Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2018, 7(5), 609-616**
Published Online May 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.75072

Hans汉斯

Extinction and Stationary Distribution of a Classic Stochastic Viral Infection Model with Saturation Rate and Logistic Growth

Chao Luo, Xiaodan Zhang

School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing
Email: luochao422902@126.com

Received: May 1st, 2018; accepted: May 17th, 2018; published: May 25th, 2018

Abstract

In this paper, a classic stochastic viral infection model with saturation rate and logistic growth is researched. To be start, when $R_0 < 1$, the boundeness of uninfected cells and the extinction of infected cells are discussed. Then, when $R_0 > 1$, some available Lyapunov functions are constricted and some sufficient conditions are established for stationary distribution. The theory verifies that infected cells keep persistence *in vivo*.

Keywords

Saturation Rate, Logistic Growth, Stationary Distribution

一类带有饱和发生率和Logistic增长的随机病毒感染模型的灭绝性及平稳分布

罗　超，张晓丹

北京科技大学数理学院，北京
Email: luochao422902@126.com

收稿日期：2018年5月1日；录用日期：2018年5月17日；发布日期：2018年5月25日

摘　要

本文研究了具有饱和发生率和logistic增长的随机病毒感染模型，当病毒感染细胞基本再生数 $R_0 < 1$ 时，

文章引用: 罗超, 张晓丹. 一类带有饱和发生率和 Logistic 增长的随机病毒感染模型的灭绝性及平稳分布[J]. 应用数学进展, 2018, 7(5): 609-616. DOI: 10.12677/aam.2018.75072

确定未感染细胞的有界性和病毒感染细胞的灭绝性；当病毒感染细胞基本在生数 $R_0 > 1$ 时，构建适当的Lyapunov函数，确定平稳分布的充分条件。它显示了病毒感染在机体内持久性存在。

关键词

饱和发生率，Logistic增长，平稳分布

1. 引言

自 Nowak 和 Bangham 提出病毒感染模型以来，随着科学的进步，病毒感染模型的机理逐渐被熟悉，模型不断被丰富和完善，为医学发展和疾病预防和控制提供重要的参考价值。许多文献中所提出病毒感染模型均在理想状态和确定参数来研究系统的稳定性分析[1]-[8]。在文献[3]中，Bonhoeffer 等提出的病毒感染模型：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = s - dx - \beta xy \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \beta xy - \mu y \end{cases}$$

然而在一些生态数学模型中，无论环境波动如何，确定性系统都有一定的局限性，对于数值拟合并非理想[9]。自然界任何事物不可能处在绝对稳定的状态，必然受到环境的波动影响，因此一些学者将随机波动因素考虑在传染病及病毒模型中[9]-[16]，本文根据[3]中的模型，考虑饱和感染发生率，未感染细胞的 logistic 增长，及未感染细胞的死亡率和免疫发生率的波动影响，提出如下病毒感染模型

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = s + rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right) - dx - \dfrac{kxy}{x+y} + \sigma_1 x \dfrac{\mathrm{d}B_1(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{kxy}{x+y} - (a+\mu)y + \sigma_2 y \dfrac{\mathrm{d}B_2(t)}{\mathrm{d}t} \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，x 是未感染细胞，y 是感染细胞，s 是宿主细胞以常数生产，r 为宿主细胞最大生产率，K 为体内细胞最大承载量，d 为自然死亡率，k 为饱和发生率，a 为免疫细胞作用下的感染细胞死亡率，μ 为感染细胞自然死亡率。σ_1^2, σ_2^2 为高斯白噪音强度，$B_1(t), B_2(t)$ 为标准的维纳过程在概率空间 $\left(\Omega, F, (F_t)_{t>0}, P\right)$ 上。

本文令病毒感染细胞基本在生数 $R_0 = \dfrac{k}{a+\mu}$。接下来将讨论模型(1)的灭绝性和平稳分布性质。

2. 随机微分方程的基本理论[17]

考虑如下 n 维随机微分方程

$$\mathrm{d}X(t) = f\left(X(t), t\right)\mathrm{d}t + g\left(X(t), t\right)\mathrm{d}B(t)$$

对于 $t > t_0$，和任意初值 $X(t_0) = X_0 \in R^n$。$B(t)$ 是在全概率空间 $\left(\Omega, F, \{F_t\}_{t>0}, P\right)$ 上的标准维纳过程。

在 $R^n\times[t_0,+\infty)$ 上，定义在 $C^{2,1}\left(R^n\times[t_0,+\infty)\right)$ 全体的非负函数 $V(X)$ 在 X 处均有连续的二阶微分和在 t 处有连续的一阶微分。上述方程的微分算子 L 被定义为：

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}f_i(X,t)\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left[g^{\mathrm{T}}(x_i,t)g(x_j,t)\right]_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$$

若 L 是 $V\in C^{2,1}\left(R^n\times[t_0,\infty)\right)$ 的微分算子，则有：

$$LV(X,t)=V_t(X,t)+V_X(X,t)f(X,t)+\frac{1}{2}trace\left[g^{\mathrm{T}}(X,t)V_{XX}(X,t)g(X,t)\right],$$

其中 $V_t=\frac{\partial V}{\partial t},V_X=\left(\frac{\partial V}{\partial x_i},\cdots,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right),V_{XX}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{n\times n}$。若 $X(t)\in R^n$，应用伊藤公式，有：

$$\mathrm{d}V(x(t),t)=LV(x(t),t)\mathrm{d}t+V_X(x(t),t)g(x(t),t)\mathrm{d}B(t).$$

3. 模型(1)全局正解的存在唯一性和感染细胞的存在与灭绝性

定理 1 对于任意的初值 $(x(0),y(0))\in R_+^2$，系统(2)有唯一正解 $(x(t),y(t))$ 且以概率 1 存在。

证明类似于毛学荣等人[18]，故省略。

定理 2 若 $R_0<1$ 时，若 $(x(t),y(t))$ 是模型(1)带有任意初值 $(x(0),y(0))\in R_+^2$ 的解，则有：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\left(x(s)-\frac{K(r-d)}{2r}\right)^2\mathrm{d}s\le\frac{sK}{r}+\frac{K^2(r-d)^2}{4r^2}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln y(t)}{t}\le(a+\mu)(R_0-1)-\frac{1}{2}\sigma_2^2$$

即感染细胞灭绝。

证明 (i)由于模型(2)的第一个方程为：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=s+rx\left(1-\frac{x}{K}\right)-dx-\frac{kxy}{x+y}+\sigma_1x\frac{\mathrm{d}B_1(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

由(1)可知 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\le s+rx\left(1-\frac{x}{K}\right)-dx+\sigma_1x\frac{\mathrm{d}B_1(t)}{\mathrm{d}t}$。

将上式不等式两边同时在区间 $[0,t]$ 上积分，因此有：

$$x(t)-x(0)\le st+\int_0^t\left[rx(s)\left(1-\frac{(s)}{K}\right)-d(s)\right]\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma_1x(s)\mathrm{d}B_1(s) \tag{2}$$

(2)式两边同时除以 t，有：

$$\frac{x(t)}{t}-\frac{x(0)}{t}\le s+\frac{1}{t}\int_0^t\left[rx(s)\left(1-\frac{(s)}{K}\right)-d(s)\right]\mathrm{d}s+\frac{1}{t}\int_0^t\sigma_1x(s)\mathrm{d}B_1(s)$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{t}\int_0^t\left(x(s)-\frac{K(r-d)}{2r}\right)^2\mathrm{d}s\\&\le\frac{sK}{r}+\frac{K^2(r-d)^2}{4r^2}+\frac{K}{r}\left[\frac{x(t)}{t}-\frac{x(0)}{t}\right]+\frac{1}{t}\frac{K}{r}\int_0^t\sigma_1x(s)\mathrm{d}B_1(s)\end{aligned} \tag{3}$$

由定理 1 可知：$\lim_{t\to+\infty}\frac{x(0)}{t}=0$，$\lim_{t\to+\infty}\frac{x(t)}{t}=0$；令 $G_1(t)=\int_0^t\sigma_1 x(s)\mathrm{d}B_1(s)$，则 $G_1(t)$ 是鞅。有 $\langle G_1,G_1\rangle_t=\int_0^t\sigma_1^2 x(s)\mathrm{d}s\le\sup_{t>0}\left(\sigma_1^2 x(t)\right)t$，根据鞅的强大数定律[19]，则有 $\lim_{t\to+\infty}\frac{G_1(t)}{t}=0$。

将(3)式两边同时取极限 $t\to\infty$，则有：

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\left(x(s)-\frac{K(r-d)}{2r}\right)^2\mathrm{d}s\le\frac{sK}{r}+\frac{K^2(r-d)^2}{4r^2}$$

(ii) 定义函数 $V_2=\ln y(t)$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V_2&=\frac{1}{y}\left(\frac{kx(t)y(t)}{x(t)+y(t)}-(a+\mu)y(t)\right)-\frac{1}{2}\sigma_2^2+\sigma_2\mathrm{d}B_2(t)\\&=\frac{ky(t)}{x(t)+y(t)}-(a+\mu)-\frac{1}{2}\sigma_2^2+\sigma_2\mathrm{d}B_2(t)\\&\le k-(a+\mu)-\frac{1}{2}\sigma_2^2+\sigma_2\mathrm{d}B_2(t)\\&=(a+\mu)\left(\frac{k}{a+\mu}-1\right)-\frac{1}{2}\sigma_2^2+\sigma_2\mathrm{d}B_2(t)\\&:=(a+\mu)(R_0-1)-\frac{1}{2}\sigma_2^2+\sigma_2\mathrm{d}B_2(t)\end{aligned}\tag{4}$$

将上式两边同时积分在区间 $[0,t]$，有：

$$\ln y(t)-\ln y(0)=\left[(a+\mu)(R_0-1)-\frac{1}{2}\sigma_2^2\right]t+\int_0^t\sigma_2\mathrm{d}B_2(s)$$

其中令 $G_2(t)=\int_0^t\sigma_2\mathrm{d}B_2(s)$，则 $G_2(t)$ 是鞅。有 $\langle G_2,G_2\rangle_t=\int_0^t\sigma_2^2\mathrm{d}s=\sigma_2^2 t$，根据鞅的强大数定律[19]，则有 $\lim_{t\to+\infty}\frac{G_2(t)}{t}=0$，故有如下：

$$\frac{\ln y(t)}{t}=(a+\mu)(R_0-1)-\frac{1}{2}\sigma_2^2+\frac{\ln y(0)}{t}+\frac{1}{t}\int_0^t\sigma_2\mathrm{d}B_2(s)\tag{5}$$

当(5)式两边取极限 $t\to+\infty$，又由定理 1 可知，初值 $y(0)$ 有界，故 $\lim_{t\to+\infty}\frac{y(0)}{t}=0$，因此 $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln y(t)}{t}\le(a+\mu)(R_0-1)-\frac{1}{2}\sigma_2^2$。

即当 $R_0<1$，病毒感染细胞灭绝。

4. 模型(1.1)的平稳分布

在这部分，我们引入一个有用的引理。在 h 维欧氏空间中，$X(t)$ 是齐次马尔科夫程且满足如下方程

$$\mathrm{d}X(t)=f(X)\mathrm{d}t+\sum_i^j g_i(X)\mathrm{d}B_i(t)$$

则扩散矩阵定义为：

$$Q(X)=\left(H_{pq}(x)\right),H_{pq}(x)=g_i^p(x)g_i^q(x)$$

因此，有如下引理：

引理 1 [17] [20] 如果存在一个具有光滑边界 ∂U 的有界开域 $U \in R_+^2$，具有如下性质：

1) 在域 U 及其邻域中，存在常数 $J>0$ 满足 $\sum_{p,q=1}^{2} H_{pq}(x)\phi_p\phi_q \ge J\phi^2$， $x \in U$， $\phi \in R_+^2$， $\phi=\sqrt{\phi_1^2+\phi_2^2}$；

2) 若 $X_0 \in R_+^2 \setminus U$，对于任一个紧集 $K \in R_+^2$，存在一个路径从 X_0 出发到达集合 U，其平均时间 $E\tau$ 是有限的，即 $\underset{X_0 \in K}{E\tau} < +\infty$。

若上述条件成立，则马尔科夫过程 $X(t)$ 有唯一的平稳分布 $\pi(\cdot)$。且若 $f(\cdot)$ 关于测度 π 为可积函数，则：

$$P\left\{\frac{1}{T}\int_0^T f(X(t))\mathrm{d}t = f_{R_+^2}(u)\pi(du)\right\}=1$$

引理 2 当 $\sigma_1=\sigma_2=0$ 时，随机系统(2)即为确定系统，其平衡点为 (x^*,y^*)

$$x^*=\frac{(a+\mu)(Kr-Kd-r)+\sqrt{K^2\left((a+\mu)(r-d)-k\right)^2+4(a+\mu)^2 Krs}}{2r(a+\mu)}$$

$$y^*=(k-a-\mu)\frac{(a+\mu)(Kr-Kd-r)+\sqrt{K^2\left((a+\mu)(r-d)-k\right)^2+4(a+\mu)^2 Krs}}{2r(a+\mu)^2}$$

定理 3 若 $R_0>1$ 时，以下条件成立：

1) $\frac{r}{K} > \frac{k(y^*+5)}{2(x^*+y^*)}$， $a+\mu > \frac{k(y^*+5)}{2(x^*+y^*)}+\sigma_2^2$

2) $0<M<\min\left(m_1(x^*)^2, m_2(y^*)^2\right)$

$$m_1=\frac{r}{K}-\frac{k(y^*+5)}{2(x^*+y^*)}, m_2=a+\mu-\frac{k(y^*+5)}{2(x^*+y^*)}-\sigma_2^2$$

带有初值 $X(0)\in R_+^2$ 随机微分方程(2)，存在一个平稳分布 $\pi(\cdot)$，其遍历性为：

$$P\left\{\frac{1}{T}\int_0^T f(X_i(t))\mathrm{d}t = \int_{R_+^2} f(x,y)\pi(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\right\}=1, i=1,2.$$

证明 (i) 由模型(1)可知，其扩散矩阵为：

$$Q(X)=\begin{pmatrix}\sigma_1^2x^2 & 0\\ 0 & \sigma_2^2y^2\end{pmatrix}$$

令 $G=\min_{(x,y)\in U}\left(\sigma_1^2x^2,\sigma_2^2y^2\right)$，有如下

$$\sum_{p,q=1}^{2} H_{pq}(x)\phi_p\phi_q=\sigma_1^2x^2\phi_1^2+\sigma_2^2y^2\phi_2^2 \ge G\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right), \phi_1,\phi_2 \in R_+^2$$

因此引理 1 中的(1)成立。

(ii) 存在一个邻域 U 和一个非负函数 $V \in C^2$，使得 $X_0 \in R_+^2 \setminus U$ 时， $LV<0$。由于 $R_0>1$，模型(1.1)的确定性系统的平衡点为 (x^*,y^*)，即为引理 2 中的平衡点。定义 V 函数如下：

$$V=x-x^*-x^*\ln\frac{x}{x^*}+y-y^*-y^*\ln\frac{y}{y^*}+\left(y-y^*\right)^2$$

令 $V_{11}=x-x^*-x^*\ln\frac{x}{x^*}$， $V_{12}=y-y^*-y^*\ln\frac{y}{y^*}$， $V_{13}=\left(y-y^*\right)^2$

运用伊藤公式，则有

$$
\begin{aligned}
LV_{11}&=\frac{\left(x-x^*\right)}{x}\left[s+rx\left(1-\frac{x}{K}\right)-dx-\frac{kxy}{x+y}\right]+\frac{1}{2}\sigma_1^2x^*\\
&=\left(x-x^*\right)\left[\frac{s}{x}-\frac{s}{x^*}-\frac{r}{K}\left(x-x^*\right)+\frac{ky^*}{x^*+y^*}-\frac{kxy}{x+y}\right]+\frac{1}{2}\sigma_1^2x^*\\
&=\frac{s\left(x-x^*\right)^2}{xx^*}-\frac{r}{K}\left(x-x^*\right)^2-\frac{kx\left(x-x^*\right)\left(y-y^*\right)}{\left(x+y\right)\left(x^*+y^*\right)}+\frac{ky\left(x-x^*\right)^2}{\left(x+y\right)\left(x^*+y^*\right)}+\frac{1}{2}\sigma_1^2x^*\\
&\le-\frac{r}{K}\left(x-x^*\right)^2+\frac{k}{x^*+y^*}\left[\frac{1}{2}\left(x-x^*\right)^2+\left(y-y^*\right)^2\right]+\frac{k\left(x-x^*\right)^2}{x^*+y^*}+\frac{1}{2}\sigma_1^2x^*\\
&\le-\left(\frac{r}{K}-\frac{3k}{2\left(x^*+y^*\right)}\right)\left(x-x^*\right)^2+\frac{k\left(y-y^*\right)^2}{x^*+y^*}+\frac{1}{2}\sigma_1^2x^*
\end{aligned}
\tag{6}
$$

同样，我们有：

$$
\begin{aligned}
LV_{12}&=\left(y-y^*\right)\left[\frac{kxy}{x+y}-\frac{ky^*}{x^*+y^*}\right]+\frac{1}{2}\sigma_2^2y^*\\
&=\frac{kx\left(y-y^*\right)^2}{\left(x+y\right)\left(x^*+y^*\right)}+\frac{ky\left(x-x^*\right)\left(y-y^*\right)}{\left(x+y\right)\left(x^*+y^*\right)}+\frac{1}{2}\sigma_2^2y^*\\
&\le\frac{k\left(y-y^*\right)^2}{x^*+y^*}+\frac{k}{\left(x^*+y^*\right)}\left[\frac{1}{2}\left(x-x^*\right)^2+\frac{1}{2}\left(y-y^*\right)^2\right]+\frac{1}{2}\sigma_2^2y^*\\
&=\frac{3k}{2\left(x^*+y^*\right)}\left(y-y^*\right)^2+\frac{k\left(x-x^*\right)^2}{2\left(x^*+y^*\right)}+\frac{1}{2}\sigma_2^2y^*
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
LV_{13}&=\left(y-y^*\right)\left[\frac{kxy}{x+y}-\left(a+\mu\right)y\right]+\frac{1}{2}\sigma_2^2y^2\\
&=\left(y-y^*\right)\left[\frac{kxy}{x+y}-\left(a+\mu\right)y-\frac{kx^*y^*}{x^*+y^*}+\left(a+\mu\right)y^*\right]+\frac{1}{2}\sigma_2^2y^2\\
&=\frac{kxy^*\left(y-y^*\right)^2}{\left(x+y\right)\left(x^*+y^*\right)}+\frac{kyy^*\left(x-x^*\right)\left(y-y^*\right)}{\left(x+y\right)\left(x^*+y^*\right)}-\left(a+\mu\right)\left(y-y^*\right)^2+\frac{1}{2}\sigma_2^2y^2
\end{aligned}
$$

由于 $\left(c+d\right)^2\le2\left(c^2+d^2\right)$ 成立(c,d 均非负)，则：

$$
\begin{aligned}
LV_{13}&\le\frac{ky^*\left(y-y^*\right)^2}{x^*+y^*}+\frac{ky^*}{x^*+y^*}\left[\frac{1}{2}\left(y-y^*\right)^2+\frac{1}{2}\left(x-x^*\right)^2\right]\\
&\quad-\left(a+\mu\right)\left(y-y^*\right)^2+\sigma_2^2\left(y-y^*\right)^2+\sigma_2^2\left(y^*\right)^2\\
&=-\left(a+\mu-\frac{3ky^*}{2\left(x^*+y^*\right)}-\sigma_2^2\right)\left(y-y^*\right)^2+\frac{ky^*}{2\left(x^*+y^*\right)}\left(x-x^*\right)^2+\sigma_2^2\left(y^*\right)^2
\end{aligned}
\tag{8}
$$

综上：

$$
\begin{aligned}
LV \le & -\left(\frac{r}{K}-\frac{k\left(y^*+5\right)}{2\left(x^*+y^*\right)}\right)\left(x-x^*\right)^2-\left(a+\mu-\frac{k\left(y^*+5\right)}{2\left(x^*+y^*\right)}-\sigma_2^2\right)\left(y-y^*\right)^2 \\
& +\frac{1}{2}\sigma_1^2 x^*+\sigma_2^2\left(y^*\right)^2+\frac{1}{2}\sigma_2^2 y^* \\
& : -m_1\left(x-x^*\right)^2-m_2\left(y-y^*\right)^2+M
\end{aligned} \tag{9}
$$

若 $0<M<\min\left(m_1\left(x^*\right)^2 m_2\left(y^*\right)^2\right)$ 成立，则椭圆 $m_1\left(x-x^*\right)^2+m_2\left(y-y^*\right)^2=M$ 全属于 R_+^2。选取椭圆任意一个邻域 U 使得 U 的闭包 $\bar{U}\in R_+^2$。则对于任意的 $X\in R_+^2\setminus U$，有 $LV<0$。因此模型(1.1)有平稳分布。

5. 结论

本文首先考虑具有饱和发生率和 logistic 增长的随机病毒感染模型。首先当 $R_0<1$，我们分析了感染细胞的灭绝及宿主细胞的生存。然后，我们构造有效的 Lyapunov 函数，确立满足平稳分布的充分条件，理论证明感染能在机体内持续存在。

参考文献

[1] Nowak, M.A. and Bangham, C.R. (1996) Population Dynamics of Immune Responses to Persistent Viruses. *Science*, **272**, 74-79. https://doi.org/10.1126/science.272.5258.74

[2] Boer, R.J.D. and Perelson, A.S. (1995) Towards a General Function Describing T Cell Proliferation. *Journal of Theoretical Biology*, **175**, 567-576. https://doi.org/10.1006/jtbi.1995.0165

[3] Bonhoeffer, S., Coffin, J.M. and Nowak, M.A. (1997) Human Immunodeficiency Virus Drug Therapy and Virus Load. *Journal of Virology*, **71**, 3275-3278.

[4] Xie, Q., Huang, D., Zhang, S., *et al.* (2010) Analysis of a Viral Infection Model with Delayed Immune Response. *Applied Mathematical Modelling*, **34**, 2388-2395. https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.11.005

[5] 唐婷婷. 具有非线性发生率的随机传染病模型的全局动态分析[D]: [硕士学位论文]. 乌鲁木齐: 新疆大学, 2016.

[6] 赵爱民, 李文娟. 一类离散 SIRS 传染病模型的持久性[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2016, 39(1): 24-30.

[7] 石栋梁, 李必文, 龚纯浩, 等. 一类具有时滞的非线性 SIRS 传染病模型的分析[J]. 湖北师范大学学报(自然科学版), 2016, 36(1): 83-89.

[8] 宋修朝, 李建全, 杨亚莉. 一类具有非线性发生率的 SEIR 传染病模型的全局稳定性分析[J]. 工程数学学报, 2016, 33(2): 175-183.

[9] Lahrouz, A., Omari, L. and Kiouach, D. (2011) Global Analysis of a Deterministic and Stochastic Nonlinear SIRS Epidemic Model. *Nonlinear Analysis Modelling & Control*, **16**, 59-76.

[10] 王冰杰. 基于潜伏期有传染力的 SEIR 传染病模型的控制策略[J]. 东北师大学报(自然科学), 2014, 46(1): 28-32.

[11] 于佳佳. 随机多群体时滞 SIR 模型的地方病平衡点的稳定性[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2013, 30(6): 723-728.

[12] 周艳丽, 张卫国, 原三领. 一类随机 SIRS 传染病模型的持久性和灭绝性[J]. 生物数学学报, 2015(1): 79-92.

[13] Jiang, D., Liu, Q., Shi, N., *et al.* (2017) Dynamics of a Stochastic HIV-1 Infection Model with Logistic Growth. *Physica A Statistical Mechanics & Its Applications*, **469**, 706-717. https://doi.org/10.1016/j.physa.2016.11.078

[14] Chen, Y., Wen, B. and Teng, Z. (2017) The Global Dynamics for a Stochastic SIS Epidemic Model with Isolation. *Physica A Statistical Mechanics & Its Applications*, **496**, 299-317.

[15] Cao, B., Shan, M., Zhang, Q., *et al.* (2017) A Stochastic SIS Epidemic Model with Vaccination. *Physica A Statistical Mechanics & Its Applications*, **486**, 127-143. https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.05.083

[16] Zhang, Y., Fan, K., Gao, S., *et al.* (2017) A Remark on Stationary Distribution of a Stochastic SIR Epidemic Model with Double Saturated Rates. *Applied Mathematics Letters*, **76**, 46-52.

[17] Khasminskii, R. (2012) Stochastic Stability of Differential Equations. Springer, Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-23280-0

[18] Mao, X., Marion, G. and Renshaw, E. (2002) Environmental Noise Suppresses Explosion in Population Dynamics. *Stochastic Processes and their Applications*, **97**, 95-110. https://doi.org/10.1016/S0304-4149(01)00126-0

[19] Liptser, R.S. (1980) A Strong Law of Large Numbers for Local Martingales. *Stochastics—An International Journal of Probability & Stochastic Processes*, **3**, 217-228. https://doi.org/10.1080/17442508008833146

[20] Cai, Y., Kang, Y. and Wang, W. (2017) A Stochastic SIRS Epidemic Model with Nonlinear Incidence Rate. Elsevier Science Inc., New York.