Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2018, 7(8), 1085-1094**
Published Online August 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.78126

Hans汉斯

The Existence of Positive Solutions for a Nonlocal Boundary Value Problem

Yingli Zhu, Xiujie Yu

School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Jinan Shandong
Email: zhuyingli@stu.sdnu.edu.cn

Received: Aug. 10th, 2018; accepted: Aug. 22nd, 2018; published: Aug. 29th, 2018

Abstract

This paper discusses the boundary value problem with nonlocal integral boundary conditions

$$\begin{cases} u''(t)+q(t)f(t,u(t))=0, 0<t<1, \\ au(0)-bu'(0)=\alpha[u], \\ u'(1)=\beta[u], \end{cases}$$

where $\alpha[u]=\int_0^1 u(t)\mathrm{d}A(t)$, $\beta[u]=\int_0^1 u(t)\mathrm{d}B(t)$; **$A$ and B are functions of bounded variation;** $a>0$, $b>0$; **the nonlinearity** $f:[0,1]\times[0,+\infty)\to R$ **is continuous and is allowed to change sign. According to the fixed point theorem in double cones, we obtain that there exists at least two positive solutions. And according to three-solution theorem, we obtain that there exists at least three positive solutions.**

Keywords

Existence, Nonlocal Boundary Value Problem, Fixed Point Theorem, Positive Solutions

一类非局部边值问题正解的存在性

朱应丽，于秀洁

山东师范大学数学与统计学院，山东 济南
Email: zhuyingli@stu.sdnu.edu.cn

收稿日期：2018年8月10日；录用日期：2018年8月22日；发布日期：2018年8月29日

摘 要

考虑非线性非局部边值问题

文章引用：朱应丽，于秀洁. 一类非局部边值问题正解的存在性[J]. 应用数学进展, 2018, 7(8): 1085-1094.
DOI: 10.12677/aam.2018.78126

$$\begin{cases} u''(t)+q(t)f(t,u(t))=0, 0<t<1, \\ au(0)-bu'(0)=\alpha[u], \\ u'(1)=\beta[u], \end{cases}$$

其中边值条件 $\alpha[u]=\int_0^1 u(t)\mathrm{d}A(t)$，$\beta[u]=\int_0^1 u(t)\mathrm{d}B(t)$；$A$，$B$是有界变差函数；$a>0$，$b>0$；非线性项 $f:[0,1]\times[0,+\infty)\to R$ 是连续的且允许变号的。本文根据两个锥上的不动点定理，讨论得到以上问题至少存在两个正解。并且利用三解定理，讨论得到以上问题至少存在三个正解。

关键词

存在性，非局部边值问题，不动点定理，正解

1. 引言

本文考虑如下非线性非局部边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+q(t)f(t,u(t))=0, 0<t<1, \\ au(0)-bu'(0)=\alpha[u], \\ u'(1)=\beta[u], \end{cases} \tag{1.1}$$

其中边值条件(BCs)是关于线性泛函，且由 Riemann-Stieltjes 积分给出：

$$\alpha[u]=\int_0^1 u(t)\mathrm{d}A(t), \beta[u]=\int_0^1 u(t)\mathrm{d}B(t).$$

2000 年，Guidotti 和 Merino 在文献[1]中研究了

$$\begin{cases} -u''(t)=y(t), t\in(0,1), \\ u'(0)=0, u'(1)+\beta u(0)=0(\beta>0). \end{cases}$$

该方程代表了一个在稳定状态下的长度为 1 的加热棒模型。它在 $t=0$ 时是绝缘的，加热或冷却操作是在 $t=1$ 处的控制器根据传感器所反馈回的 $t=0$ 时的温度来进行的。

2006 年，Webb 和 Infante 在文献[2]中研究了以下方程正解的存在性问题：

$$\begin{cases} -u''(t)=g(t)f(t,u), 0<t<1, \\ u'(0)=0, \beta u'(1)+u(\eta)=0. \end{cases}$$

该方程也是一个具有稳定解的加热棒模型，不同的是，温度变化是由 $t=1$ 处控制器通过任意点 $t=\eta$ 处传感器温度变化情况反馈控制的，而不是 $t=0$ 处。该文根据不动点指数理论，讨论了随参数的变化多个非平凡解的存在性情况。

2012 年，Webb 在文献[3]中研究了温控器模型正解的存在性：

$$\begin{cases} -u''(t)=g(t)f(t,u), 0<t<1, \\ u'(0)=\alpha[u], u'(1)+\beta[u]=0, \end{cases}$$

其中，$\alpha[u]=\int_0^1 u(t)\mathrm{d}A(t),\beta[u]=\int_0^1 u(t)\mathrm{d}B(t)$。这是一类更为一般的边值条件，传感器为线性泛函。由于此时的传感器覆盖了加热棒的某一些点或某一连续区间，所以更符合实际。该文通过研究其格林函数的性质，讨论了以上问题何时存在多个正解以及何时不存在正解。

2015 年，Infante 在文献[4]中研究了 Neumann 型非局部边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+f(t,u(t))=0, t\in[0,1], \\ u'(0)=\alpha[u], \\ u'(1)=\beta[u]. \end{cases}$$

该文通过研究摄动 Hammerstein 积分方程

$$(Tu)(t)=\gamma(t)\alpha[u]+\delta(t)\beta[u]+\int_0^1 k(t,s)g(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s,$$

利用不动点指数理论，得到以上问题存在多个非平凡解。

本文在第二节，给出了相关的预备知识和引理。在第三节，我们分别通过利用两个锥上的不动点定理和 Leggett-Williams 三解定理得到了方程两个正解和三个正解的存在性结果。

2. 预备知识和引理

本文中，我们作如下假设：

(H_1) $a>0,b>0$；

(H_2) $f\in C([0,1]\times[0,\infty),R), f(t,0)>0,\forall t\in[0,1]$；

(H_3) $A(t),B(t)$ 是有界变差函数，且 $\int_0^1 \mathrm{d}A(t)\triangleq\alpha[\hat{1}]>0,\int_0^1 \mathrm{d}B(t)\triangleq\beta[\hat{1}]>0$。

对于问题(1.1)，我们将其转化为对以下相应 Hammerstein 积分方程解的存在性：

$$(Au)(t)=\frac{1}{a}\alpha[u]+\left(\frac{b}{a}+t\right)\beta[u]+\int_0^1 G(t,s)q(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s,$$

其中 $G(t,s)$ 为以下问题的 Green 函数：

$$\begin{cases} u''(t)=0, t\in(0,1), \\ au(0)-bu'(0)=0, \\ u'(1)=0. \end{cases}$$

即

$$G(t,s)=\begin{cases} \frac{1}{a}(as+b), s\le t, \\ \frac{1}{a}(at+b), t\le s. \end{cases}$$

则

$$G_t(t,s)=\begin{cases} 0, s\le t, \\ 1, t\le s, \end{cases}$$

且

$$\frac{b}{a+b}G(s,s)\le G(t,s)\le G(s,s),\forall t,s\in[0,1].$$

令 $X=C[0,1]=\{u:u\text{为}[0,1]\text{上的连续函数}\}$。对 $u\in X$，定义

$$\|u\| = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|,$$

则 $(X,\|\cdot\|)$ 为一 Banach 空间。$K = \{u \in X : u(t) \ge 0\}$，

考虑

$$K' = \left\{u \in X : u(t) \ge \frac{b}{a+b}\|u\|\right\},$$

显然，$K, K' \subseteq X$ 为 X 中的两个锥，且 $K' \subseteq K$。对 $\forall u \in K'$，定义

$$\theta(u) = \min_{t\in[0,1]} |u(t)|.$$

令 $(\cdot)^+ = \max\{\cdot, 0\}$，我们定义算子 T, A, T^* 如下：

$$T : K \to K, A : K \to X, T^* : K' \to K',$$

使

$$(Tu)(t) = \left[\frac{1}{a}\alpha[u] + \left(\frac{b}{a}+t\right)\beta[u] + \int_0^1 G(t,s)q(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\right]^+, t \in [0,1],$$

$$(Au)(t) = \frac{1}{a}\alpha[u] + \left(\frac{b}{a}+t\right)\beta[u] + \int_0^1 G(t,s)q(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s, t \in [0,1],$$

$$(T^*u)(t) = \frac{1}{a}\alpha[u] + \left(\frac{b}{a}+t\right)\beta[u] + \int_0^1 G(t,s)q(s)f^+(s,u(s))\mathrm{d}s, t \in [0,1].$$

注 1：若 $\Phi : X \to X$ 为一泛函，$(\Phi u)(t) = [u(t)]^+$，则 $T = \Phi \circ A$。

引理 2.1：$T^* : K' \to K'$ 为全连续算子。

证明：首先我们证明 $T^* : K' \to K'$。

对 $\forall u \in K'$，有 $T^*u \in C[0,1]$，且

$$\begin{aligned}
(T^*u)(t) &= \frac{1}{a}\alpha[u] + \left(\frac{b}{a}+t\right)\beta[u] + \int_0^1 G(t,s)q(s)f^+(s,u(s))\mathrm{d}s \\
&\ge \frac{1}{a}\alpha[u] + \left(\frac{b}{a}+t\right)\beta[u] + \frac{b}{a+b}\int_0^1 G(s,s)q(s)f^+(s,u(s))\mathrm{d}s \\
&\ge \frac{b}{a+b}\left(\frac{1}{a}\alpha[u] + \left(\frac{b}{a}+t\right)\beta[u] + \frac{b}{a+b}\int_0^1 G(s,s)q(s)f^+(s,u(s))\mathrm{d}s\right) \\
&\ge \frac{b}{a+b}\|T^*u\|.
\end{aligned}$$

所以，$T^* : K' \to K'$。

再由 f 的连续性及 f^+ 的定义，通过 Arzela-Ascoli 定理，我们知 T^* 为全连续算子。

引理 2.2：函数 $u(t)$ 是三点边值问题(1.1)的正解，当且仅当 $u(t)$ 是算子 A 在锥中的不动点。

引理 2.3：如果算子 $A : K \to X$ 是全连续的，那么算子 $T = \Phi \circ A : K \to K$ 是全连续的。

注 2：根据 f 的连续性，$A : K \to X$ 是全连续的，因此由引理 2.2 知，算 $T : K \to K$ 也是全连续的。

引理 2.4：如果 u 是 T 的不动点，那么 u 也是 A 的不动点。

证明：假设 u 是 T 的不动点，则对 $\forall t \in [0,1]$，$Au(t) \ge 0$，u 也是 A 的不动点。

为此，我们只需要证如果 $(Tu)(t) = u(t), \forall t \in [0,1]$，那么

$$(Au)(t) \ge 0, \forall t \in [0,1].$$

反之，如果$\exists t_0 \in [0,1]$，使得$(Au)(t_0)<0$。令(t_1,t_2)为包含t_0点且使得$(Au)(t)<0, t\in(t_1,t_2)$的最大区间，则$u(t)=0, t\in[t_1,t_2]$，从而

$$(Au)''(t)=-q(t)f(t,0)<0, t\in(t_1,t_2).$$

1) $t_1=0$。

若$t_2<1$，则$(Au)(t_2)=0$，且$(Au)(t)<0, t\in(t_1,t_2)$，而$t\in(t_1,t_2)$时，$(Au)''(t)<0$，即Au在$[t_1,t_2]$上为凹函数，所以$(Au)'(t)>0$。但又

$$\alpha(Au)(0)-b(Au)'(0)=\alpha[u],$$

可知

$$(Au)(0)=\frac{b(Au)'(0)+\alpha[u]}{b}>0.$$

由此得出矛盾。

若$t_2=1$，此时$(Au)(t)\le 0, t\in[0,1]$，且$u(t)=0, t\in[0,1]$，故

$$(Au)(t)=\frac{1}{a}\alpha[0]+\left(\frac{b}{a}+t\right)\beta[0]+\int_0^1 G(t,s)q(s)f(s,0)\mathrm{d}s, t\in[0,1].$$

由此也得出矛盾。

2) $t_1>0$。

若$t_2<1$，则$(Au)(t_1)=0,(Au)(t_2)=0$，且$(Au)(t)<0, t\in(t_1,t_2)$于是$u(t)=0, t\in[t_1,t_2]$，

$$(Au)''(t)=-q(t)f(t,0)<0, t\in(t_1,t_2)\text{。}$$

所以，

$$(Au)(t)>(Au)(t_1)=(Au)(t_2)=0.$$

矛盾。

若$t_2=1$，则$(Au)(t_1)=0,(Au)(t)<0, t\in(t_1,t_2)$，于是

$$u(t)=0, t\in[t_1,t_2],(Au)''(t)=-q(t)f(t,0)<0, t\in(t_1,t_2).$$

从而$(Au)'(t)$单调递减，而我们知$(Au)'(t_1)\le 0$，从而$(Au)'(t)<0, t\in(t_1,1]$。这与$(Au)'(1)=\beta[u]\ge 0$矛盾。

引理 2.5 [5] (Leggett-Williams 三解定理)：设$A:\overline{P}_c\to\overline{P}_c$是全连续的，$\alpha$是$P$上的一个非负连续凹泛函，满足当$u\in\overline{P}_c$时，$\alpha(u)\le\|u\|$，假设存在$0<a<b<d\le c$，使得

(C$_1$) 当$\{u\in P(a,b,d):\alpha(u)>b\}\ne\varnothing$，且$u\in P(a,b,d)$时，恒有$\alpha(Au)>b$；

(C$_2$) 当$u\in\overline{P}_a$时，恒有$\|Au\|<a$；

(C$_3$) 当$u\in P(a,b,c)$且$\|Au\|>d$时，恒有$\alpha(Au)>b$，

则A至少有三个不动点u_1,u_2,u_3，满足：

$$\|u_1\|<a<\|u_3\|,\alpha(u_3)<b<\alpha(u_2).$$

引理 2.6 [6]：令X为一实 Banach 空间，其上的范数为$\|\cdot\|$，$K,K'\subset X$为两个锥，且$K\subset K'$。假设

$T:K\to K,T^*:K'\to K'$ 为两个全连续算子，且 $\theta:K'\to R^+$ 为一连续泛函，满足对任意 $X\in K'$，有 $\theta(x)\le\|x\|\le M\theta(x)$，其中 $M>1$ 是一个常数。若存在常数 $b>a>0$，使得

(M1) $\|Tx\|<a,x\in\partial K_a$；

(M2) $\|T^*x\|<a,x\in\partial K'_a$，且 $\theta(T^*x)>b,x\in\partial K'(b)$；

(M3) $Tx=T^*x,x\in K'_a(b)\cap\{x:T^*x=x\}$，

则 T 在 K 中至少有两个不动点 x_1,x_2，满足

$$0\le\|x_1\|<a<\|x_2\|,\theta(x_2)<b.$$

3. 主要结果

定理 3.1： 假设条件(H1)、(H2)、(H3)成立，又设存在正数 d,M,m,r,R 满足 $0<r<\frac{b}{a+b}R<R$，且使得 f 满足如下假设：

(H4) $f(t,u)\ge0,u\in[d,R]$；

(H5) $|f(t,u)|\le Mr,(t,u)\in[0,1]\times[0,r]$；

(H6) $|f(t,u)|\ge mR,(t,u)\in[0,1]\times\left[\frac{b}{a+b}R,R\right]$；

(H7) $\frac{\alpha[\hat{1}]}{a}+\left(1+\frac{b}{a}\right)\beta[\hat{1}]+M\int_0^1G(s,s)q(s)\mathrm{d}s<1$；

(H8) $\frac{b}{a+b}\left(\frac{\alpha[\hat{1}]}{a}+\frac{b}{a}\beta[\hat{1}]+m\int_0^1G(s,s)q(s)\mathrm{d}s\right)>1$；

(H9) $d<\frac{b}{a+b}r$，

则边值问题(1.1)至少存在两个正解 u_1,u_2 满足

$$0<\|u_1\|<r<\|u_2\|,\theta(u_2)<\frac{b}{a+b}R.$$

证明： 对任意 $u\in\partial K_r$，

$$\|Tu\|=\max_{t\in[0,1]}\left[\frac{1}{a}\alpha[u]+\left(\frac{b}{a}+t\right)\beta[u]+\int_0^1G(t,s)q(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\right]^+,$$

由假设(H5)、(H7)有

$$\begin{aligned}\|Tu\|&=\max_{t\in[0,1]}\max\left\{\frac{1}{a}\alpha[u]+\left(\frac{b}{a}+t\right)\beta[u]+\int_0^1G(t,s)q(s)f^+(s,u(s))\mathrm{d}s,0\right\}\\&\le\frac{\alpha[\hat{1}]}{a}r+\left(1+\frac{b}{a}\right)\beta[\hat{1}]r+Mr\int_0^1G(s,s)q(s)\mathrm{d}s\\&=\left(\frac{\alpha[\hat{1}]}{a}+\left(1+\frac{b}{a}\right)\beta[\hat{1}]+M\int_0^1G(s,s)q(s)\mathrm{d}s\right)r\\&<r.\end{aligned}$$

故引理 2.6 中条件(M1)满足。

对任意 $u\in\partial K_r'$，即 $\|u\|=r$，由假设(H_5)、(H_7)有

$$\begin{aligned}\|T^*u\|&=\max_{t\in[0,1]}\left\{\frac{1}{a}\alpha[u]+\left(\frac{b}{a}+t\right)\beta[u]+\int_0^1 G(t,s)q(s)f^+(s,u(s))\mathrm{d}s,0\right\}\\&\le\frac{\alpha[\hat{1}]}{a}r+\left(1+\frac{b}{a}\right)\beta[\hat{1}]r+Mr\int_0^1 G(s,s)q(s)\mathrm{d}s\\&<r.\end{aligned}$$

对 $u\in\partial K'\left(\frac{b}{a+b}R\right)$，即 $u\in K'$，且 $\theta(u)=\min\limits_{t\in[0,1]}u(t)=\frac{b}{a+b}R$，我们有

$$\frac{b}{a+b}R=\theta(u)=\min_{t\in[0,1]}u(t)\ge\frac{b}{a+b}\|u\|,$$

所以

$$\|u\|\le R.$$

而

$$u(t)\ge\frac{b}{a+b}R,\forall t\in[0,1],$$

即

$$\frac{b}{a+b}R\le u(t)\le\|u\|\le R,\forall t\in[0,1].$$

由假设(H_6)、(H_8)有

$$\begin{aligned}(T^*u)(t)&=\frac{1}{a}\alpha[u]+\left(\frac{b}{a}+t\right)\beta[u]+\int_0^1 G(t,s)q(s)f^+(s,u(s))\mathrm{d}s\\&\ge\frac{\alpha[\hat{1}]}{a}\frac{b}{a+b}R+\frac{b}{a}\beta[\hat{1}]\frac{b}{a+b}R+mR\int_0^1\frac{b}{a+b}G(s,s)q(s)\mathrm{d}s\\&=\frac{b}{a+b}\left(\frac{\alpha[\hat{1}]}{a}+\left(1+\frac{b}{a}\right)\beta[\hat{1}]+m\int_0^1 G(s,s)q(s)\mathrm{d}s\right)R\\&>R.\end{aligned}$$

从而 $\|T^*u\|>R$。

另一方面，由引理 2.1 知，

$$\theta(T^*u)=\min_{t\in[0,1]}(T^*u)(t)\ge\frac{b}{a+b}\|T^*u\|>\frac{b}{a+b}R,$$

故

$$\theta(T^*u)>\frac{b}{a+b}R.$$

引理 2.6 中条件(M_2)满足。

最后，我们证明定理中的条件(M_3)满足。

对 $u\in\partial K_r'\left(\frac{b}{a+b}R\right)\cap\{u:T^*u=u\}$，即 $u\in K'$，且 $\|u\|>r,\theta(u)=\min\limits_{t\in[0,1]}u(t)<\frac{b}{a+b}R$。

另一方面，

$$u(t) \geq \frac{b}{a+b}\|u\|,$$

故

$$\frac{b}{a+b}\|u\| \leq \min_{t\in[0,1]} u(t) < \frac{b}{a+b}R,$$

得

$$\|u\| < R,$$

所以

$$\frac{b}{a+b}r \leq \frac{b}{a+b}\|u\| \leq u(t) \leq \|u\| < R.$$

由假设(H_9)知，

$$d < u(t) < R.$$

通过假设(H_4)，我们有

$$f^{+}(t,u(t)) = f(t,u(t)).$$

从而

$$Tu = T^{*}u.$$

综上，引理 2.6 中的条件全部满足，则 T 有两个不动点 u_1,u_2 满足

$$0 \leq \|u_1\| < r < \|u_2\|, \theta(u_2) < \frac{b}{a+b}R.$$

再由引理 2.4 知， u_1,u_2 为 A 的不动点，从而边值问题(1.1)至少存在两个正解。证毕。

定理 3.2：假设(H_1)~(H_4)成立，又设

(H_5') 存在正数 k,l 满足 $d < k < l \leq R$ ，使得

$$f(t,u) \geq mk,(t,u) \in [0,1]\times[k,R];$$

(H_6') $|f(t,u)| \leq MR,(t,u) \in [0,1]\times[0,R]$；

(H_7') $|f(t,u)| \leq Md,(t,u) \in [0,1]\times[0,d]$；

(H_8') $\dfrac{\alpha[\hat{1}]}{a} + \dfrac{b}{a}\beta[\hat{1}] + m\int_0^1 \dfrac{b}{a+b} G(s,s)q(s)\mathrm{d}s > 1$；

(H_9') $\dfrac{\alpha[\hat{1}]}{a} + \left(1+\dfrac{b}{a}\right)\beta[\hat{1}] + M\int_0^1 G(s,s)q(s)\mathrm{d}s < 1$，

则边值问题(1.1)至少存在三个正解。

证明：定义非负连续凹泛函 $\theta: K \to [0,\infty)$，

$$\theta(u) = \min_{t\in[0,1]} u(t), u \in K.$$

显然，任取 $u \in \bar{K}_R \subset K, \theta(u) \leq \|u\|$。

又若 $u \in \bar{K}_R \subset K$ ，有 $Tu \in K$ 且 $\|u\| \leq R$ 。由假设(H_6')、(H_9')有

$$\begin{aligned}\|Tu\| &= \max_{t\in[0,1]}\left[\frac{1}{a}\alpha[u]+\left(\frac{b}{a}+t\right)\beta[u]+\int_0^1 G(t,s)q(s)f^+(s,u(s))\mathrm{d}s\right]^+\\ &\le \left(\frac{\alpha[\hat{1}]}{a}+\left(1+\frac{b}{a}\right)\beta[\hat{1}]+M\int_0^1 G(s,s)q(s)\mathrm{d}s\right)R\\ &< R.\end{aligned}$$

故

$$T:\bar{K}_R\to\bar{K}_R.$$

下面验证引理 2.5 中的条件(C_1)~(C_3)。

1) 取 $u_1=l,t\in[0,1],u_1\in K(\theta,k,l),\theta(u_1)=l>k$，故

$$\{u\in K(\theta,k,l):\theta(u)>k\}\ne\varnothing.$$

且任取 $u\in K(\theta,k,l),k\le\theta(u)\le u(t)\le\|u\|\le l$，即

$$k\le u(t)\le l,t\in[0,1].$$

所以，由假设(H_5')、(H_8')有

$$\begin{aligned}\theta(Tu) &= \min_{t\in[0,1]}\left[\frac{1}{a}\alpha[u]+\left(\frac{b}{a}+t\right)\beta[u]+\int_0^1 G(t,s)q(s)f^+(s,u(s))\mathrm{d}s\right]^+\\ &\ge \frac{\alpha[\hat{1}]}{a}k+\frac{b}{a}\beta[\hat{1}]k+\frac{b}{a+b}\int_0^1 G(s,s)q(s)\mathrm{d}s\cdot mk\\ &= \left(\frac{\alpha[\hat{1}]}{a}+\frac{b}{a}\beta[\hat{1}]+m\frac{b}{a+b}\int_0^1 G(s,s)q(s)\mathrm{d}s\right)k\\ &> k.\end{aligned}$$

所以，引理中的条件(C_1)满足。

2) 对 $u\in\bar{K}_d$，由假设(H_7')、(H_9')有

$$\|Tu\|<\left(\frac{\alpha[\hat{1}]}{a}+\left(1+\frac{b}{a}\right)\beta[\hat{1}]+M\int_0^1 G(s,s)q(s)\mathrm{d}s\right)d<d.$$

所以，引理中的条件(C_2)满足。

3) 取 $u\in K(\theta,k,R)$，且 $\|Tu\|>l$，则

$$\theta(Tu)>k.$$

所以，引理中的条件(C_3)满足。

由 Leggett-Williams 三解定理，T 至少有三个不动点 u_1,u_2,u_3，且满足

$$\|u_1\|<d<\|u_3\|,\theta(u_3)<k<\theta(u_2).$$

再由引理 2.4 知，u_1,u_2,u_3 为 A 的不动点，从而边值问题(1.1)至少存在三个正解。证毕。

参考文献

[1] Guidotti, P. and Merino, S. (2000) Gradual Loss of Positivity and Hidden Invariant Cones in a Scalar Heat Equation. *Differential Integral Equations*, **13**, 1551-1568.

[2] Infante, G. and Webb, J.R.L. (2006) Loss of Positivity in a Nonlinear Scalar Heat Equation. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Applications*, **13**, 249-261. https://doi.org/10.1007/s00030-005-0039-y

[3] Webb, J.R.L. (2012) Existence of Positive Solutions for a Thermostat Model. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **13**, 923-938. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.08.027

[4] Infante, G. (2015) Nontrival Solutions of Local and Nonlocal Neumann Boundary Value Problems. *Classical Analysis and ODEs*.

[5] Leggett, R. and Williams, L. (1979) Multiple Positive Fixed Points of Nonlinear Operators on Ordered Banach Spaces. *Indiana University Mathematics Journal*, **28**, 673-688. https://doi.org/10.1512/iumj.1979.28.28046

[6] Ge, W.G. and Ren, J.L. (2006) Fixed Point Theorems in Double Cones and Their Applications to Non-Linear Boundary Value Problems. *Chinese Annals of Mathematics*, **27**, 155-168.