Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(7), 836-841
Published Online July 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.77100

Hans汉斯

Properties of Meromorphic Solutions of a Class of Difference Painlevé Equations

Baoqin Chen, Sheng Li*

Faculty of Mathematics and Computer Science, Guangdong Ocean University, Zhanjiang Guangdong
Email: cbqchen@126.com, *lish_ls@qq.com

Received: Jun. 23rd, 2018; accepted: Jul. 13th, 2018; published: Jul. 20th, 2018

Abstract

This paper studies a class of Painlevé difference equations of the form $w(z+1)w(z-1)=h(z)w^2(z)$ where $h(z)\in S(w)$ is a rational function, and proves the following conclusions: 1) if *w* has finitely many zeros and poles, then $\rho(w)\in\{1,2\}$ and $w=Re^{a_2z^2+a_1z+a_0}$, where *R* is a rational function, and a_0,a_1,a_2 are constants such that either $a_1\neq 0$ or $a_2\neq 0$; 2) if *w* has infinitely many zeros or poles, then $\rho(w)\geq\max\{\lambda(w),\lambda(1/w)\}\geq 1$.

Keywords

Difference Painlevé Equations, Growth, Poles, Zeros

一类差分潘勒韦方程亚纯解的性质

陈宝琴，李　升*

广东海洋大学，数学与计算机学院，广东　湛江
Email: cbqchen@126.com, *lish_ls@qq.com

收稿日期：2018年6月23日；录用日期：2018年7月13日；发布日期：2018年7月20日

摘　要

本文研究了一类的形如$w(z+1)w(z-1)=h(z)w^2(z)$的差分潘勒韦方程，其中$h(z)\in S(w)$为有理函数，得到以下结论：1) 若*w*只有有限个零点和极点，则$\rho(w)\in\{1,2\}$且$w=Re^{a_2z^2+a_1z+a_0}$，其中*R*为有理函数，

*通讯作者。

文章引用: 陈宝琴, 李升. 一类差分潘勒韦方程亚纯解的性质[J]. 应用数学进展, 2018, 7(7): 836-841.
DOI: 10.12677/aam.2018.77100

a_0,a_1,a_2为常数，a_1,a_2不同时为0；2) 若w有无穷多个零点或极点，则$\rho(w)\ge\max\{\lambda(w),\lambda(1/w)\}\ge 1$。

关键词

差分潘勒韦方程，增长级，极点，零点

1. 引言

在本文中，亚纯函数是指该函数在整个复平面上亚纯。在下文中，假定所有读者都熟悉亚纯函数的 Nevanlinna 理论和潘勒韦方程理论及其基本记号[1] [2] [3]。特别地，对亚纯函数f，分别用$N(r,f)$，$m(r,f)$，$T(r,f)$，$\lambda(r,f)$，$\lambda(r,1/f)$，$\rho(f)$和$\rho_2(f)$表示f的极点计数函数，均值函数，特征函数，零点收敛指数，极点收敛指数，增长级和超级。如果g满足$T(r,g)=o(T(r,f))(r\to+\infty,r\notin E)$，其中$E$为对数测度有限的集合，则称$g$为$f$的小函数。用$S(f)$表示$f$的所有小函数之集。

微分潘勒韦方程是一类物理背景深厚、应用广泛的重要方程。人们开展相关的研究已有一百多年，并取得了极其丰富的成果。近十多年来，人们通过引入 Nevanlinna 理论深入研究复域差分、差分方程，并取得了一些优秀的成果[4]-[11]。这其中的奠基性工作由 Halburd 和 Korhonen [12]以及 Chiang 和 Feng [13]分别独立给出。事实上，他们的研究成果，促进了差分的 Nevanlinna 理论的建立以及差分潘勒韦方程的发展。另一项重要的工作是 Halburd 和 Korhonen [5]，以及 Ronkainen [7]对非线性差分方程的分类工作。他们给出了几类差分 Riccati 方程和差分潘勒韦方程[5] [7]。在此仅给出以下与本文密切相关的结果。

定理 A [7]：假设方程

$$w(z+1)w(z-1)=R(z,f) \tag{1}$$

有超级小于 1 的可容许解w，其中$R(z,w)$关于z亚纯且为w的有理函数，则或者w满足差分 Riccati 方程

$$w(z+1)=\frac{\alpha(z)w(z)+\beta(z)}{w(z)+\gamma(z)},$$

其中$\alpha(z),\beta(z),\gamma(z)\in S(w)$为代数体函数，或者方程(1)等价于以下形式之一：

$$w(z+1)w(z-1)=\frac{\eta(z)w^2(z)-\lambda(z)w(z)+\mu(z)}{(w(z)-1)(w(z)-\nu(z))}, \tag{2a}$$

$$w(z+1)w(z-1)=\frac{\eta(z)w^2(z)-\lambda(z)w(z)}{w(z)-1}, \tag{2b}$$

$$w(z+1)w(z-1)=\frac{\eta(z)(w(z)-\lambda(z))}{w(z)-1}, \tag{2c}$$

$$w(z+1)w(z-1)=h(z)w^m(z). \tag{2d}$$

在(2a)中，系数满足

$$\kappa^2(z)\mu(z+1)\mu(z-1)=\mu^2(z),$$
$$\lambda(z+1)\mu(z)=\kappa(z)\lambda(z-1)\mu(z+1),$$
$$\kappa(z)\lambda(z+2)\lambda(z-1)=\kappa(z-1)\lambda(z)\lambda(z+1),$$

和以下情况之一：1) $\eta\equiv 1,\nu(z+1)\nu(z-1)=1,\kappa(z)=\nu(z)$；2) $\eta(z+1)=\eta(z-1)=\nu(z),\kappa\equiv 1$。

在(2b)中，系数满足 $\eta(z)\eta(z+1)=1$ 和 $\lambda(z+2)\lambda(z-1)=\lambda(z)\lambda(z+1)$。

在(2c)中，系数满足

1) $\eta\equiv 1$，且 $\lambda(z)=\lambda(z+1)\lambda(z-1)$ 或 $\lambda(z+3)\lambda(z-3)=\lambda(z+2)\lambda(z-2)$ 成立；
2) $\lambda(z+1)\lambda(z-1)=\lambda(z+2)\lambda(z-2),\eta(z+1)\lambda(z+1)=\lambda(z+2)\eta(z-1),\eta(z)\eta(z-1)=\eta(z+2)\eta(z+3)$；
3) $\eta(z+2)\eta(z-2)=\eta(z)\eta(z-1),\lambda(z)=\eta(z-1)$；
4) $\lambda(z+3)\lambda(z-3)=\lambda(z+2)\lambda(z-2)\lambda(z),\eta(z)\lambda(z)=\eta(z+2)\eta(z-2)$。

在(2d)中，$h(z)\in S(w)$ 且 $m\in\mathbb{Z},|m|\le 2$。

在定理 A 中，方程(2a)~(2d)均为第三类差分潘勒韦方程。蓝双婷和陈宗煊[8] [9]，张继龙和仪洪勋[10] [11]在一些特殊的系数条件下进行了研究，并得到一些很好的结果。本文考虑(2d)在 $m=2$ 且系数为有理函数的情况，即以下形式的第三类差分潘勒韦方程

$$w(z+1)w(z-1)=h(z)w^2(z), \tag{3}$$

其中，$h(z)\in S(w)$ 为有理函数，得到了以下结果：

定理 1：设 w 为方程(3)的有限级亚纯解，其中 $h(z)\in S(w)$ 为有理函数，则以下结论成立：

1) 若 w 只有有限个零点和极点，则 $\rho(w)\in\{1,2\}$ 且 $w=R\mathrm{e}^{a_2z^2+a_1z+a_0}$，其中 R 为有理函数，a_0,a_1,a_2 为常数，a_1,a_2 不同时为 0；

2) 若 w 有无穷多个零点或极点，则 $\rho(w)\ge\max\{\lambda(w),\lambda(1/w)\}\ge 1$。

注：方程(3)可能有级为无穷且超级为 1 的亚纯解；而在不考虑条件 $h(z)\in S(w)$ 时，方程(3)可能既有超越亚纯函数解，又有有理函数解，例如方程

$$w(z+1)w(z-1)=\frac{z^2-1}{z^2}w^2(z)$$

的其中五个解为 $w_1=z\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{2\pi iz}},w_2=z,w_3=z\mathrm{e}^z,w_4=z\sin(2\pi z),w_5=z/\sin(2\pi z)$。这里 w_2 是有理函数解，而

$$\rho(w_1)=+\infty,\rho(w_2)=\rho(w_3)=\rho(w_4)=\rho(w_5)=\rho_2(w_1)=1;\lambda(1/w_4)=\rho(w_4);\lambda(w_5)=\rho(w_5).$$

2. 引理

引理 1 [14]：假设 $f(z)$ 为有限级的亚纯函数，级为 $\rho(f)$。若在 $z=0$ 处，

$$f(z)=c_kz^k+c_{k+1}z^{k+1}+\cdots,c_k\ne 0,k\in\mathbb{Z},$$

则

$$f(z)=z^k\mathrm{e}^{Q(z)}\frac{P_1(z)}{P_2(z)},$$

其中 $P_1(z),P_2(z)$ 分别为 $f(z)$ 非零零点和极点的典型乘积，$Q_2(z)$ 为次数不超过 $\rho(f)$ 的多项式。

引理 2：假设 w 为方程(3)的非常数亚纯解，$h(z)\in S(w)$，则 w 为超越亚纯函数。

证明：利用反证法，假设 w 为方程(1)的有理函数解，则 w 至少有一个零点或极点，$T(r,w)=O(\log r)$。

由 $h(z)\in S(w)$ 可知 $h(z)$ 为常数函数，且

$$h(z)\equiv\lim_{z\to\infty}\frac{w(z+1)w(z-1)}{w^2(z)}=1.$$

这表明

$$w(z+1)w(z-1)=w^2(z).\tag{4}$$

为方便计，不妨设 0 为 $w(z)$ 的 $k_1\ge1$ 阶零点(事实上，若 z_1 为 $w(z)$ 的 k_1 阶零点，则 0 为 $w_1(z)=w(z+z_1)$ 的 k 阶零点，若 z_2 为 $w(z)$ 的 k_1 阶零点，则 0 为 $w_1(z)=1/w(z+z_0)$ 的 k_1 阶零点)。则由(4)可知，$w(1)w(-1)=w^2(0)$。下面分三种情况进行讨论。

情况 1：-1 为 $w(z)$ 的 $l_1\ge1$ 阶零点。此时由 $w^2(-2)=w(-1)w(-3)$，可知：

子情况 1.1：-2 既不是 $w(z)$ 的零点也不是 $w(z)$ 的极点，则 -3 为 $w(z)$ 的 l_1 阶极点。再由 $w^2(-3)=w(-2)w(-4)$，可知 -4 为 $w(z)$ 的 $2l_1$ 阶极点。依次类推，$-n(n=5,6,7,\cdots)$ 均为 $w(z)$ 的 $(n-2)l_1$ 阶极点，这表明 w 有无穷多个极点，与 w 为有理函数矛盾。

子情况 1.2：-2 为 $w(z)$ 的 $k_2\ge1$ 阶零点，则

1) 当 $2k_2-l_1=0$ 时，-3 既不是 $w(z)$ 的零点也不是 $w(z)$ 的极点，类似情况 1 可得类似的矛盾。

2) 当 $2k_2-l_1\le-1$ 时，-3 为 $w(z)$ 的 l_1-2k_2 阶极点。再由 $w^2(-3)=w(-2)w(-4)$，可知 -4 为 $w(z)$ 的 $2l_1-3k_2$ 阶极点。依次类推，$-n(n=5,6,7,\cdots)$ 均为 $w(z)$ 的 $(n-2)l_1-(n-1)k_2$ 阶极点，这表明 w 有无穷多个极点，与 w 为有理函数矛盾。

3) 当 $2k_2-l_1\ge1$ 时，-3 为 $w(z)$ 的 $2k_2-l_1$ 阶零点。再由 $w^2(-3)=w(-2)w(-4)$，由(1)和(2)中的讨论可知 -4 是 $w(z)$ 的极点且阶为 $3k_2-2l_1$。依此类推可得，$-n(n=5,6,7,\cdots)$ 均为 $w(z)$ 的 $(n-1)k_2-(n-2)l_1$ 阶零点。这表明 w 有无穷多个零点，与 w 为有理函数矛盾。

情况 2：-1 为 $w(z)$ 的 $l_1\ge1$ 阶极点。类似子情况 1.2 中(2)的讨论可得类似的矛盾。

情况 3：-1 既不是 $w(z)$ 的零点也不是 $w(z)$ 的极点。类似子情况 1.1 可得类似的矛盾。

综上所述，引理 2 得证。

3. 定理 1 的证明

假设 w 为方程(1)的有限级非常数亚纯解，则由引理 2 可知，w 为超越亚纯函数。再由引理 1，可以将 w 记为

$$w(z)=z^k e^{Q(z)}\frac{P_1(z)}{P_2(z)},\tag{5}$$

其中 $P_1(z),P_2(z)$ 分别为 w 非零零点和极点的典型乘积，$Q(z)$ 为多项式且次数不超过 w 的级 $\rho(w)$。

情况 1：w 只有有限个零点和极点，此时 $P_1(z),P_2(z)$ 为多项式，从而 $Q(z)$ 为非常数多项式。将(5)代入(3)可得

$$h(z)=\frac{(z+1)^k(z-1)^k}{z^{2k}}\frac{P_2^2(z)P_1(z+1)P_1(z-1)}{P_1^2(z)P_2(z+1)P_2(z-1)}e^{2Q(z)-Q(z+1)-Q(z-1)},$$

即

$$e^{Q(z+1)+Q(z-1)-2Q(z)}=\frac{(z+1)^k(z-1)^k}{z^{2k}h(z)}\frac{P_2^2(z)P_1(z+1)P_1(z-1)}{P_1^2(z)P_2(z+1)P_2(z-1)}.\tag{6}$$

记

$$Q(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0,$$

其中 $a_n\neq 0,n\geq 1$。注意到(6)的右边是有理函数，故

$$Q(z+1)+Q(z-1)-2Q(z)=c. \tag{7}$$

容易验证：

1) 当 $n=1$ 时，$Q(z+1)+Q(z-1)-2Q(z)=0$；

2) 当 $n=2$ 时，$Q(z+1)+Q(z-1)-2Q(z)=2C_2^{2-2}a_2z^{2-2}$；

3) 当 $n=3$ 时，$Q(z+1)+Q(z-1)-2Q(z)=2\cdot\left(C_3^2a_3z^{3-2}+C_2^2a_2z^{2-2}\right)$。

由此再结合归纳法可得当 $n\geq 3$ 时，

$$Q(z+1)+Q(z-1)-2Q(z)=2\sum_{j=2}^{n}C_j^{j-2}a_jz^{j-2}\triangleq b_{n-2}z^{n-2}+b_{n-3}z^{n-3}+\cdots+b_0,$$

其中 $b_j=2C_j^{j-2}a_j,j=2,3,\cdots,n$。要使得(7)成立，必有 $n\leq 2$。这就得到

$$Q(z)=a_2z^2+a_1z+a_0,$$

其中 a_0,a_1,a_2 为常数，a_1,a_2 不同时为 0。

情况 2：w 有无穷多个零点或极点。不妨设 w 有无穷多个零点。注意到 h 为有理函数，至多有有限个零点和极点。故可以取到 w 的某个零点 z_m 使得 $h(z_m+k)\neq 0,\infty,\forall k\in\mathbb{Z}$。类似引理 2 的讨论，可以证明 $z_k-k(k=3,4,\cdots)$ 都是 w 零点(极点)。从而在圆 $\{z:|z|=r\leq s+|z_m|(s=1,2,\cdots)\}$ 内至少有 $s-2$ 个零点(极点)，从而得到

$$\lambda(r,w)=\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log N(r,1/w)}{\log r}\geq\lim_{s\to+\infty}\frac{\log((s-2-k)\log s)}{\log(s+|z_m|)}=1,$$

或

$$\lambda(r,1/w)=\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log N(r,w)}{\log r}\geq\lim_{s\to+\infty}\frac{\log((s-2-k)\log s)}{\log(s+|z_m|)}=1.$$

也就是

$$\rho(w)\geq\max\{\lambda(w),\lambda(1/w)\}\geq 1.$$

定理 1 证明完毕。

致　谢

本论文得到广东省高等学校优秀青年教师培养计划项目(YQ2015089)，广东自然科学基金项目(2015A030313620)，广东海洋大学优秀青年教师培养计划项目(2014007，HDYQ2015006)，广东海洋大学创新强校工程项目(gdou2016050209)的资助。

参考文献

[1] Laine, I. (1993) Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations. W.de Gruyter, Berlin. https://doi.org/10.1515/9783110863147

[2] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[3] 何育赞, 袁文俊, 李叶舟. 潘勒韦方程解析理论讲义[M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[4] Ablowitz, M., Halburd, R.G. and Herbst, B. (2000) On the Extension of Painlevé Property to Difference Equations.

Nonlinearity, **13**, 889-905. https://doi.org/10.1088/0951-7715/13/3/321

[5] Halburd, R.G. and Korhonen, R. (2007) Finite-Order Meromorphic Solutions and the Discrete Painlevé Equations. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **94**, 443-474. https://doi.org/10.1112/plms/pdl012

[6] Chen, Z.X. and Shon, K.H. (2010) Value Distribution of Meromorphic Solutions of Certain Difference Painlevé Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **364**, 556-566. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.10.021

[7] Ronkainen, O. (2010) Meromorphic Solutions of Difference Painlevé Equations. Ph.D. Thesis, Department of Physics and Mathematics, University of Eastern Finland, Joensuu.

[8] Lan, S.T. and Chen, Z.X. (2014) On Properties of Meromorphic Solutions of Certain Difference Painlevé Equations. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID: 208701. https://doi.org/10.1155/2014/208701

[9] Lan, S.T. and Chen, Z.X. (2014) Zeros, Poles and Fixed Points of Meromorphic Solutions of Difference Painlevé Equations. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID: 782024.

[10] Zhang, J.L. and Yi, H.X. (2013) Properties of Meromorphic Solutions of Painlevé III Difference Equations. *Advances in Difference Equations*, **2013**, Article ID: 256. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-256

[11] Zhang, J.L. and Yi, H.X. 2014 (2014) Borel Exceptional Values of Meromorphic Solutions of Painlevé III Difference Equations. *Advances in Difference Equations*, **2014**, Article ID: 144.

[12] Halburd, R.G. and Korhonen, R. (2006) Difference Analogue of the Lemma on the Logarithmic Derivative with Applications to Difference Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **314**, 477-487. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.04.010

[13] Chiang, Y.M. and Feng, S.J. (2008) On the Nevanlinna Characteristic of f (z + η) and Difference Equations in the Complex Plane. *Ramanujan Journal*, **16**, 105-129. https://doi.org/10.1007/s11139-007-9101-1

[14] Yang, C.C. and Yi, H.X. (2003) Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3626-8