Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(7), 947-955
Published Online July 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.77111

A Class of Strong Deviation Theorems for Arbitrary Random Field with Respect to the Binomial Distributions on Generalized Gambling Systems Indexed by a Tree

Zhong Qin, Kangkang Wang

School of Science, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang Jiangsu
Email: wkk_com@126.com

Received: Jul. 7th, 2018; accepted: Jul. 23rd, 2018; published: Jul. 30th, 2018

Abstract

In this paper, we study a class of strong limit theorems represented by inequalities , that is, strong deviation theorems for arbitrary random field with respect to product binomial distributions on the generalized gambling system indexed by an infinite tree with uniformly bounded degree by establishing the consistent distribution and nonnegative superior-martingale. As corollaries, some strong limit theorems for the independent random field with product binomial distributions and arbitrary random field indexed by a tree are obtained.

Keywords

Product Binomial Distribution, Strong Deviation, Random Field, Generalized Gambling System, Tree Index

广义赌博系统中任意树指标随机场关于二项乘积分布的一类强偏差定理

秦　忠，王康康

江苏科技大学理学院，江苏　镇江
Email: wkk_com@126.com

收稿日期：2018年7月7日；录用日期：2018年7月23日；发布日期：2018年7月30日

*通讯作者。

文章引用：秦忠，王康康．广义赌博系统中任意树指标随机场关于二项乘积分布的一类强偏差定理[J]．应用数学进展，2018, 7(7): 947-955. DOI: 10.12677/aam.2018.77111

摘　要

本文通过构造局部有限无穷树上相容分布和非负上鞅的方法，研究任意树上随机场在广义赌博系统中关于二项乘积分布的一类用不等式表示的强极限定理，也即强偏差定理。作为推论，得到了服从二项乘积分布的独立随机场的极限定理以及任意树指标随机场的强极限定理。

关键词

二项乘积分布，强偏差，随机场，广义赌博系统，树指标

1. 引言

设 T 为一无限连通树图，$\sigma,t(\sigma\neq t)$ 是 T 中任意两个顶点。那么应该有从 σ 到 t 的路径 $\sigma=x_1,x_2,\cdots,x_m=t$，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是不相同的顶点，这里 x_i 与 x_{i+1} 表示两个相邻的顶点。记 $m-1$ 为 σ 到 t 的距离。我们给 T 中的顶点进行编号，首先一个顶点被选定作为根顶点(简称根)，记为 o。若一个顶点 t 在根顶点 o 到顶点 σ 的路径上(且路径唯一)，则记 $t\leq\sigma$。设 σ,t 是 T 上两个相异的顶点，把离根顶点 o 最远的满足条件

$$\sigma\wedge t\leq\sigma \text{ 和 } \sigma\wedge t\leq t$$

的顶点记为 $\sigma\wedge t$。

本文记任意局部有限无穷树为 T。为了对树的概念加以解释，我们以 Cayley 树 $T_{C,N}$ 为例，我们设每个顶点都有 $N+1$ 个顶点相连(根顶点 0 除外)，见图 1。用 t 表示 T 中从根顶点 o 向上，从左向右依次数第 t 个顶点，记顶点 t 到根 o 的距离为 $|t|$。假如 $|t|=n$，则表示 t 位于第 n 层树上。同时把从根 o 到第 n 层所有顶点的子图记为 $T^{(n)}$，另外第 n 层上顶点的集合我们用 L_n 表示，树图 T 上从 m 层到 n 层之间的所有顶点的集合用 L_m^n 表示。对于任意顶点 t，我们把从 o 顶点到 t 的路径上离顶点 t 最近的顶点称为 t 的第一代父代，记为 1_t，同时称 t 为 1_t 子代。同理，t 的第二代父代记为 2_t。以此类推，n_t 表示 t 的第 n 代父代。设树图 T 的子图为 B，记 $X^B=\{X_t,t\in B\}$，则称 x^B 为 X^B 的实现。从根顶点 o 到第 n 层的所有顶点的数目我们用 $\left|T^{(n)}\right|$ 表示。

我们取 $S=\{0,1,2,\cdots,N\}$，记 $\Omega=S^T$。又设 $\omega=\omega(\cdot)\in\Omega$。其中 $\omega(\cdot)$ 为定义在 T 上并于 S 中取值的函数。F 为 Ω 的所有有限维柱子集所产生的最小 σ-代数。P 为可测空间 (Ω,F) 上的概率测度。设 $X=\{X_t,t\in T\}$ 是定义在测度空间 (Ω,F,P) 上的标准随机过程。即对于任意 $\omega=\{\omega(t),t\in T\}$ 我们定义

$$X_t(\omega)=\omega(t),t\in T$$

$$X^{T^{(n)}}\triangleq\left\{X_t,t\in T^{(n)}\right\},\quad \mu\left(X^{T^{(n)}}=x^{T^{(n)}}\right)=\mu\left(x^{T^{(n)}}\right)。\tag{1}$$

近三十年来，人们广泛且深入地研究了一般随机过程，如马氏链，独立随机序列，相依随机序列的强极限定理(参见[1] [2])。近几年来，随着概率论和信息论发展，树图随机场的强极限定理引起了学者们的广泛兴趣(参见[3])。而今，物理学界，概率与信息论学界对树图模型产生了浓厚兴趣。齐次树图上若干平稳随机场的熵率在文献[4]中被研究。齐次树指标的 PPG 不变随机场的遍历性与熵率被叶中行与 Berger [5]所

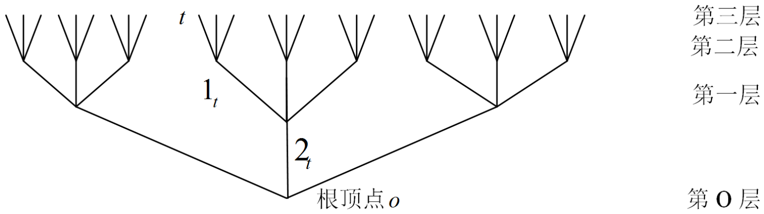

Figure 1. Cayley tree $T_{C,3}$
图 1. Cayley 树 $T_{C,3}$

探讨。然而其结果只讨论了依概率收敛。杨和刘[6] [7]探究了所谓齐次树指标以及 Cayley 树指标马氏链场的几乎必然收敛的熵定理。刘和王[8]也曾经讨论了有关树指标任意随机场状态序偶的若干小偏差定理。又有一类针对齐次树指标马氏链场的渐近均匀分割性质也曾经被杨卫国[9]讨论。王康康，李芳近来讨论了在所谓有限状态空间当中，齐次树图上任意随机场相对熵密度关于齐次的马氏分布一类所谓小偏差定理(参见[10])。王康康之后又进一步研究了广义 Bethe 树指标任意随机场相对于马氏链场的若干偏差定理(参见[11])。我们都知道，二项分布是一种经典分布，其在概率论，统计学与经济学等诸多领域均有广泛的应用。刘文曾经在文献[12]中专门研究了任意随机序列相对于 Poisson 分布的若干小偏差定理。

本文目的在于，在树指标随机场上构建一个相容分布和非负上鞅，研究广义赌博系统中任意局部有限无穷树图上乘积二项分布相对于任意随机场的若干强偏差定理。作为推论得到了树上服从独立二项乘积分布的随机场以及任意随机场的若干强极限定理。证明中采用了一种研究局部有限树指标随机场上强极限定理的新方法。

定义 1：设 $\left\{p_t,t\in T^{(n)}\right\}$ 是一个正实数序列，$p_t\in(0,1)$，$t\in T^{(n)}$。如果

$$\mu_P\left(X^{T^{(n)}}\right)=\prod_{k=0}^{n}\prod_{t\in L_k}C_N^{X_t}p_t^{X_t}\left(1-p_t\right)^{N-X_t},\ n\geq 0 \tag{2}$$

则 μ_P 称为树图 T 上服从二项乘积分布的随机场。

定义 2：树上广义随机选择的概念如下定义，我们先定义一个非负实值函数列 $f_n\left(x_0,\cdots,x_n\right)$，它们在区间 $[0,1]$ 上取值。令

$$Y_0=y\ (y\ \text{表示任意实数}),$$
$$Y_t=f_{|t|}\left(X_{1_t},X_{2_t},X_{3_t},\cdots,X_0\right),t\geq 1; \tag{3}$$

其中 $|t|$ 代表从根顶点 o 到顶点 t 的边数，我们记 $f_n\left(x_0,\cdots,x_n\right)$ 为广义随机选择函数列，$\left\{Y_t,t\in T^{(n)}\right\}$ 称为局部有限无穷树指标广义赌博系统。传统的链式赌博系统[13] $\left\{Y_n,n\geq 0\right\}$ 在两点集 $\{0,1\}$ 中取值。

为了表示任意随机场 $\left\{X_t,t\in T^{(n)}\right\}$ 与服从乘积二项分布的独立随机场之间的差异，我们引进如下定义：

定义 3：设 $\left\{X_t,t\in T^{(n)}\right\}$ 是具有分布(1)的任意随机场，$\left\{p_t,t\in T^{(n)}\right\}$ 是正数列，称

$$R_n(\omega)=\frac{\mu_P\left(X^{T^{(n)}}\right)}{\mu\left(X^{T^{(n)}}\right)}=\frac{\prod_{k=0}^{n}\prod_{t\in L_k}C_N^{X_t}p_t^{X_t}\left(1-p_t\right)^{N-X_t}}{\mu\left(X^{T^{(n)}}\right)} \tag{4}$$

为 $\left\{X_t,t\in T^{(n)}\right\}$ 相对与乘积二项分布

$$\prod_{k=0}^{n}\prod_{t\in L_k}C_N^{X_t}p_t^{X_t}\left(1-p_t\right)^{N-X_t},\ X_t\in S,t\in L_k,0\leq k\leq n \tag{5}$$

的似然比。

2. 主要结果

定理 1：设 $\left\{X_t, t\in T^{(n)}\right\}$ 是具有分布(1)的任意随机场，$\left\{\sigma_n(\omega), n\ge 1\right\}$ 是定义在 S 上的任意非负实值函数序列，$R_n(\omega)$ 由(4)定义。又设 $M>0, 0\le c<1$ 其为常数，令 $D(c)$ 为满足下列条件的样本点 ω 的全体：

$$D(c)=\left\{\omega:\lim_{n\to\infty}\sigma_n(\omega)=+\infty, \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tNp_t\le M, \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n}\ln R_n(\omega)\ge -c\right\} \tag{6}$$

则

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_t\left(X_t-Np_t\right)\le\sqrt{c}\left(2M+1\right)+c \quad \mu\text{-a.s.} \quad \omega\in D(c), \tag{7}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_t\left(X_t-Np_t\right)\ge -5\sqrt{c}\left(M+1\right) \quad \mu\text{-a.s.} \quad \omega\in D(c)。 \tag{8}$$

证明：取 (Ω, F, P) 为所考虑的概率空间，设 $\lambda\in(1/5,2)$ 为常数，并设 $q_t=1-p_t, t\in T^{(n)}$。令

$$\mu_Q\left(X^{T^{(n)}},\lambda\right)=\lambda^{\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tX_t}\prod_{k=0}^{n}\prod_{t\in L_k}\left(\frac{1}{\lambda^{Y_t}p_t+q_t}\right)^N C_N^{X_t}p_t^{X_t}q_t^{N-X_t} \tag{9}$$

则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{x^{L_n}\in S}\mu_Q\left(X^{T^{(n)}},\lambda\right)\\
&=\sum_{x^{L_n}\in S}\lambda^{\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tX_t}\prod_{k=0}^{n}\prod_{t\in L_k}\left(\frac{1}{\lambda^{Y_t}p_t+q_t}\right)^N C_N^{X_t}p_t^{X_t}q_t^{N-X_t}\\
&=\mu_Q\left(X^{T^{(n-1)}},\lambda\right)\sum_{x^{L_n}\in S}\prod_{t\in L_n}\lambda^{y_tx_t}\left(\frac{1}{\lambda^{y_t}p_t+q_t}\right)^N C_N^{x_t}p_t^{x_t}q_t^{N-x_t}\\
&=\mu_Q\left(X^{T^{(n-1)}},\lambda\right)\prod_{t\in L_n}\sum_{x_t\in S}\left(\frac{1}{\lambda^{y_t}p_t+q_t}\right)^N C_N^{x_t}\left(\lambda^{y_t}p_t\right)^{x_t}q_t^{N-x_t}\\
&=\mu_Q\left(X^{T^{(n-1)}},\lambda\right)\prod_{t\in L_n}\left(\frac{1}{\lambda^{y_t}p_t+q_t}\right)^N\left(\lambda^{y_t}p_t+q_t\right)^N=\mu_Q\left(X^{T^{(n-1)}},\lambda\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

因此，我们可知 $\left\{\mu_Q\left(X^{T^{(m)}},\lambda\right), n\ge 0\right\}$ 是定义在 $S^{T^{(n)}}$ 上的一族相容分布函数。又记

$$U_n(\lambda,\omega)=\frac{\mu_Q\left(X^{T^{(n)}},\lambda\right)}{\mu\left(X^{T^{(n)}}\right)}, \tag{11}$$

由(9)，我们可以把(11)整理为

$$U_n(\lambda,\omega)=\frac{1}{\mu\left(X^{T^{(n)}}\right)}\lambda^{\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tX_t}\prod_{k=0}^{n}\prod_{t\in L_k}\left(\frac{1}{\lambda^{Y_t}p_t+q_t}\right)^N\cdot\prod_{k=0}^{n}\prod_{t\in L_k}C_N^{X_t}p_t^{X_t}q_t^{N-X_t} \tag{12}$$

由于 μ_Q 和 μ 是两个概率测度，由 Doob 鞅收敛定理[4] [14] [15]很容易看出 $\left\{U_n(\lambda,\omega), n\ge 1\right\}$ 是一个非负上鞅。于是有

$$\lim_{n\to\infty} U_n(\lambda,\omega) = U_\infty(\lambda,\omega) < \infty \quad \mu\text{-a.s.} \tag{13}$$

由(13)与(6)式的第一式，我们有

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n} \ln U_n(\lambda,\omega) \le 0 \quad \mu\text{-a.s.} \quad \omega \in D(c) \tag{14}$$

由(4)与(12)，有

$$\ln U_n(\lambda,\omega) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k} Y_t X_t \ln\lambda - \sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k} N \ln\left(p_t \lambda^{Y_t} + q_t\right) + \ln R_n(\omega) \tag{15}$$

由(6)的第三式有

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n} \ln R_n(\omega) \ge -c \quad \mu\text{-a.s.} \quad \omega \in D(c) \tag{16}$$

由(14)，(15)与(16)有

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n}\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k} Y_t X_t \ln\lambda - \sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k} N \ln\left(p_t \lambda^{Y_t} + q_t\right)\right] \le c \quad \mu\text{-a.s.} \quad \omega \in D(c) \tag{17}$$

取 $\lambda \in (1,2)$，将(17)两边同除以 $\ln\lambda$，得：

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n}\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k} Y_t X_t - \sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k} \frac{N \ln\left(p_t \lambda^{Y_t} + q_t\right)}{\ln\lambda}\right] \le \frac{c}{\ln\lambda} \quad \mu\text{-a.s.} \quad \omega \in D(c) \tag{18}$$

由(18)及上极限的性质：

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n - b_n) \le d \Rightarrow \limsup_{n\to\infty}(a_n - c_n) \le \limsup_{n\to\infty}(b_n - c_n) + d$$

有

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k} Y_t\left(X_t - Np_t\right) \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k} N\left[\frac{\ln\left(p_t\lambda^{Y_t}+q_t\right)}{\ln\lambda} - Y_t p_t\right] + \frac{c}{\ln\lambda} \end{aligned} \quad \mu\text{-a.s.} \quad \omega \in D(c) \tag{19}$$

由(19)与不等式

$$1 - 1/x \le \ln x \le x - 1\ (x > 0)，\quad \lambda^x - 1 - x\ln\lambda \le (x\ln\lambda)^2 \mathrm{e}^{|x\ln\lambda|}|x\ln\lambda|，$$

及(6)式的第二式，并注意到 $0 \le Y_t \le 1, t \in T^{(n)}$，有

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k} Y_t\left(X_t - Np_t\right) \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k} N\left(\frac{p_t\lambda^{Y_t}+q_t-1}{\ln\lambda} - Y_t p_t\right) + \frac{c}{\ln\lambda} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k} N\left(\frac{p_t\lambda^{Y_t}+q_t-1}{\ln\lambda} - \frac{Y_t p_t \ln\lambda}{\ln\lambda}\right) + \frac{c}{\ln\lambda} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k} Np_t\left(\frac{\lambda^{Y_t}-1-Y_t\ln\lambda}{\ln\lambda}\right) + \frac{c}{\ln\lambda} \end{aligned} \tag{20}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Np_t\frac{\left(Y_t\ln\lambda\right)^2\lambda^{Y_t}}{\ln\lambda}+\frac{c}{\ln\lambda}\\
&\le \ln\lambda\cdot\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Np_tY_t^2\lambda^{Y_t}+\frac{c}{\lambda-1}+c\\
&\le (\lambda-1)\lambda\cdot\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tNp_t+\frac{c}{\lambda-1}+c\\
&\le 2(\lambda-1)\cdot M+\frac{c}{\lambda-1}+c \qquad \text{a.s. } \omega\in D(c)
\end{aligned}
$$

当 $0<c\le 1$ 时，在(20)中令 $\lambda=1+\sqrt{c}$，于是由(18)有

$$
\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_t\left(X_t-Np_t\right)\le\sqrt{c}\left(2M+1\right)+c \quad \text{a.s. 于 } D(c) \tag{21}
$$

即得当 $0<c\le 1$ 时，(7)成立。当 $c=0$ 时，取 $\lambda_i\in(1,2)\,(i=1,2,\cdots)$，使 $\lambda_i\to 1\,(i\to\infty)$，则对一切 i，由(20)有

$$
\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_t\left(X_t-Np_t\right)\le 0 \quad \text{a.s. } \omega\in D(0) \tag{22}
$$

故由(22)知当 $c=0$ 时，(7)也成立。

取 $\lambda\in(1/5,1)$，将(17)两边同除以 $\ln\lambda$，得：

$$
\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n}\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tX_t-\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}\frac{N\ln\left(p_t\lambda^{Y_t}+q_t\right)}{\ln\lambda}\right]\ge\frac{c}{\ln\lambda} \quad \text{a.s } \omega\in D(c) \tag{23}
$$

由(23)与下极限的性质：

$$
\liminf_{n\to\infty}\left(a_n-b_n\right)\ge d\Rightarrow\liminf_{n\to\infty}\left(a_n-c_n\right)\ge\liminf_{n\to\infty}\left(b_n-c_n\right)+d
$$

有

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_t\left(X_t-Np_t\right)\\
&\ge\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}N\left(\frac{p_t\lambda^{Y_t}+q_t-1}{\ln\lambda}-Y_tp_t\right)+\frac{c}{\ln\lambda}\\
&\ge\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}N\left(\frac{p_t\lambda^{Y_t}+q_t-1}{\ln\lambda}-\frac{Y_tp_t\ln\lambda}{\ln\lambda}\right)+\frac{c}{\ln\lambda}\\
&\ge\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Np_k\left(\frac{\lambda^{Y_t}-1-Y_t\ln\lambda}{\ln\lambda}\right)+\frac{c}{\ln\lambda}\\
&\ge\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Np_k\frac{\left(Y_t\ln\lambda\right)^2\lambda^{-Y_t}}{\ln\lambda}+\frac{c}{\ln\lambda}\\
&\ge\ln\lambda\cdot\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Np_tY_t^2\lambda^{-Y_t}+\frac{c}{\ln\lambda}\\
&\ge\lambda^{-1}\frac{\lambda-1}{\lambda}\cdot\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tNp_t+\frac{c}{\lambda-1}\\
&\ge\frac{\lambda-1}{\lambda^2}M+\frac{c}{\lambda-1}\ge 25(\lambda-1)M+\frac{c}{\lambda-1} \qquad \omega\in D(c)
\end{aligned} \tag{24}
$$

当 $0<c\le 1$ 时，在(24)中令 $\lambda = 1-\left(\sqrt{c}/5\right)$，得

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_t\left(X_t-Np_t\right)\ge -5\sqrt{c}\left(M+1\right)\quad \text{a.s.}\quad \omega\in D\left(c\right) \tag{25}$$

故由(25)知当 $0<c\le 1$ 时，(8)成立。仿照(22)的证明可知当 $c=0$ 时，(8)也成立。

推论 1：在定理(1)的假设下，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_t\left(X_t-Np_t\right)=0\quad \text{a.s.}\quad \omega\in D\left(0\right)。 \tag{26}$$

证明：在(7)与(8)中令 $c=0$ 即可。

推论 2：设 $\left\{X_t, t\in T^{(n)}\right\}$ 是服从参数为 $\left(N, p_t\right)$ 的二项分布的独立随机场，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left|T^{(n)}\right|}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_t\left(X_t-Np_t\right)=0\quad \text{a.s.} \tag{27}$$

证明：在定理 1 中，令 $\mu=\mu_P$，此时有 $R_n\left(\omega\right)\equiv 1$。当 $c=0$ 时，(6)第三式显然成立。令 $\sigma_n\left(\omega\right)=\left|T^{(n)}\right|$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|T^{(n)}\right|=\infty$，又设 $M=N$，则有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tNp_t\le \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\left|T^{(n)}\right|}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Np_t\le \limsup_{n\to\infty}\frac{N\left|T^{(n)}\right|}{\left|T^{(n)}\right|}=N$$

于是有 $D\left(0\right)=\Omega$。因而由(26)便得(27)式。

推论 3：在定理(1)的假设下，设

$$H\left(0\right)=\left\{\omega:\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_t=+\infty,\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{t\in L_k}Y_t}\ln R_n\left(\omega\right)\ge 0\right\} \tag{28}$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{t\in L_k}Y_t}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_t\left(X_t-Np_t\right)=0\quad \text{a.s.}\quad \omega\in H\left(0\right) \tag{29}$$

证明：在推论 1 中令 $\sigma_n\left(\omega\right)=\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{t\in L_k}Y_t, M=N$，则显然有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{t\in L_k}Y_t}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tNp_t\le \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{t\in L_k}Y_t}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tN\le N, \tag{30}$$

所以当 $c=0$ 时有 $D\left(0\right)=H\left(0\right)$。于是有(29)成立。

推论 4：在定理(1)的条件下，令

$$D=\left\{\omega:\lim_{n\to\infty}\sigma_n\left(\omega\right)=+\infty\right\} \tag{31}$$

则

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n(\omega)}\ln R_n(\omega)\le 0 \quad \text{a.s.} \quad \omega\in D \tag{32}$$

证明：在(14)中令 $\lambda=1$，得

$$R_n(\omega)=U_n(1,\omega)。$$

由(14)与(31)即得(32)成立。

定理 2：在设 $\left\{X_t,t\in T^{(n)}\right\}$ 是具有联合分布(1)的任意随机场，$R_n(\omega)$ 由(4)定义。又设 $M>0,0\le c<1$ 其为常数，令 $L(c)$ 为满足下列条件的样本点 ω 的全体：

$$L(c)=\left\{\omega:\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tNp_t=+\infty,\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tNp_t}\ln R_n(\omega)\ge -c\right\} \tag{33}$$

则有

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tX_t\Big/\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tNp_t\right)\le 1+3\sqrt{c}+c \quad \mu\text{-a.s.} \quad \omega\in L(c), \tag{34}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tX_t\Big/\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tNp_t\right)\ge 1-10\sqrt{c} \quad \mu\text{-a.s.} \quad \omega\in L(c)。 \tag{35}$$

证明：在定理 1 中令 $\sigma_n(\omega)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tNp_t,M=1$，则显然有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tNp_t}\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tNp_t\le 1, \tag{36}$$

于是有 $D(c)=L(c)$。由(7)，(8)有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tX_t}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tNp_t}-1\le\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tX_t-\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tNp_t}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tNp_t}\le 3\sqrt{c}+c \quad \mu\text{-a.s.} \quad \omega\in L(c), \tag{37}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tX_t}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tNp_t}-1\ge\liminf_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tX_t-\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tNp_t}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{t\in L_k}Y_tNp_t}\ge -10\sqrt{c} \quad \mu\text{-a.s.} \quad \omega\in L(c)。 \tag{38}$$

由(37)，(38)可知(34)，(35)成立。

基金项目

本文的工作被国家自然科学基金(11072107)，江苏省高校自然科学基金(13KJB110006)以及江苏科技大学校管基金(633051203)支持。

参考文献

[1] Liu, W. and Yang, W.G. (1996) An Extension of Shannon-McMillan Theorem and Some Limit Properties for Nonho-

mogeneous Markov Chains. *Stochastic Processes and Their Applications*, **61**, 129-145. https://doi.org/10.1016/0304-4149(95)00068-2

[2] 刘文, 杨卫国. 任意信源与马氏信源的比较及小偏差定理[J]. 数学学报, 1997, 40(1): 22-36.

[3] Ye, Z. and Berger, T. (1993) Asymptotic Equipartition Property for Random Fields on Trees. *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, **9**, 296-309.

[4] Berger, T. and Ye, Z. (1990) Entropic Aspects of Random Fields on Trees. *IEEE Transactions on Information Theory*, **36**, 1006-1018. https://doi.org/10.1109/18.57200

[5] Ye, Z. and Berger, T. (1996) Ergodic Regularity and Asymptotic Equipartition Property of Random Fields on Trees. *Combination of Information System Science*, **21**, 157-184

[6] Yang, W.G. (2003) Some Limit Properties for Markov Chains Indexed by Homogeneous Tree. *Statistics & Probability Letters*, **65**, 241-250. https://doi.org/10.1016/j.spl.2003.04.001

[7] Yang, W.G. and Liu, W. (2002) Strong Law of Large Numbers and Shannon-McMillan Theorem for Markov Chains Fields on Trees. *IEEE Transactions on Information Theory*, **48**, 313-318. https://doi.org/10.1109/18.971762

[8] Liu, W. and Wang, L.Y. (2003) The Markov Approximation of the Random Fields on Cayley Tree and a Class of Small Deviation Theorems. *Statistics & Probability Letters*, **63**, 113-121. https://doi.org/10.1016/S0167-7152(03)00058-0

[9] Yang, W.G. and Ye, Z.X. (2007) The Asymptotic Equipartition Property for Nonhomogeneous Markov Chains Indexed by a Homogeneous Tree. *IEEE Transactions on Information Theory*, **53**, 3275-3280. https://doi.org/10.1109/TIT.2007.903134

[10] 王康康, 李芳. 齐次树指标随机场的一类 Shannon-McMillan 偏差定理[J]. 工程数学学报, 2009, 26(2): 260-266.

[11] Wang, K.K. and Zong, D.C. (2011) Some Shannon-McMillan Approximation theorems for Markov Chain Field on the Generalized Bethe Tree. *Journal of Inequalities and Applications*, **2011**, Article ID: 470910. https://doi.org/10.1155/2011/470910

[12] Liu, W. (1995) Likelihood Ratio and a Class of Strong Laws for the Sequence of Integer-Valued Random Variables. *Statistics and Probability Letters*, **22**, 249-256. https://doi.org/10.1016/0167-7152(94)00073-H

[13] Wang, Z.Z. (1999) A Strong Limit Theorem on Random Selection for the N-Valued Random Variables. *Pure and Applied Mathematics*, **15**, 56-61.

[14] Chung, K.L. (1974) A Course in Probability Theory. Academic Press, New York.

[15] Gray, R.M. (1990) Entropy and Information Theory. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3982-4