

# Rational Bézier Curve and Its Application in Blending of Thickness Different Tubes

Taotuge<sup>1</sup>, Wurengaowa<sup>1</sup>, Fang Wang<sup>2</sup>, Genzhu Bai<sup>3\*</sup>

<sup>1</sup>Inner Mongolia Tongliao Vocational College, Tongliao Inner Mongolia

<sup>2</sup>Zhejiang Changzheng Vocational & Technical College, Hangzhou Zhejiang

<sup>3</sup>Inner Mongolia University for the Nationalities, Tongliao Inner Mongolia

Email: Taotu.ge@163.com, \*bgz049@163.com

Received: Aug. 13<sup>th</sup>, 2018; accepted: Aug. 29<sup>th</sup>, 2018; published: Sep. 5<sup>th</sup>, 2018

---

## Abstract

In this paper, the rational Bézier curve can be adjusted and controlled in the shape of a curve near a particular control point. Then, on the basis of the smooth blending circular tubes with the two different radiuses, the axes of the tubes are non-coplanar lines. The blending tubes that meet the conditions of  $G^0$  and  $G^1$  are constructed separately. A new tubes blending is obtained. It has theoretical significance and application value.

## Keywords

Shape Parameters, Rational Bézier Curve, Axis, Tubes, Smooth Blending

---

# 有理Bézier曲线及其在粗细不同管道拼接中的应用

陶吐格<sup>1</sup>, 乌仁高娃<sup>1</sup>, 王芳<sup>2</sup>, 白根柱<sup>3\*</sup>

<sup>1</sup>内蒙古通辽职业学院, 内蒙古 通辽

<sup>2</sup>浙江长征职业技术学院, 浙江 杭州

<sup>3</sup>内蒙古民族大学, 内蒙古 通辽

Email: Taotu.ge@163.com, \*bgz049@163.com

收稿日期: 2018年8月13日; 录用日期: 2018年8月29日; 发布日期: 2018年9月5日

\*通讯作者。

## 摘要

本文利用有理Bézier曲线对于特定控制顶点附近曲线的形状具有调控特性, 在光滑拼接两个半径不同的轴线异面圆管道的轴线的基础上, 分别构造了 $G^0$ 拼接了两个半径不同两个轴线异面的圆管道和 $G^1$ 拼接了两个半径不同的圆管道, 得到了新的轴线异面管道的拼接管道, 具有理论意义和应用价值。

## 关键词

形状参数, 有理Bézier曲线, 轴线, 管道, 光滑拼接

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

曲面拼接是计算机辅助几何设计中的一个基本问题, 而轴线异面的管道拼接是几何造型中难点基础问题。对于轴线异面管道光滑拼接问题, 经典的曲面拼接方法[1] [2] [3] [4]很难奏效, 已有成果不多。我们提出了基于轴线光滑拼接的轴线异面管道光滑拼接方法[5]-[10]。在[5]我们用空间 Bézier 曲线光滑拼接两个异面的轴线, 构造了拼接两个轴线异面的管道。Bézier 曲线具备很多优点, 但是不能调整曲线的局部形状, 也不能精确表示一些二次曲线。有理 Bézier 曲线是 Bézier 曲线的推广, 在保持控制顶点不变的前提下, 有理 Bézier 曲线既可以整体修改曲线形状, 又能精确表示圆锥曲线。因此有理 Bézier 曲线在曲线、曲面拼接中有更广泛的应用。

设

$$\Phi_1 : \begin{cases} x = X_1 + a \cos \varphi + a \sin \varphi, \\ y = Y_1 + B_1 s + a \cos \varphi + a \sin \varphi, \\ z = a \cos \varphi + a \sin \varphi. \end{cases} \text{ 和 } \Phi_2 : \begin{cases} x = a \cos \varphi + a \sin \varphi, \\ y = Y_2 + a \cos \varphi + a \sin \varphi, \\ z = Z_2 + C_2 s + a \cos \varphi + a \sin \varphi. \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad (1)$$

是两个轴线异面的圆管道的参数表示, 其中  $a$  是圆管道的半径。

$$L_1 : \begin{cases} x = X_1 + 0 \cdot s, \\ y = Y_1 + B_1 s, \\ z = 0 + 0 \cdot s, \end{cases} \text{ 和 } L_2 : \begin{cases} x = 0 + 0 \cdot s, \\ y = Y_2 + 0 \cdot s, \\ z = Z_2 + C_2 s. \end{cases} \quad (2)$$

为两个管道的轴线, 分别位于  $OXY$  平面上, 且  $Y$  与轴平行和位于  $OYZ$  平面上与轴垂直。

定义 1. 给定  $n$  个控制顶点  $V_i (i=0, 1, \dots, n)$ , 对  $t \in [0, 1]$  定义曲线

$$r(t) = \sum_{i=0}^n B_{n,i}(t) V_i,$$

和

$$r(t) = \frac{\sum_{i=0}^n B_{n,i}(t) w_i V_i}{\sum_{i=0}^n B_{n,i}(t) w_i}$$

$n$  为次 Bézier 曲线和  $n$  次有理 Bézier 曲线。其中  $B_{n,i}(t), i=0, 1, \dots, n$  为 Bernstein 基函数。

$w_i \neq 0, i=0,1,\dots,n$  为对应控制顶点的权因子。有理 Bézier 曲线和 Bézier 曲线一样通过首、末顶点并和特征多边形的首、末两条边相切。

我们在文[5]中构造了一个以 Bézier 曲线为轴线的管道光滑拼接了两个轴线异面的管道，称之为广义 Bézier 曲线为轴线的管道，其参数表示式为

$$\Phi: \begin{cases} x = R \cos \varphi + r \cos \theta, \\ y = R \sin \varphi + r \sin \theta, \quad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2], \theta \in (0, 2\pi], r = r_1 = r_2 \\ z = b\varphi. \end{cases} \quad (3)$$

我们还可以构造以 Bézier 曲线为轴线的圆管道光滑拼接两个轴线异面的圆管道，其参数表示式为

$$\Phi: \begin{cases} x = \sum_{i=0}^3 B_{3,i}(s)x_i + rN_1(s)\cos \varphi + rB_1(s)\sin \varphi, \\ y = \sum_{i=0}^3 B_{3,i}(s)y_i + rN_2(s)\cos \varphi + rB_2(s)\sin \varphi, \quad s \in [0,1], \varphi \in (0,\pi). \\ z = \sum_{i=0}^3 B_{3,i}(s)z_i + rN_3(s)\cos \varphi + rB_3(s)\sin \varphi. \end{cases} \quad (4)$$

其中  $N_i(u), B_i(u), i=1,2,3$  为 Bézier 曲线在点处的主法矢和副法矢的分量， $r$  为螺旋管道的半径。

我们在文[10]中构造了以有理 Bézier 曲线为轴线的管道光滑拼接了两个轴线异面的圆管道。其参数表示式为

$$p(s, \varphi) = \begin{cases} x(s) + aN_1(s)\cos \varphi + aB_1(s)\sin \varphi, \\ y(s) + aN_2(s)\cos \varphi + aB_2(s)\sin \varphi, \quad s \in [0,1], \varphi \in (0,\pi) \\ z(s) + aN_3(s)\cos \varphi + aB_3(s)\sin \varphi. \end{cases}$$

我们在前面的研究中主要讨论了轴线异面的半径相同的管道的拼接问题，本文中进一步讨论半径不同的两个轴线异面的管道的拼接问题。

## 2. 构造粗细不同的轴线异面管道的 $G^0$ -拼接管道

给定两个轴线异面管道  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$ ，其参数表示为式(1)。

命题 1、两个轴线异面的管道  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  可用一个有理 Bézier 为轴心的管道拼接的条件是：

1) 存在光滑拼接两个管道的轴线  $\gamma_1(s)$  和  $\gamma_2(s)$  的有理 Bézier 曲线  $\gamma(s)$ ，即

$$\gamma_1(1) = \gamma(0), \gamma(1) = \gamma_2(0).$$

2) 在轴线光滑拼接点与轴线垂直的平面处的管道半径相同，即  $r_1 = r(0), r(1) = r_2$ 。

拼接管道的参数表示式为

$$p(s, \varphi) = \begin{cases} x(s) + \alpha(s)N_1(s)\cos \varphi + \alpha(s)B_1(s)\sin \varphi, \\ y(s) + \alpha(s)N_2(s)\cos \varphi + \alpha(s)B_2(s)\sin \varphi, \quad s \in [0,1], \varphi \in (0,\pi). \\ z(s) + \alpha(s)N_3(s)\cos \varphi + \alpha(s)B_3(s)\sin \varphi. \end{cases}$$

其中  $\alpha(s)$  是  $r_1$  到  $r_2$  的映射，满足  $\alpha(0) = r_1, \alpha(1) = r_2$ ， $r_1, r_2$  分别是两个轴线异面的圆管道的半径。

在上述假设下，构造光滑拼接两个异面轴线的有理 Bézier 曲线，并进一步构造光滑  $G^0$ -拼接两个轴线异面的粗细不同的管道。

例 1: 设轴线异面管道的轴线分别为  $L_1: \begin{cases} x=5, \\ y=-4+s, \\ z=0. \end{cases}$  和  $L_2: \begin{cases} x=0, \\ y=5, \\ z=6+t. \end{cases}$  管道半径分别为  $r_1=2, r_2=1$ , 有

理 Bézier 曲线的权因子取  $w_0=1, w_1=10, w_2=10, w_3=1$  时, 通过  $V_0(5, -4, 0)$  和  $V_3(0, 5, 6)$  并与  $L_1$  和  $L_2$  垂直的平面处  $G^0$ -拼接的管道, 见图 1。可以验证拼接线两侧有不同的左、右切平面。

### 3. 构造光滑拼接粗细不同的轴线异面管道的 $G^1$ -拼接管道

命题 2、两个轴线异面的管道  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  可用一个有理 Bézier 曲线为轴心的管道拼接的条件是:

- 1) 存在光滑拼接两个轴线异面管道的轴线  $\gamma_1(u)$  和  $\gamma_2(u)$  的有理 Bézier 曲线  $\gamma(u)$ , 使得  $\gamma_1(1)=\gamma(0), \gamma(1)=\gamma_2(0)$ .
- 2) 存在光滑拼接两个轴线异面管道的母线  $\gamma'_1(u)$  和  $\gamma'_2(u)$  的有理 Bézier 曲线  $\gamma'(u)$ , 使得  $\gamma'_1(1)=\gamma'(0), \gamma'(1)=\gamma'_2(0)$

$$p(s, \varphi) = \begin{cases} x(s) + d(s)N_1(s)\cos\varphi + d(s)B_1(s)\sin\varphi, \\ y(s) + d(s)N_2(s)\cos\varphi + d(s)B_2(s)\sin\varphi, s \in [0, 1], \varphi \in (0, \pi). \\ z(s) + d(s)N_3(s)\cos\varphi + d(s)B(s)\sin\varphi. \end{cases} \quad (5)$$

其中  $d(s) = \|\gamma'(s) - \gamma(s)\|$ ,  $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  表示欧几里得范数。

在上述假设下, 构造光滑拼接两个异面轴线的有理 Bézier 曲线, 并进一步构造光滑  $G^1$ -拼接两个轴线异面的粗细不同的管道。

例 2: 设轴线异面管道的轴线分别为  $L_1: \begin{cases} x=5, \\ y=-4+s, \\ z=0. \end{cases}$  和  $L_2: \begin{cases} x=0, \\ y=5-2t, \\ z=6t. \end{cases}$  管道半径分别为  $r_1=2, r_2=1$ , 有

理 Bézier 曲线的权因子取  $w_0=1, w_1=10, w_2=10, w_3=1$  时, 通过  $V_0(5, -4, 0)$  和  $V_3(0, 5, 6)$  并与  $L_1$  和  $L_2$  垂直的平面处  $G^1$ -拼接的管道, 见图 2。可以验证拼接线两侧左、右切平面相同。

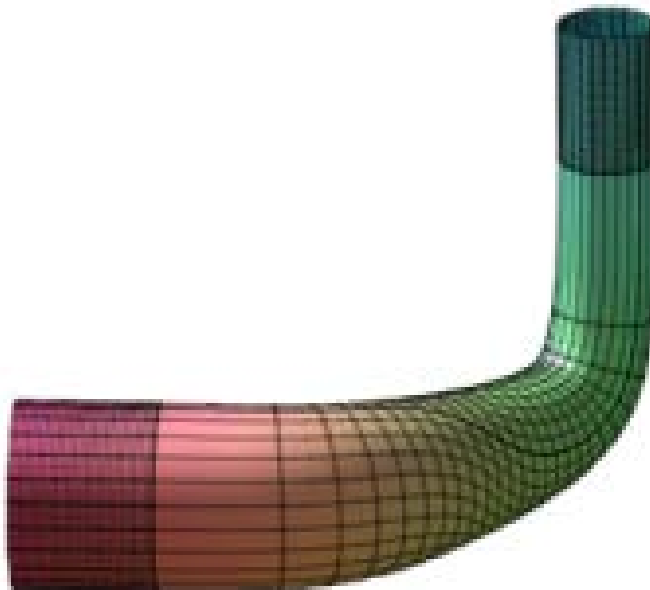
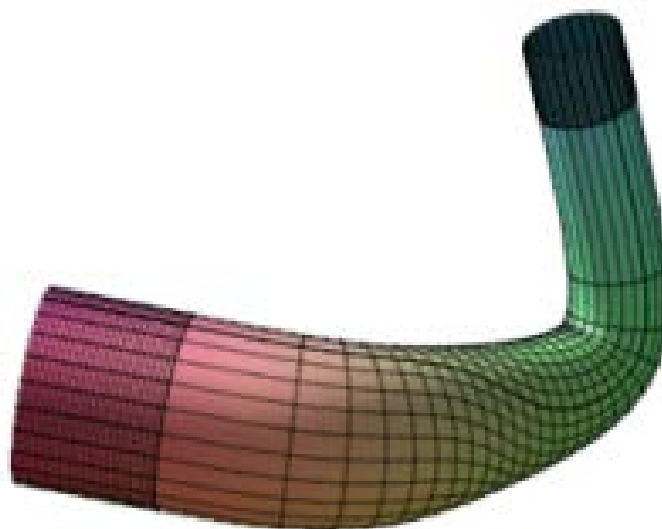


Figure 1. Blending graph  $G^0$  with rational Bézier curve as axis  
图 1. 以有理 Bézier 曲线为轴线的  $G^0$ -拼接图



**Figure 2.** Blending graph  $G^1$  with rational Bézier curve as axis  
**图 2.** 以有理 Bézier 曲线为轴线的  $G^1$ —拼接图

#### 4. 结束语

本文利用有理 Bézier 曲线光滑拼接两个轴线异面的圆管道的轴线  $L_1$  和  $L_2$ ，在此基础上实现了两个半径不同的轴线异面圆管道的  $G^0$  和  $G^1$  拼接。拼接管道的走向与形状与相应的权因子  $w_i (i = 0, 1, \dots, n)$  的选取有关，适当选取权因子可以满足不同的需要。

#### 基金项目

国家自然科学基金项目资助(11561052)，浙江省教育厅一般项目资助 Y (201636628)。

#### 参考文献

- [1] Warren, J. (1989) Blending Algebraic Surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, **8**, 263-278.  
<https://doi.org/10.1145/77269.77270>
- [2] 吴文俊, 王定康. CAGD 中的代数曲面拟合问题[J]. 数学的实践与认识, 1994(3): 26-31.
- [3] Wallner, J. and Pottmann, H. (1997) Rational Blending Surfaces between Quadrics. *CAGD*, **14**, 407-419.  
[https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(96\)00037-4](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(96)00037-4)
- [4] Wu, T.R. and Zhou, Y.S. (2000) On Blending of Several Quadratic Algebraic Surfaces. *CAGD*, **17**, 759-766.  
[https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(00\)00023-6](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(00)00023-6)
- [5] Bai, G.-Z., Wang, H. and Yin, Z.-J. (2014) Employing Generalized Bezier Tube to Smoothly Blending Tubes Whose Axes Are Non-coplanar. *Applied Mechanics and Materials*, **513-517**, 2301-2306.  
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.513-517.2301>
- [6] Wang, H. and Bai, G.-Z. (2013) Employing Generalized Cylindrical Helicoid Tube to Smoothly Blending Tubes Whose Axes Are Non-Coplanar. *Applied Mechanics and Materials*, **380-384**, 1750-1754.  
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.380-384.1750>
- [7] Bai, G.-Z., Liu, S.-Y., Wang, H., Zhi, W. and Yin, Z.-J. (2014) A Novel Method for Smooth Blending Cylindrical Surfaces Whose Axes Are Non-Coplanar Based on Smooth Blending Axes. *Applied Mechanics and Materials*, **687-691**, 1470-1473. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.687-691.1470>
- [8] Bai, G.-Z., Wang, H., Wu, Z., Yin, Z.-J. and Liu, S.-Y. (2014) Smoothly Blending of Two Elliptic Cylinders Whose Axes Are Non-Coplanar. *Applied Mechanics and Materials*, **644-650**, 309-312.  
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.644-650.309>
- [9] Bai, G.Z., Wu, Z. and Lin, X. (2017) Intersecting Line of Conical Surface and Smoothly Blending of Two Tubes

---

Whose Axes Are Non-Coplanar. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **5**, 1887-1891.  
<https://doi.org/10.4236/jamp.2017.59158>

[10] 王芳, 白根柱. 有理 Bézier 曲线及其应用[J]. 应用数学进展, 2017, 6(8): 935-941.

**知网检索的两种方式:**

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [aam@hanspub.org](mailto:aam@hanspub.org)