

# Dynamical Behaviors of a Predator-Prey Model with Scanty Effect for the Square Thrown of Prey

Yongxin Jiang, Zhe Huang

College of Science, Hohai University, Nanjing Jiangsu  
Email: yxinjiang@hhu.edu.cn

Received: Aug. 14<sup>th</sup>, 2018; accepted: Aug. 30<sup>th</sup>, 2018; published: Sep. 5<sup>th</sup>, 2018

---

## Abstract

In this paper, the qualitative theory of ordinary differential equations is applied to study a predator-prey system model with scanty effect for the square thrown of prey. We analyze equilibrium point of the system and their stability. At the same time, the Poincaré-Bendixson theorem is used to obtain the sufficient condition for the existence of the limit cycle. The Dulac criterion is used to discuss the nonexistence of the limit cycle. Finally, the Maple software is used to make numerical simulations, which verify the correctness of the existence condition of the limit cycle, and reflect that the predator-prey system has a stable dynamic equilibrium under certain conditions.

## Keywords

Scanty Effect, Positive Equilibrium Point, Limit Cycle

---

# 一类稀疏效应下具有平方次投放率的捕食-食饵模型的动力行为

蒋永新, 黄哲

河海大学理学院, 江苏 南京  
Email: yxinjiang@hhu.edu.cn

收稿日期: 2018年8月14日; 录用日期: 2018年8月30日; 发布日期: 2018年9月5日

---

## 摘要

本文应用常微分方程的定性理论, 研究一类在稀疏效应下, 具有平方次投放率的捕食-食饵系统模型, 对

该系统平衡点进行了分析, 利用Poincaré-Bendixson环域定理得到了极限环存在性的充分条件, 利用Dulac判据简单讨论了极限环不存在的情况, 最后运用Maple软件进行数值模拟, 验证了极限环存在的正确性, 反映出在一定条件下捕食-食饵系统将趋于一种稳定的动态平衡。

## 关键词

稀疏效应, 正平衡点, 极限环

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

种群生态学是生态学中一个极其关键的组成部分, 也是现今在国内外生物数学中发展相当迅速、体系比较成熟的组成部分。在种群生态学中, 种群间相互作用大致上可以分为三种, 分别是捕食-食饵作用、竞争作用和互惠作用, 而绝大多数的相互作用是以捕食-食饵形式存在的[1]。因此, 对于生态系统的整体稳定性而言, 捕食者与食饵的生存状况起到了决定性的作用。我们需要建立数学模型, 描述捕食-食饵系统, 并且通过将稀疏效应引入捕食-食饵系统, 从理论上能够使系统更真实地反映实际复杂的生态环境, 对保护生态平衡具有极其重要的意义与实用价值。

在生态系统中, 有些食饵喜欢独居, 当种群密度较为稀少时, 交配机会减少, 繁殖能力也随之下降, 也有可能造成种群间近亲繁殖, 降低了整个种群的质量, 导致食饵种群绝灭, 捕食-食饵系统稳定性受到影响进而发生改变。1987年 Kuno 提出了在稀疏效应下的食饵种群模型。近年来, 对于具有稀疏效应捕食-食饵模型的研究得到了很大的发展[2] [3] [4] [5], 在生态学中, 具有稀疏效应的捕食-食饵系统在一般情况下可表示为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) - p(x, y)x \\ \frac{dy}{dt} = -cy + q(x, y)y \end{cases} \quad (1.1)$$

其中:  $x$  表示  $t$  时刻食饵种群数量;  $y$  表示  $t$  时刻捕食者种群数量;  $f(x)$  为食饵种群增长率;  $p(x, y), q(x, y)$  分别为食饵捕食者 2 种群的相互影响函数。如果不添加密度制约这一因素, 且将捕食者与食饵之间的相互作用视为线性的, 则系统(1.1)就变成 Lotka-Volterra 捕食-食饵系统。文献[5]考虑到密度制约的因素, 研究了当  $f(x) = ax^2(k-x)$ ,  $p(x, y) = by$ ,  $q(x, y) = \beta x - \alpha y$  (其中所有参数均为独立正参数, 下同) 时的捕食-食饵系统, 得到了平衡点以及极限环存在的所需条件。文献[6] [7] [8] [9]则引入了食饵的投放率  $h(x)$ , 进而对具有常投放率  $h(x) = h$  [6] [7] [8]和线性投放率  $h(x) = hx$  [9]的稀疏效应捕食系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax^2(k-x) - bxy + h(x) \\ \frac{dy}{dt} = -cy + (\beta x - \alpha y)y \end{cases} \quad (1.2)$$

进行了研究, 利用定性理论分析了系统的正平衡点、极限环、分支等动力行为。

通过上述文献, 我们可以得出结论: 无论食饵是在无投放率、常数投放率或线性投放率的条件下, 所研究的捕食-食饵系统均可以在不同的参数控制下能使捕食者和食饵种群达到稳定状态。然而在实际的生态环境中, 捕食-食饵系统是比较复杂的, 食饵的投放率通常情况下是非线性的, 因此本文讨论食饵具有平方次投放时的稀疏效应捕食-食饵系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax^2(k-x) - bxy + hx^2 \\ \frac{dy}{dt} = -cy + (\beta x - \alpha y)y \end{cases} \quad (1.3)$$

其中  $a, b, c, k, h, \alpha, \beta$  均为独立正参数。

## 2. 系统平衡点分析

对系统(1.3)作变换:  $x = \frac{c}{\beta} \bar{x}, y = \frac{c}{\alpha} \bar{y}, dt = \frac{d\tau}{c}$ , 系统(1.3)转化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(-a_2x^2 + a_1x - a_0y) = R(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = y(x - 1 - y) = S(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

其中  $a_0 = \frac{b}{\alpha}, a_1 = \frac{ka+h}{\beta}, a_2 = \frac{ac}{\beta^2}$  均为正常数, 根据捕食-食饵系统在生态学上的实际意义, 只在区域  $R_+^2 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$  内进行讨论, 且系统的初始条件应满足  $x(0) > 0, y(0) > 0$ 。系统(2.1)有 3 个平衡点:

$$O(0, 0), A\left(\frac{a_1}{a_2}, 0\right), B(x_B, y_B)$$

$$\text{其中} \begin{cases} x_B = \frac{(a_1 - a_0) + \sqrt{(a_1 - a_0)^2 + 4a_0a_2}}{2a_2} \\ y_B = \frac{(a_1 - a_0) + \sqrt{(a_1 - a_0)^2 + 4a_0a_2}}{2a_2} - 1 \end{cases}。$$

**定理 2.1.** 对系统(2.1), ①  $O$  是系统的鞍点; ② 当  $a_1 > a_2$  时  $A$  为系统的鞍点, 当  $a_1 < a_2$  时  $A$  为系统的渐近稳定结点; ③ 当  $a_1 - a_0 > a_2$  时或当  $a_2 < a_1 \leq a_0$  时, 系统存在正的平衡点  $B(x_B, y_B)$ , 设  $T$  为方程(2.1)的一次线性近似系数矩阵的迹, 当  $T < 0$  时为稳定的结点或焦点, 当  $T > 0$  时为不稳定的结点或焦点。

证明: 设系统(2.1)的一次线性近似系数矩阵为  $J$ ,  $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial S}{\partial x} & \frac{\partial S}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a_2x^2 + 2a_1x - a_0y & -a_0x \\ y & x - 1 - 2y \end{pmatrix}$ 。

1) 对平衡点  $O$ , 其系数矩阵  $J(O) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , 由此可知两个方程的特征根分别为  $0, -1$ , 该点为系统的一个鞍点。

2) 对平衡点  $A$ , 其特征根为  $\lambda_1 = -\frac{a_1^2}{a_2}, \lambda_2 = \frac{a_1}{a_2} - 1$ , 显然  $-\frac{a_1^2}{a_2} < 0$ , 所以, 当  $\frac{a_1}{a_2} - 1 > 0$  即  $a_1 > a_2$  时,  $A$

为系统鞍点; 当  $\frac{a_1}{a_2} - 1 < 0$  即  $a_1 < a_2$  时,  $A$  为系统的稳定结点, 且所有特征值均具有负实部, 所以结点  $A$  是渐近稳定的[10]。

3) 对于平衡点  $B$ , 可以分成如下三种情况进行讨论:

a) 当  $a_1 > a_0$ ,  $a_1 - a_0 > a_2$  时, 易知  $\sqrt{(a_1 - a_0)^2 + 4a_0a_2} > a_1 - a_0$ , 所以有  $x_B > \frac{a_1 - a_0}{a_2} > 1$ ,  $y_B > 0$ , 系统存在正平衡点。

b) 当  $a_1 = a_0$ ,  $a_0 > a_2$  时,  $x_B = \frac{\sqrt{a_0a_2}}{a_2} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} > 1$ ,  $y_B > 0$ , 系统存在正平衡点。

c) 当  $a_1 < a_0$  时, 若想要系统存在正平衡点, 则需让  $x_B > 1$ , 整理得  $a_2 < a_1$  时, 所以得  $a_2 < a_1 < a_0$  时系统存在正平衡点。

对于正平衡点  $B$

$$\begin{aligned} \det(J(B)) &= (-3a_2x_B^2 + 2a_1x_B - a_0y_B)(x_B - 1 - 2y_B) + a_0x_By_B \\ &= x_By_B\sqrt{(a_1 - a_0)^2 + 4a_0a_2} > 0 \end{aligned}$$

所以  $B$  点必为结点或焦点。

设  $T = \text{Tr}(J(B))$ , 则

$$\begin{aligned} T &= -3a_2x_B^2 + 2a_1x_B - a_0y_B + x_B - 1 - 2y_B \\ &= \frac{(2a_0 - a_1 - 1)\left[(a_1 - a_0) + \sqrt{(a_1 - a_0)^2 + 4a_0a_2}\right]}{2a_2} - 2a_0 + 1 \end{aligned}$$

当  $T < 0$  时, 平衡点  $B$  稳定, 当  $T > 0$  时, 平衡点  $B$  不稳定。证毕。

### 3. 极限环的存在性

**引理 3.1.** 系统在  $R_+^2$  内的一切轨线都正向有界。

证明:  $x$  轴和  $y$  轴均是系统的积分曲线, 当  $x(0) > 0$ ,  $y(0) > 0$  时,  $\forall t > 0$ ,  $x(t) > 0$ ,  $y(t) > 0$ 。此时可分成两种情况证明  $x(t)$  必正向有界:

1) 当  $x(0) < \frac{a_1}{a_2}$  时,  $\forall t \geq 0$ ,  $x(t) \leq \frac{a_1}{a_2}$ 。若存在  $t_1 < 0$ , 使得  $x(t_1) = \frac{a_1}{a_2}$  且  $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_1} \geq 0$ ,

则由  $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=\frac{a_1}{a_2}} = -\frac{a_0a_1}{a_2}y < 0$ , 矛盾。

2) 若  $N \geq \frac{a_1}{a_2}$ , 则  $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=N} = N(a_1N - a_2N^2 - a_0y) < 0$ , 所以  $x = N \left(N \geq \frac{a_1}{a_2}\right)$  是系统的无切线且轨线是穿

向  $x = N$  的左边, 因此  $\forall t \geq 0$ ,  $x(t) \leq x(0)$ 。

综上,  $x(t) \leq \max\left\{x(0), \frac{a_1}{a_2}\right\}$ , 即  $x(t)$  正向有界。

下证  $y(t)$  也是正向有界的, 记  $x_{\max} = \max\left\{x(0), \frac{a_1}{a_2}\right\}$ , 设直线:  $C = y + \frac{x}{a_0} - c$ , 其中  $c$  为充分大的正参数, 则

$$\left. \frac{dC}{dt} \right|_{C=0} = \left. \frac{dy}{dt} + \frac{1}{a_0} \frac{dx}{dt} \right|_{y+\frac{x}{a_0}-c=0} = -\frac{a_2}{a_0} x^3 + \frac{a_1}{a_0} x^2 + \frac{x}{a_0} - y^2 - c$$

因为  $x(t)$  正向有界, 当  $c$  充分大时,  $\left. \frac{dC}{dt} \right|_{C=0} < 0$ , 且  $(x(0), y(0))$  必在由  $x$  轴和  $y$  轴, 直线  $C = y + \frac{x}{a_0} - c$  及  $x = x_{\max} + 1$  所围成的区域  $\Omega$  内, 所以  $(x(t), y(t))$  必在区域  $\Omega$  内, 所以  $x(t)$ ,  $y(t)$  都是正向有界的。证毕。

此引理说明, 只要捕食者和食饵两种群的初始密度都不为零, 则这两个种群的种群密度不会出现无限大的情况, 捕食者和食饵之间必将互相制约, 并分别被控制在一定的数值范围内。

**定理 3.2.** 当  $a_1 - a_0 > a_2$  或当  $a_2 < a_1 \leq a_0$ , 且  $T > 0$  时, 系统(2.1)在  $R_+^2$  内存在一个稳定的极限环。

**证明:** 当  $a_1 - a_0 > a_2$  或当  $a_2 < a_1 \leq a_0$ , 且  $T > 0$  时, 系统存在正的不稳定的平衡点  $B$ , 同时也满足定理 3.1②, 所以此时  $A$  为系统的鞍点。比较  $x_0$ ,  $x_B$ ,

$$x_B - x_0 = \frac{(a_1 - a_0) + \sqrt{(a_1 - a_0)^2 + 4a_0a_2}}{2a_2} - \frac{a_1}{a_2} = \frac{-(a_1 + a_0) + \sqrt{(a_1 - a_0)^2 + 4a_0a_2}}{2a_2}$$

此时  $a_1 > a_2$ , 所以  $\sqrt{(a_1 - a_0)^2 + 4a_0a_2} - (a_0 + a_1) < 0$ , 进而可知  $x_B < x_0$ 。故当  $a_1 - a_0 > a_2$  或当  $a_2 < a_1 \leq a_0$ , 且  $T > 0$  时, 系统在区域  $R_+^2 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$  上有存在极限环的可能性。

为了使环域只包括平衡点  $B$  而不包含平衡点  $A$ , 构造如下环域:  $\Lambda = \{(x, y) | 0 \leq x \leq x_0, 0 \leq y \leq x_0 - 1\}$ , 易知  $x = 0$ ,  $y = 0$  为系统的轨线。当  $x = 0$ ,  $y > 0$  时, 有  $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=0, y>0} = -y(1+y) < 0$ , 轨线方向为  $y$  轴负方向; 当  $y = 0$ ,  $0 < x < x_0$  时, 有  $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{y=0, 0<x<x_0} = x(-a_2x^2 + a_1x)$ , 因为  $x_0 = \frac{a_1}{a_2}$ , 所以  $-a_2x^2 + a_1x$  在  $0 < x < x_0$  的条件下必小于 0, 则  $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{y=0, 0<x<x_0} < 0$ , 轨线走向为  $x$  轴正方向; 当  $x = x_0$ ,  $0 < y < x_0 - 1$  时, 有  $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=x_0, 0<y<x_0-1} = y(x_0 - 1 - y) < 0$ , 轨线方向是由外侧流向内侧; 当  $y = x_0 - 1$ ,  $0 < x < x_0$  时, 有  $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{y=x_0-1, 0<x<x_0} = x(-a_2x^2 + a_1x - a_0x_0 + a_0)$ , 把  $x_0 = \frac{a_1}{a_2}$  代入, 得  $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{y=x_0-1, 0<x<x_0} = x \left( -a_2x^2 + a_1x - \frac{a_0a_1 - a_0a_2}{a_2} \right)$ , 由已知条件可以判定,  $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{y=x_0-1, 0<x<x_0} < 0$ , 轨线方向是由外侧流向内侧。所以, 由  $x = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $y = 0$ ,  $y = x_0 - 1$  所围成的矩形区域构成了环域的一条外边界线, 又因为在区域内只有  $B$  点这一个不稳定的正平衡点, 根据 Poincaré-Bendixson 环域定理[11], 系统在  $R_+^2$  上肯定存在一个稳定的极限环。

**定理 3.3.** 当  $T < 0, a_1 > a_2$ , 且  $a_0 < 1$  时系统(2.1)在  $R_+^2$  内不存在极限环。

**证明:** 取 Dulac 函数  $B(x, y) = \frac{1}{x^2y}$ , 经过计算, 可得

$$\frac{\partial(BR)}{\partial x} + \frac{\partial(BS)}{\partial y} = -\frac{a_2}{y} + \frac{a_0 - 1}{x^2} < 0$$

根据 Dulac 判据[11], 当  $T < 0, a_1 > a_2$  且  $a_0 < 1$  时, 系统(2.1)在  $R_+^2$  内不存在闭轨, 即在  $R_+^2$  内不存在极限环。证毕。

#### 4. 数值模拟

本节利用数学软件 Maple 对稀疏效应下具有平方次投放率的捕食-食饵系统进行数值模拟, 通过该模拟, 可以直观地观察出系统的局部轨线的具体的绕行方向, 图 1 清晰地看出在一定的限制条件下系统(2.1)存在着稳定的正平衡点, 图 2 可判断出在定理指定的限制范围下系统内存在极限环, 从而验证本文中定理的正确性。

图 1 根据定理 2.1 的条件, 模拟当  $a_1 - a_0 > a_2$  且  $T < 0$  时系统存在稳定的正平衡点  $B$ 。

图 2 和图 3 根据定理 3.2 的条件, 模拟 1)  $a_1 > a_0 + a_2$ ,  $T > 0$ ,  $a_0, a_1, a_2$  都为正数; 2)  $a_0 \geq a_1 > a_2$ ,  $T > 0$ ,  $a_0, a_1, a_2$  都为正数时系统内存在极限环。

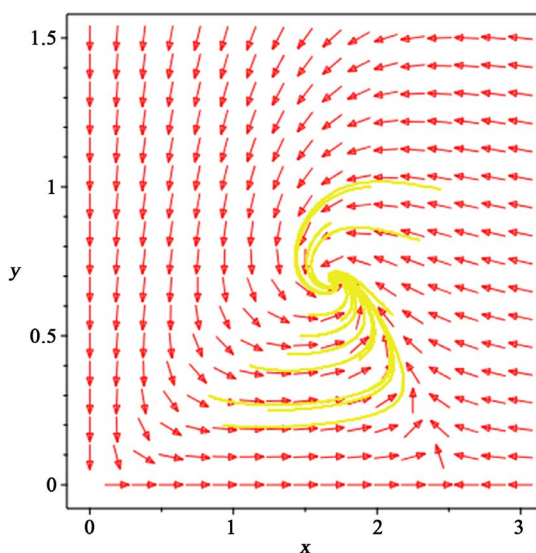


Figure 1. Stable equilibrium point

图 1. 稳定的平衡点

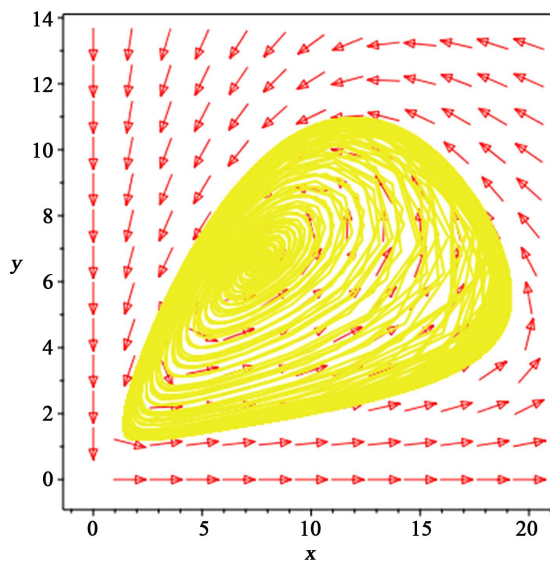


Figure 2. Stable limit cycle when  $a_1 > a_0 + a_2$  and  $T > 0$

图 2. 当  $a_1 > a_0 + a_2$ , 且  $T > 0$  时, 稳定的极限环

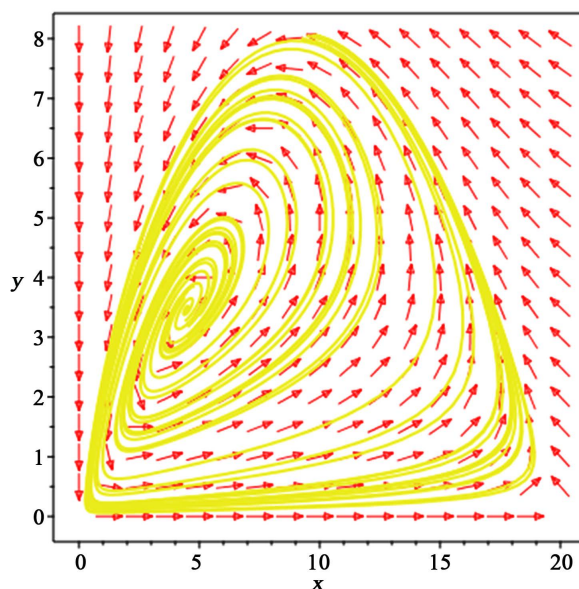


Figure 3. Stable limit cycle when  $a_0 \geq a_1 > a_2$  and  $T > 0$

图3. 当  $a_0 \geq a_1 > a_2$ , 且  $T > 0$  时, 稳定的极限环

## 5. 系统的生态意义

对于稀疏效应下具有密度制约的捕食-食饵系统来说, 如果想维持整体系统处于一种相对动态的稳定, 就必须通过外界的干预, 具体方法为: 定期定量向系统中投放、补给食饵。通过这种方法我们可以保护系统, 促进捕食-食饵系统的可持续发展, 进而保持生态系统的平衡。对带有常数投放率和线性投放率的捕食-食饵系统已经得到了一些结论, 见文献[6] [7] [8] [9]。其中文献[9]的作者在其文末指出, 现实条件下, 食饵的投放率很难满足线性关系, 本文就是在文献[9]的思路引导下, 研究了食饵投放率为平方次情况下的捕食-食饵系统, 进而发现, 只要参数在一定范围内控制得当, 那么捕食者和食饵的种群数量都可以达到稳定状态。结合参考文献, 本文得出如下结论: 当食饵具有常数、线性、平方次投放时, 通过控制调节系统的各个参数, 具有稀疏效应的捕食-食饵系统均可以在一定范围内达到稳定状态。在此结论的基础上, 本文也提出猜想, 当食饵具有高次投放率甚至指数函数投放率时, 具有稀疏效应的捕食-食饵系统是否可以通过改变参数来控制系统, 使系统仍然可以保持稳定呢? 这是我们后面值得进一步探讨的问题。

## 致 谢

该论文由中央高校基本科研业务费专项资金 No.2017B17314 资助。

## 参考文献

- [1] 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 2000.
- [2] 吴兴歧, 刘学生, 赵振海. 一类稀疏效应下捕食者-被捕食者系统极限环的存在性和唯一性[J]. 数学研究与评论, 1997, 17(1): 69-73.
- [3] 郑清波, 余昭旭, 孙继涛. 一类稀疏效应下食饵-捕食者系统极限环的存在唯一性[J]. 生物数学学报, 2001, 16(2): 156-161.
- [4] 沈聪, 沈伯骞. 一类稀疏效应下的捕食系统存在唯一极限环的充要条件[J]. 生物数学学报, 2003, 18(2): 207-210.
- [5] 袁月定, 周慧. 一类稀疏效应下的捕食系统的定性分析[J]. 宜春学报, 2008, 30(6): 10-11.

- [6] 陈忠华, 陈兰荪. 食饵种群具有常数投放率的捕食-食饵模型分支问题[J]. 数学杂志, 1994, 14(4): 541-548.
- [7] 沈伯骞, 沈聪. 食饵具有常投放的一类稀疏效应捕食系统[J]. 数学杂志, 2000, 20(2): 173-179.
- [8] 杜超雄, 袁月定. 一类食饵具有常投放的稀疏效应捕食系统的定性分析[J]. 系统科学与数学, 2009, 29(5): 686-692.
- [9] 任睿超, 晋金才. 一类食饵具有线性投放率的稀疏效应捕食模型的定性分析[J]. 高师理科学刊, 2011, 31(1): 16-21.
- [10] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性及稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [11] 张伟年, 杜正东, 徐冰. 常微分方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2015.

**知网检索的两种方式:**

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>  
期刊邮箱: [aam@hanspub.org](mailto:aam@hanspub.org)