pi = \left(k^m, (k-1)^m\right)$ 的一个实现且 V_1, V_2 是 G 的一个平衡二部划分。因此，$\max\{e(V_1), e(V_2)\} = 0$。

故，$0 \le \psi_{\max}(\pi) \le \max\{e(V_1), e(V_2)\} = 0$，且 $\psi_{\max}(\pi) = 0$。

情形(2)： $m+1 < k \le 2m-1$。

设 $\pi_1' = \left((k-m)^{\frac{m}{2}}, (k-1-m)^{\frac{m}{2}}\right)$，$\pi_2' = \left((k-m)^{\frac{m}{2}}, (k-1-m)^{\frac{m}{2}}\right)$。由于 $\frac{m}{2}$ 是偶数，所以 π_1', π_2' 的度和 $(2k-1-2m) \cdot \frac{m}{2}$ 为偶数。由引理 2.3 知，$\pi_i' \in GS_n, i = 1,2$。设 G_i 是 π_i' 的一个实现且 $V(G_i) = V_i\ (i = 1,2)$，$H[V_1, V_2] = K_{m,m}$。令 $G = H + G_1 + G_2$。容易验证 G 是 π 的一个实现，且

$$\psi_{\max}(\pi) \le \max\{e(V_1), e(V_2)\} = e(V)_1 = e(V_2) = \frac{(2k-1-2m)m}{4}\text{。}$$

证毕。

4. (*k*, *k*-1)-双正则可图序列的公平划分 $\psi_{\min}(\pi)$ 的下界

定理 4.1： 设 $k \ge 1$ 是一个正整数，m 是 4 的整数倍且 $\pi = \left(k^m, (k-1)^m\right) \in GS_n$。那么

1) 若 $k < m$，则 $\psi_{\min}(\pi) \ge \frac{(2k-1)m}{4}$；

2) 若 $m \le k \le 2m-1$，则 $\psi_{\min}(\pi) = \frac{m(m-1)}{2}$。

证明：情形(1)： $k < m$。

设 $\pi_1 = \left(k^{\frac{m}{2}}, (k-1)^{\frac{m}{2}}\right)$，$\pi_2 = \left(k^{\frac{m}{2}}, (k-1)^{\frac{m}{2}}\right)$，则 π_1, π_2 是 π 的一个平衡二部划分。由于 $\frac{m}{2}$ 是偶数，所以 π_1, π_2 的度和 $(2k-1) \cdot \frac{m}{2}$ 为偶数。又由引理 2.3 可得，$\pi_1, \pi_2 \in GS_n$。设 G_i 是 π_i 的一个实现且 $V(G_i) = V_i\ (i = 1,2)$，令 $G = G_1 + G_2$。容易验证 G 是 π 的一个实现，V_1, V_2 是 G 的一个平衡二部划分且

$$\psi_{\min}(\pi) \ge \min\{e(V_1), e(V_2)\} = e(V_1) = \frac{(2k-1)m}{4}\text{。}$$

情形(2)： $m \le k \le 2m-1$。显然 $\psi_{\min}(\pi) \le \dfrac{m(m-1)}{2}$。

设 $\pi_1' = (p_1, \cdots, p_m) = \left((k-m+1)^{\frac{m}{2}}, (k-m)^{\frac{m}{2}}\right)$，$\pi_2' = (q_1, \cdots, q_m) = \left((k-m+1)^{\frac{m}{2}}, (k-m)^{\frac{m}{2}}\right)$。这里，

$$\sum_{j=1}^{t} q_j = \begin{cases} (k-m+1)t, & \text{若} 1 \le t \le \dfrac{m}{2} \\ (k-m+1)\cdot\dfrac{m}{2} + (k-m)\left(t-\dfrac{m}{2}\right), & \text{若} \dfrac{m}{2} < t \le m \end{cases} \tag{3}$$

且

$$\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, t\} = \begin{cases} mt, & \text{若} 1 \le t \le k-m \\ (k-m+1)\cdot\dfrac{m}{2} + (k-m)\cdot\dfrac{m}{2}, & \text{若} k-m < t \le m \end{cases} \tag{4}$$

接下来我们比较 $\sum_{j=1}^{t} q_j$ 和 $\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, t\}$ 的大小。显然，由(3)和(4)得 $(k-m+1)t \le mt$ 且

$$(k-m+1)\cdot\frac{m}{2} + (k-m)\left(t-\frac{m}{2}\right) \le (k-m+1)\cdot\frac{m}{2} + (k-m)\cdot\frac{m}{2}。$$

若 $\dfrac{m}{2} < k-m, \dfrac{m}{2} < t \le k-m$，由(3)和(4)得，

$$\sum_{j=1}^{t} q_j = (k-m+1)\cdot\frac{m}{2} + (k-m)\left(t-\frac{m}{2}\right) = \frac{m}{2} + (k-m)t；$$

$$\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, t\} = mt。$$

据 $m \le k \le 2m-1$ 和 $\dfrac{m}{2} < t \le k-m$ 可知

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{t} q_j - \sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, t\} &= \frac{m}{2} + (k-m)t - mt \\ &< t + (k-m)t - mt \\ &= (k+1-2m)t \le 0 \end{aligned}$$

若 $k-m < \dfrac{m}{2}, k-m < t \le \dfrac{m}{2}$，由(3)和(4)得，$\sum_{j=1}^{t} q_j = (k-m+1)t$；

$$\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, t\} = (k-m+1)\cdot\frac{m}{2} + (k-m)\cdot\frac{m}{2}。$$

显然，

$$\sum_{j=1}^{t} q_j - \sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, t\} = (k-m+1)\cdot\left(t-\frac{m}{2}\right) - (k-m)\cdot\frac{m}{2} \le 0。$$

由定理 2.2，(π_1', π_2') 是二部可图的。设 $G'[V_1, V_2]$ 是 (π_1', π_2') 的一个实现，$G_i = K_m$ 且 $V(G_i) = V_i\ (i=1,2)$。令 $G = G' + G_1 + G_2$，则 G 是 $\pi = \left(k^m, (k-1)^m\right)$ 的一个实现且 V_1, V_2 是 G 的一个平衡二部划分。故，$\min\{e(V_1), e(V_2)\} = \dfrac{m(m-1)}{2}$。

因此，$\dfrac{m(m-1)}{2} \ge \psi_{\min}(\pi) \ge \min\{e(V_1), e(V_2)\} = \dfrac{m(m-1)}{2}$，$\psi_{\min}(\pi) = \dfrac{m(m-1)}{2}$。证毕。

基金项目

海南省自然科学基金(No. 20161003, 20161002)；国家自然科学基金(No. 11601108)。

参考文献

[1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graphy Theory with Applications. Macmillan Ltd Press, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-349-03521-2

[2] Erdös, P. and Gallai, T. (1960) Graphs with Prescribed Degrees of Vertices. *Matematikai Lapok*, **11**, 264-274.

[3] Gale, D. (1957) A Theorem on Flows in Networks. *Pacific Journal of Mathematics*, **7**, 1073-1082. https://doi.org/10.2140/pjm.1957.7.1073

[4] Ryser, H.J. (1957) Combinatorial Properties of Matrices of Zeros and Ones. *Canadian Journal of Mathematics*, **9**, 371-377. https://doi.org/10.4153/CJM-1957-044-3

[5] Yin, J.H. and Li, J.S. (2005) Two Sufficient Conditions for a Graphic Sequence to Have a Realization with Prescribed Clique Size. *Discrete Mathematics*, **301**, 218-227. https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.03.028